HANDBUCH DES NATURWISSENSCHAFTLICHEN UND MATHEMATISCHEN UNTERRICHTS
Herausgegeben von J. Norrenberg

Methodik des mathematischen Unterrichts

von

Dr W. LIETZMANN

II. Teil

Verlag von Quelle & Meyer in Leipzig

LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS
AT URBANA-CHAMPAIGN

510.7
L62m
v.2

Math.

The person charging this material is responsible for its return to the library from which it was withdrawn on or before the **Latest Date** stamped below.

Theft, mutilation, and underlining of books are reasons for disciplinary action and may result in dismissal from the University.

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY AT URBANA-CHAMPAIGN

AUG 6 RECD

L161—O-1096

HANDBUCH DES NATURWISSENSCHAFTLICHEN
UND MATHEMATISCHEN UNTERRICHTS
Herausgegeben von Geheimen Oberregierungsrat Dr. J. NORRENBERG
VII. BAND, 2. TEIL

Methodik des mathematischen Unterrichts

von

DR. W. LIETZMANN
Oberstudiendirektor der Oberrealschule in Göttingen

2. durchgesehene und vermehrte Auflage

2. Teil:

Didaktik der einzelnen Gebiete des mathematischen Unterrichts

Mit 8 Tafeln und 84 Figuren im Text

1923
Verlag von Quelle und Meyer in Leipzig

Druck von Frankenstein & Wagner, Leipzig.

510,7
L62m
v.2

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Die Ausführungen in dieser Methodik des mathematischen Unterrichtes berühren sich in vielen Dingen mit den Berichten, die ich von 1909 bis 1913 in der Reihe der „Abhandlungen über den mathematischen Unterricht, herausgegeben von F. Klein, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission," veröffentlicht habe. Ich möchte aber nicht unterlassen, auf einen grundlegenden Unterschied dieser Berichte und der vorliegenden Methodik hinzuweisen. Jene „Abhandlungen" wollten ein Bild der Dinge geben, wie sie sind. Sie dienen, um einen Ausdruck von F. Klein zu benutzen, der deskriptiven Pädagogik. Eine Methodik will im Gegensatz dazu sagen, wie die Dinge sein sollen. War dort unbeschadet einzelner Bemerkungen die Hauptsache der objektive Bericht, so muß in einer Methodik der subjektive Charakter überwiegen.

In den mathematischen Methodiken, die wir bisher in Deutschland besaßen, von Reidt, von Simon und von Höfler, überwiegt in der Tat die subjektive Note ganz außerordentlich. Wenn dies in den folgenden Seiten nicht in gleichem Maße der Fall ist, so ist der Grund ein doppelter. Einmal ein persönlicher: das Temperament, mit dem man, was man für richtig hält, verficht, ist bei den verschiedenen Schulmännern verschieden. Dann aber ein sachlicher: es ist meine Überzeugung, daß es in vielen Fällen eben nicht nur bloß einen richtigen Weg gibt. Schon der Lehramtskandidat soll persönlich zu jeder Einzelfrage Stellung nehmen; ein solcher bewußt gewählter methodischer Weg scheint mir für den Unterricht gewinnbringender als ein vielleicht besserer, der nur einem Führer nachgegangen wird. Auch die Methodik soll meiner Meinung nach nicht nur den einen Weg aufweisen, den der Verfasser für den besten hält; sie soll vielmehr für jeden, der sich bei ihr Rat holt, die wichtigsten Fragen, die sich in methodischer Hinsicht bei der Behandlung irgendeines Teilgebietes einstellen, zusammentragen und die bedeutsamsten Antworten darauf angeben. In der Art und Weise dieser Beantwortung wird die Meinung des Verfassers genugsam zum Ausdruck kommen. Aber der Leser, schon der Anfänger im Lehramt, erst recht der erfahrene Lehrer, wird nun selbst wählen können. So hat diese Methodik nicht als Endziel im Auge, daß jeder Leser auf die als die nützlichsten oder schönsten angepriesenen Pfade

544259

eingeschworen wird; die Absicht ist vielmehr, daß der Mathematiklehrer bewußt methodisch unterrichte. Wir erleben jetzt überall im Schulwesen die kräftige Hervorkehrung der körperlichen und geistigen Selbstbetätigung des Schülers. Kann man es da dem jungen Lehrer zumuten, auf die Worte irgendeines Magisters zu schwören?

Ich hoffe, daß ein in dieser Absicht geschriebenes Buch dem Anfänger ebenso etwas sagt, wie dem gewiegten Praktiker. Ich denke es mir wirklich als ein Handbuch. Der Lehrer, der in irgendeiner Klasse ein Kapitel des mathematischen Unterrichts zu behandeln hat, erfährt, hoffe ich, aus meiner Darstellung, wozu es Stellung zu nehmen heißt; er erhält Anregungen nach dieser und jener Seite, er behält dabei jede Freiheit, ob er den Ansichten des Verfassers zustimmen will oder nicht.

Es ist nicht zu verkennen, daß ein solches Verfahren eine Gefahr mit sich bringt. Das ist die Fülle der Einzelheiten, die auf den einstürmen, der zum ersten Male Unterricht erteilt und der ohne ein solches Buch vielleicht instinktmäßig und unbekümmert um das Vielerlei der Fragen seinen Weg gegangen wäre. Gewiß, wenn er ein pädagogischer Künstler ist, dann kommt er auch auf diesem naiven Wege zum guten Ziel. Aber es sind nicht alle Künstler. Und auch einem Künstler schadet es nichts, wenn er von den Ansichten anderer Leute hört. Im übrigen hoffe ich, daß ich mich in der Anführung von Einzelfragen so weit beschränkt habe, daß das Unterholz den Hochwald nicht überwuchert.

Zum Schluß noch eine Bemerkung mehr äußerer Art. Der erste Teilband wird im Kapitel über die Technik des mathematischen Unterrichtes auf zwei Dinge zusammenhängend und ausführlich eingehen, die an den verschiedensten Stellen in diesen zweiten Teil hineinspielen, auf die Lehrbücher und auf die Modelle. Die in den Schulen benutzten mathematischen Unterrichtswerke werden deshalb in den folgenden Ausführungen meist nur mit dem Verfassernamen genannt. Der ausführliche Titel und eine knappe Kennzeichnung wird sich im ersten Teilbande finden. Dann ist weiter in diesen Band eine Auswahl von Modellen in Abbildungen, mit Angabe des Erfinders und Herstellers, an denjenigen Stellen eingeschaltet worden, wo sie sachlich ihren Platz haben. Über Modellsammlungen im allgemeinen wird aber im ersten Teilbande noch des weiteren zu sprechen sein.

Jena, im Juni 1916.

W. Lietzmann.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Der erste Band der Methodik ist im Jahre 1919 ausgegeben; noch ehe der inzwischen in Aussicht genommene dritte Band, der den Anwendungen der Mathematik gewidmet sein soll, erscheinen konnte, wurde vom zweiten Bande eine neue Auflage nötig. Das Buch ist sorgfältig durchgesehen, in der Darstellung gekürzt, inhaltlich stark vermehrt worden. Die Wahl einer kleineren Drucktype gestattete, den Umfang rein äußerlich beträchtlich zu verringern.

Seit dem Erscheinen der ersten Auflage ist die mathematische Didaktik durch zahlreiche Arbeiten gefördert worden, die Berücksichtigung finden mußten. In nicht wenigen Fällen knüpfen solche Arbeiten unmittelbar an die in der Methodik gegebenen Anregungen an. Ich selbst war bestrebt, nach den verschiedensten Richtungen die Weiterarbeit zu betreiben. Gelegenheit gaben mir vor allem die Vorlesungen und Übungen, die ich an der Universität Göttingen seit 1919 abzuhalten habe, und das mit der Göttinger Oberrealschule verbundene pädagogische Seminar. Ich konnte mich hier der verständnisvollen Mitarbeit vieler jüngerer und älterer Kollegen erfreuen. Auch vielen Lesern schulde ich Anregungen. Allen diesen Mitarbeitern gilt mein Dank, meinen neuen Lesern aber der Wunsch, auch ihrerseits mit neuen Vorschlägen zur Ergänzung des Werkes nicht zurückzuhalten.

Trotz der kurzen Spanne Zeit, die seit dem Erscheinen der ersten Auflage verflossen ist, hat nach meiner Meinung die mathematische Didaktik inzwischen an verschiedenen Stellen Fortschritte gemacht. Ich kann in diesen Zeiten, in denen wir in Deutschland aufs härteste um die Erhaltung der geistigen Güter ringen müssen, nur dem Wunsche Ausdruck geben, daß sich Mittel und Wege finden lassen, die materialen Grundbedingungen sicher zu stellen; an Eifer, an Opfersinn, an Erfolg wird es dann bei der Weiterarbeit in Zukunft nicht fehlen.

Göttingen, im November 1922.

W. Lietzmann.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Vorwort V
Inhaltsverzeichnis VIII
Verzeichnis der abgebildeten Modelle XI
Verzeichnis der Abkürzungen XII

Erstes Kapitel.

Der Rechenunterricht.

1. Die Aufgaben des Rechenunterrichts 1
2. Zahl und Zählen 4
3. Das dekadische Zahlensystem 8
4. Addition und Subtraktion ganzer Zahlen 13
5. Multiplikation und Division ganzer Zahlen 20
6. Zahlentheoretisches im Rechenunterricht 29
7. Das Rechnen mit benannten Zahlen 32
8. Die gemeinen Brüche 38
9. Die Dezimalbrüche 45
10. Die Regeldetri 49
11. Die bürgerlichen Rechnungsarten 56
12. Das kaufmännische Rechnen 61

Zweites Kapitel.

Der propädeutische geometrische Unterricht.

1. Allgemeine Fragen des propädeutischen Unterrichtes 65
2. Beschreibung der geometrischen Gebilde 68
3. Das Darstellen geometrischer Gebilde 72
4. Messen und Schätzen 77
5. Zeichnerische und rechnerische Bestimmung geometrischer Größen 81

Drittes Kapitel.

Planimetrie.

1. Definitionen im Unterricht 83
2. Die Axiome im Unterricht 93
3. Das Beweisen geometrischer Lehrsätze 103
4. Die Lehre von den Geraden und Winkeln 115
5. Dreieck, Viereck und Kreis 121
6. Die geometrische Aufgabe 129
7. Flächenlehre 140
8. Ähnlichkeitslehre 147

Seite

Viertes Kapitel.

Stereometrie.

1. Propädeutik. Die einfachsten geometrischen Körper 152
2. Die „systematische" Stereometrie 158
3. Darstellende Geometrie 163

Fünftes Kapitel.

Trigonometrie.

1. Ebene Trigonometrie, erste Stufe 170
2. Ebene Trigonometrie, zweite Stufe 175
3. Sphärische Trigonometrie 178
4. Die trigonometrischen Aufgaben 182

Sechstes Kapitel.

Neuere Geometrie.

1. Neuere Geometrie des Dreiecks, Vierecks und Kreises 186
2. Die synthetische Geometrie der Kegelschnitte 190
3. Einfügung einiger Grundgedanken der neueren Geometrie in die alte 195
4. Projektive Geometrie und Kegelschnittlehre 199

Siebentes Kapitel.

Arithmetik.

1. Die Grundbegriffe der Arithmetik und der Unterricht 205
2. Die vier Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen 208
3. Die vier Grundrechenarten mit relativen und gebrochenen Zahlen 215
4. Das Potenzieren 225
5. Zahlentheorie 227
6. Das Radizieren 230
7. Das Logarithmieren 238
8. Arithmetische und geometrische Reihen 247
9. Kombinatorik 251
10. Wahrscheinlichkeitsrechnung 253

Achtes Kapitel.

Algebra.

1. Die Rechenoperationen mit Gleichungen 257
2. Gleichungen ersten Grades 260
3. Eingekleidete Gleichungen 263
4. Gleichungen zweiten Grades 268
5. Gleichungen höheren Grades 271
6. Die allgemeine Theorie der Gleichungen 275

Neuntes Kapitel.

Analysis.

A. Der Funktionsbegriff.

1. Einige Vorbemerkungen 278
2. Empirische Funktionen 281
3. Lineare Funktionen 288

Seite

4. Die Funktion $y=x^n$ 294
5. Die graphische Lösung der Gleichung zweiten Grades 298
6. Algebraische Funktionen 300
7. Exponentialfunktion und logarithmische Funktion 302
8. Nomographie 304

B. Analytische Geometrie.

9. Die analytische Geometrie der Geraden und des Kreises 307
10. Analytische Geometrie der Kegelschnitte 312
11. Geometrischer Ausblick 316

C. Infinitesimalrechnung.

12. Infinitesimalrechnung als Unterrichtsgegenstand 319
13. Die rationale ganze Funktion 324
14. Die rational gebrochenen und die algebraischen Funktionen 331
15. Transzendente Funktionen 336
16. Unendliche Reihen 339
17. Integralrechnung 347

Namenverzeichnis 353
Sachverzeichnis 358

Verzeichnis der im Text und auf den Tafeln abgebildeten Modelle und Apparate.

Rechnen.

Seite

Russische Rechenmaschine 8
Tillichs Rechenkasten 8
Rechenkörper nach Beetz 11
Schulmetermaßstab 35
Zusammenklappbarer Kubikmeter 36
Kubikdezimeter 36
Bruchrechenmaschine nach Hermann 39

Planimetrie.

Rollbandmaß 77
Dreieckige und viereckige bewegliche Rahmen 126
Ausschnitt aus dem Druckbogen eines Kinoheftes 127
Pendelquadrant nach Busch 130
Edlers Meßblatt 131
Gewöhnlicher Winkelmesser mit angeklebtem Pendel 132
Modell für die Berechnung des Flächeninhaltes des Trapezes nach Reichel 141
Figur des pythagoreischen Lehrsatzes aus dem „praktischen Mathematiker" von Römert 142
Bewegliche Modelle zur Veranschaulichung des pythagoreischen Lehrsatzes nach Treutlein 143
Modell zur Kreisberechnung 144
Proportionalzirkel 147
Sprungständer zur Erläuterung des Strahlensatzes 147, 148
Zwei Formen von Storchschnäbeln 149
Pantograph 149
Zwei Noniusmodelle . . . . . Tafel II

Stereometrie.

Satz von fünf Körperformen mit Stativ 69
Pyramide mit abklappbarem Blechmantel 153
Apparat zum Anzeigen der projizierenden Strahlen 154
Modell für die Zerlegung eines dreiseitigen Prismas in Pyramiden 155
Modell für die Zerlegung eines Würfels in drei Pyramiden 155
Apparat zur Veranschaulichung von Sätzen über Geraden und Ebenen im Raum von Blümel 159
Ecke mit Polarecke 160
Drahtmodell des Ikosaeders 162

Seite

Modell für die archimedische Ableitung des Kugelinhaltes . . . . . Tafel II
Erzeugung von Zylinder, Kegel und Kugel mit der Schwungmaschine . . . . „ III
Durchsichtige Kugel nach Rühlemann . . . . . „ IV
Modell zur Erklärung des Cavalierischen Satzes von Kremer . . . . . „ IV
Modelle für darstellende Geometrie nach Schmehl 167
Modelle für den Schnitt von Ebenen und Geraden mit Pyramiden, Prismen, Kegeln und Zylindern nach Mattauch . . . . . Tafel V

Trigonometrie.

Funktionsanzeiger 176
Holzkugel zum Zeichnen von Kugelkreisen 181

Neuere Geometrie.

Modell für harmonische Punkte und Strahlen nach Heinrich 187
Ellipsenzirkel 191
Kegelschnittzirkel nach Bußmann . . . . . Tafel VI
Doppelkegel mit Dandelinschen Kugeln 192
Kegelschnittmodelle mit Dandelinschen Kugeln . . . . . Tafel VII
Erzeugung des Kegelschnittes auf Grund des Satzes von den Dandelinschen Kugeln 194
Kegelschnittzeichner nach G. Härtel 194
Trog zum Erzeugen von Hyperbeln 195
Kegelschnitte und andere Kurven auf Rotationskörpern nach dem Verfahren von Papperitz . . . . . Tafel VIII

Arithmetik, Algebra und Analysis.

Zwei Rechenschieber 243
Parabelschablone 298

Verzeichnis der Abkürzungen.

IMUK = Internationale Mathematische Unterrichtskommission.
IMUK-Abh. I, 1 = Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die IMUK, herausgegeben von F. Klein, Band I, Heft 1.
IMUK-Ber. I, 1 = Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die IMUK, herausgegeben von W. Lietzmann, I. Folge, 1. Heft.
DAMNU = Deutscher Ausschuß für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.
Z m n U = Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.
Z ph ch U = Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht.
Ubl = Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.
M Ph B = Mathematisch-Physikalische Bibliothek.

ERSTES KAPITEL.

Der Rechenunterricht.

1. Die Aufgaben des Rechenunterrichtes.

Die Aufgaben und Ziele des mathematischen Unterrichtes im allgemeinen zu besprechen, ist zwar die Absicht des ersten Teilbandes dieses Buches; es erscheint aber angezeigt, die Frage beim Rechnen noch besonders aufzunehmen, weil dieser Unterricht zwar sicherlich auch ein mathematischer, aber doch ein solcher von eigener Art ist, da bei ihm das spezifisch Mathematische oder das, was vielfach dafür angesehen wird, mehr in den Hintergrund tritt. Was wir an dieser Stelle vom Rechenunterricht zu sagen haben, gilt zunächst nicht nur für die höheren Schulen, sondern auch für die Volksschulen — von einigen Punkten abgesehen, auf die wir gleich zu sprechen kommen —, während wir sonst in unserem Buche in erster Linie die höheren Schulen im Auge haben.

Die Entwicklung der Anschauungen über die Ziele des Rechenunterrichtes spiegelt sich in den Hauptlinien in der Geschichte des Rechenunterrichtes wieder.[1] Bis ins 17. Jahrhundert hinein betonte der Rechenunterricht fast ausschließlich den praktischen Zweck. Dem Schüler wurde beigebracht, wie er rechnen müßte: „Machs also — und kumpt recht", heißt es im Bamberger Rechenbuch von 1483. Diese Worte geben die Tonart an, in der der Rechenunterricht damals erteilt wurde. Warum so gerechnet wurde, diese Frage blieb unbeantwortet. So war das Rechnen damals ein Handwerk, das erlernt wurde, wie andere auch, das Unterrichten ein Abrichten und Einpauken von Regeln.

Eine solche einseitige Betonung des materialen Prinzipes im Rechenunterricht

[1] Von den Darstellungen der Geschichte des Rechnens und des Rechenunterrichtes nenne ich in erster Linie: J. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, 2. A. 1. Bd. Berlin (Verein. wiss. Verleg.) 1921; F. Unger, Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart, Leipzig (Teubner) 1888, und M. Sterner, Prinzipielle Darstellung des Rechenunterrichtes auf historischer Grundlage, I. Teil: Geschichte der Rechenkunst, München und Leipzig (Oldenbourg), ohne Jahreszahl (1891). Daneben kommen, zum Teil nur als Darstellungen gewisser Abschnitte aus der Rechengeschichte, in Betracht: W. Adam, Geschichte des Rechnens und des Rechenunterrichts, Quedlinburg (Vieweg) 1892; H. Große, Historische Rechenbücher des 16. und 17. Jahrhunderts und die Entwicklung ihrer Grundgedanken bis zur Neuzeit, Leipzig (Dürr) 1901; E. Jänicke, Geschichte des Unterrichts in den mathematischen Lehrfächern in der Volksschule (3. Band von C. Kehr, Geschichte der Methodik des deutschen Volksschulunterrichtes, 2. Aufl.), Gotha (Thienemann) 1888; P. Treutlein, Das Rechnen im 16. Jahrhundert, Heft 1 der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Leipzig (Teubner) 1877. — Im übrigen sei auf den 1. Band dieses Handbuches verwiesen: F. Pahl, Geschichte des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts. Leipzig, Quelle & Meyer, 1913.

hat vereinzelt, besonders auf dem Lande, bis in das 19. Jahrhundert hinein gedauert. Nur zwei Aussprüche von Leuten, die diese Methode noch an ihrem eigenen Leibe erfahren haben, zur Kennzeichnung:

Albert Bitzius (Jeremias Gotthelf, Leiden und Freuden eines Schulmeisters, 1838) berichtet:

„Und das alles (d. i. die vier Spezies) ging darum so mühselig und langsam zu, weil auch nicht das Geringste im Grund angegeben war, weil man nie wußte, warum man es so machen müsse, und nicht anders. Und eben deshalb vergaß man alles alsobald wieder. Nicht nur mußte man alle Winter mit gleicher Mühe von vorn anfangen, nicht nur wußte man vom Rechnen gar nichts mehr, sobald man aus der Schule war, sondern ob einer Spezies vergaß man die anderen, und wenn man beim Multiplizieren war, so hatte man die Subtraktion vergessen. Als einst der Herr Pfarrer an einem Schulexamen uns eine Addition aufgeben wollte, sagte der Schulmeister: ‚Verzeiht, wohlehrwürdiger Herr Pfarrer, solches haben wir lange nicht mehr gerechnet, sie können es kaum mehr, wir sind jetzt beim Dividieren!' Darüber wunderte sich kein Vorgesetzter, man fand es ganz natürlich, denn der Statthalter sagte: ‚Gerade so ging es auch mir, und wenn es mir lange nicht zuhanden kommt, vergesse ich es noch jetzt.'"

Und Friedrich Paulsen sagt (Aus meinem Leben. Jugenderinnerungen. Jena, Diederichs, 1910):

„In der Oberklasse wurde ebenso wie in der Unterklasse die Sache rein mechanisch vorgemacht. So setzt man bei Lösung einer solchen Aufgabe an, dann macht man dies und dies, dann kommt es so heraus. Es handelte sich lediglich darum, mit dem Gedächtnis den Ansatz und die Folge der Operationen festzuhalten, ganz wie beim Lernen des Katechismus; ein Versuch, die innere Notwendigkeit zu zeigen, wurde nicht gemacht. Daher dann das immer wiederkehrende Vergessen: bei der Regeldetri, bei der Bruchrechnung, beim Wurzelausziehen, immer kehrte die Frage wieder: ‚Wie wird das aufgesetzt?' Hatte man das Schema, dann rechnete man darnach 40 oder 50 Aufgaben aus dem Rechenbuch, und der Lehrer kümmerte sich nicht weiter darum."

Man kann wohl sagen — oder doch hoffen, daß heute diese Art des Rechenunterrichtes ausgestorben ist. Der Umschwung begann bereits im 18. Jahrhundert. Entscheidend wurde aber erst das Wirken Pestalozzis, der recht eigentlich der Schöpfer einer bewußten Unterrichtsmethode geworden ist. Das Neue, das gleichzeitig das rein mechanische Rechnen zu beseitigen oder doch mehr und mehr in den Hintergrund zu drängen sucht, ist die Absicht, mit dem Rechnen eine Schulung des Geistes zu erzielen. Einsicht in das Gefüge der Rechengesetze erscheint nicht minder wichtig als Kenntnis und Fertigkeit in ihrer Anwendung. Damit wird die Pflege der anschaulichen und der logischen Entwicklung zu einer Hauptaufgabe des Rechenunterrichts.

Man hat nicht selten dieses formalistische Prinzip überspannt, mehr im Klarmachen der Rechengesetze das Ziel des Unterrichts gesehen, als darin, daß der Schüler mit den erlernten Rechenmethoden auch etwas anzufangen verstehe. Die Zeit nach Pestalozzi hat erst allmählich den rechten Ausgleich gebracht zwischen formalem und materialem Prinzip; Männer wie Harnisch, Diesterweg und Hentschel[1] sind da zu nennen.

[1] Die methodischen Schriften ebenso wie die für Volksschulen bestimmten Rechenbücher von Hentschel, die jetzt von A. Költzsch herausgegeben werden, erfreuen sich bis in die Gegenwart hinein größter Verbreitung. Die Diesterwegschen Lehrbücher werden jetzt als Unterrichtsmittel kaum noch benutzt. Doch hat Diesterweg von den drei genannten Männern in methodischer Hinsicht wohl den größten Einfluß gehabt.

Eine neue Wendung nahm die Entwicklung der Anschauungen über den Zweck des Rechenunterrichtes unter dem Einfluß der Herbartischen Pädagogik. Herbart sieht das Ziel allen Unterrichtes in der Erziehung. Nach ihm muß also auch der Rechenunterricht sittliche Ziele haben. Auch das ist übrigens nicht etwas von Grund aus Neues, es findet sich als begleitendes Motiv schon in den sonst auf ein ganz mechanisches Rechnen abzielenden Rechenbüchern des 16. und 17. Jahrhunderts, über die uns Große sehr anschaulich berichtet hat[1]. Aber es ist eine nach unseren Begriffen recht grobkörnige, nicht auf das Ohr der Schüler abgestimmte Moral, die da gepredigt wird. Da heißt es z. B. im Anschluß an eine Rechenaufgabe, die sich mit dem Lohn „der leichtfertigen Delila" beschäftigt:

Sey Klug und sehr Witzig /
Die Welt ist gantz Spitzig /
Nicht leichtlich vertraue /
Noch sicherlich baue /
Wer treu wird geschetzet /
Am ersten verletzet /
Drumb sey stets Fürsichtig /
Fast keiner ist richtig.

Der nicht ganz leicht zu lösenden Aufgabe, die sittlichen Ziele des Rechnens im Unterricht herauszuarbeiten, unterzogen sich besonders Goltsch und Theel, dann der durch seine eigenartige, heute fast vergessene Rechenmethode bekannt gewordene Grube[2], von neueren Rechenmethodikern z. B. Knoche.[3] Heute ist allerdings wohl ein Umschlag der Meinungen eingetreten; die Ansicht, der ethische Zweck des Rechenunterrichtes dürfe „nicht allzu hoch angeschlagen werden", wie Lichtblau und Knotta in ihrer Methodik[4] sagen, wird heute herrschend sein. In der Tat, es kommt nicht viel dabei heraus, wenn Ermahnungen wie: „Strecke dich nach der Decke!" oder „Sei sparsam!" die Aufgaben des Rechenbuches unterbrechen, wie es in manchen für Volksschulen geschriebenen Werken geschieht.

Unzweifelhaft hat aber die Herbart-Zillersche Schule besonders mit ihrer Berufung auf das Konzentrationsprinzip und der daraus gefolgerten Herausarbeitung von Sachkreisen für eine Verknüpfung der materiellen Ziele des Rechenunterrichtes mit erziehlichen Bestrebungen gesorgt. Auch wenn man nicht das Rechnen mit moralischen Sprüchlein durchsetzt, ethische Aufgaben kann der Unterricht auch

---

[1] Vgl. S. 1, Anmerk. 1.

[2] A. W. Grube, Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule, nach den Grundsätzen einer heuristischen Methode, ein pädagogischer Versuch zur Lösung der Frage: „Wie wirkt der Unterricht sittliche Bildung?" Berlin (Enslin) 1842 (6. Aufl. 1881). — Grubes „monographische" Methode knüpft die Gliederung des Lehrganges an die Reihe der Zahlen an. Es wird also nicht in den einzelnen Zahlkreisen erst Addition, dann Subtraktion usf. im Zusammenhang behandelt, sondern die Gesamtheit der Rechenoperationen mit der Zahl 4, dann mit der Zahl 5, mit 6 usf..

[3] H. Knoche, Theoretisch-praktische Anleitung zur Erteilung des Rechen- und Raumlehreunterrichtes, ein neuer Versuch zur Lösung der Frage: „Wie wirkt der Rechenunterricht sittliche Bildung?" Arnsberg (Stahl) 1908. — Knoche hat viel benutzte Rechenbücher für Volksschulen herausgegeben, die von methodischen Lehrerheften begleitet sind.

[4] W. Lichtblau und A. Knotta, Methodik des Rechenunterrichts, Breslau (Hirt) 1910.

verfolgen, wenn er mit kalter Sachlichkeit die Zahlen sprechen läßt.[1] Das gilt ganz besonders von der staatsbürgerlichen Erziehung der Schüler. Davon wird in diesem Bande gelegentlich und im dritten Bande zusammenhängend zu sprechen sein.

Mit diesen drei Zielen, dem materialen, dem formalen und dem ethischen, ist die Bedeutung des Rechenunterrichtes für die Volksschule im ganzen gekennzeichnet. Die höhere Schule fügt nun aber noch ein viertes hinzu. In der Volksschule ist das Rechnen ein in sich abgeschlossenes Fach, es braucht nicht Rücksicht zu nehmen auf einen anschließenden Unterricht, dem es zur Grundlage dient. Anders auf der höheren Schule. Hier muß sich das Rechnen als Teil in den Dienst eines Ganzen, des mathematischen Unterrichtes, stellen. Da heißt es nicht bloß, wie gelangt der Unterricht am sichersten und raschesten zum Verständnis der Rechenregeln, welche Beispiele sind für das spätere Leben der Schüler am wichtigsten, sondern es tritt die den Volksschulen fremde Frage hinzu, wie der Rechenunterricht am besten den Bedürfnissen des späteren mathematischen Unterrichtes entgegenkommt, wie er ihm den Boden bereitet, ihm bewußt vorarbeitet, nicht etwa, wenn auch unabsichtlich, entgegenarbeitet.

Bis zu welchem Grade der Rechenunterricht eine Vorbereitung für den mathematischen Unterricht sein soll, darüber gehen die Meinungen auseinander. Die einen begnügen sich schon damit, daß der Rechenunterricht mit seinen Normalverfahren nicht im Widerspruch steht zu den späteren Operationen des arithmetischen Unterrichts. Andere wünschen das Rechnen als eine regelrechte Propädeutik der Arithmetik aufgefaßt zu sehen, sei es mit stetiger, sei es mit unstetiger Überleitung. Über das Wie wird später noch zu reden sein, hier genügt vorerst die Kennzeichnung dieser Aufgabe des Rechenunterrichtes.

2. Zahl und Zählen.

Der Schüler, der in die Sexta der höheren Schule aufgenommen wird, ist mit den Zählen und mit dem Begriff der positiven ganzen Zahl vertraut. Gemeint ist dabei natürlich nicht eine erkenntnistheoretisch und psychologisch begründete Erfassung des Zahlbegriffes, sondern eine durch vielfältige Erfahrung erworbene praktische Gebrauchsfertigkeit. Der Lehrer an der höheren Schule braucht sich also nicht mehr damit abzugeben, seine Schüler in die Kenntnis der Zahlen und der einfachsten Operationen mit ihnen einzuführen. Er muß sich da auf die Arbeit seiner Vorgänger in der Grundschule verlassen. Trotzdem aber erscheint es angebracht, daß er von den über den ersten Rechenunterricht herrschenden Anschauungen Kenntnis hat, damit er über den Weg, den seine Schüler bisher gegangen sind, orientiert ist. Mit dem gleichen Rechte, mit dem wir von dem Rechenlehrer in der untersten Klasse einer höheren Schule fordern, daß er über den späteren Verlauf des arithmetischen

[1] Als einen sehr eigenartigen Beitrag dazu will ich erwähnen, daß ein bekannter amerikanischer Methodiker, D. E. Smith, 1915 ein Heftchen herausgegeben hat, in dem den Schülern durch allerlei Rechenaufgaben, die von den vier Grundrechenarten bis hin zur Effektenrechnung führen, die Sinnlosigkeit des Krieges vor Augen geführt werden soll. Die kleine, auf Veranlassung der bekannten Carnegie-Stiftung verfaßte Schrift wurde in Amerika überall kostenlos verteilt. Vgl. einen kurzen Bericht darüber: J. Ruska, Amerikanische Kriegsarithmetik, Ubl. 22 (1916) S. 8ff.

Lehrganges unterrichtet ist und danach seine Maßnahmen einrichtet, mit dem gleichen Recht muß man verlangen, daß er weiß, nach welchen methodischen Gesichtspunkten der vorangehende Unterricht in der vorbereitenden Schule erteilt worden ist.

Natürlich müssen wir uns hier damit begnügen, die bemerkenswertesten Richtungen der Rechenmethodik mit wenigen Strichen zu kennzeichnen. Dabei treten die Konturen oft schärfer heraus, als sie in Wirklichkeit sind. Bezüglich alles weiteren muß auf die ausführlichen und sehr zahlreichen Schriften über den Rechenunterricht an Volksschulen verwiesen werden.[1]

Die ersten Grundbegriffe des Zählens lernt das Kind ganz allmählich etwa vom zweiten Jahre an im Beschäftigungsspiel und im häuslichen Leben kennen. Wo später eine Kindergartenunterweisung hinzukommt, wird auch da recht viel für die Bildung der einfachsten Zahlvorstellungen getan. Immer handelt es sich um eine meist unbewußte, nicht mit der Absicht auf Unterricht erfolgende und nur ganz gelegentlich wirksame Unterweisung, sei es durch ältere Personen, sei es durch die schon ein wenig weiter vorgeschrittenen Altersgenossen und Spielkameraden. Ich nenne als solche Gelegenheiten die Abzählverse, von einfachen Rhythmen wie

Eins, zwei, drei,
Rische, rasche, rei,
Rische, rasche, Plaudertasche,
Eins, zwei, drei,
Du bist frei —

mit ihren manchmal ganz unverständlichen, nur auf die Klangfarbe abzielenden Wortbildungen, bis hin zu Versen mit längeren Zahlreihen, wie

Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben,
Unsre Mutter, die schneid' Rüben,
Unsre Mutter, die schneid' Speck,
Du mußt weg.

---

[1] Es seien hier einige der am meisten benützten Rechenmethodiken angegeben; A. Büttner, Anleitung für den Rechen- und Raumlehre-Unterricht in der Volksschule, 22. Aufl. von H. Maertens und E. Schreiber, Leipzig (Hirt) 1910; A. Gerlach, Schöne Rechenstunden, 3. Aufl., Leipzig (Quelle & Meyer) 1914 (reformerisch); B. Hartmann, Der Rechenunterricht in der deutschen Volksschule, 3. Aufl., Frankfurt a. M. und Leipzig (Kesselring) 1904; E. Hentschel, Lehrbuch des Rechenunterrichtes in Volksschulen, 2 Teile, 17. Aufl. bearb. von A. Költzsch, Leipzig (Merseburger) 1907; J. Kühnel, Neubau des Rechenunterrichts, 2 Bde, Leipzig (Klinkhardt) 1916 (reformerisch); H. Räther, Theorie und Praxis des Rechenunterrichts, 3 Teile, 5. Aufl., Breslau (Morgenstern) 1919 bis 1920; ders., Methodik des Rechenunterrichts in zeitgemäßer Gestaltung, 2 Bde, ebenda 1921; W. Steuer, Methodik des Rechenunterrichts, 9. Aufl., Bielefeld (Velhagen & Klasing) 1910.

Von Büchern, die insbesondere über den ersten Rechenunterricht handeln, nenne ich außerdem noch: C. Atmanspacher, Der Rechenunterricht im ersten Schuljahre, Leipzig (Teubner) 1906; H. Kempinsky, Der Rechenlehrer der Kleinen, Leipzig (Dürr) 1911; A. Ritthaler, Praxis des grundlegenden Rechenunterrichtes, 1. Teil, 2. Aufl., 1909; 2. Teil, 1906, Halle a. S. (Schroedel); Rothkähl, Der Rechenunterricht auf der Unterstufe mit besonderer Berücksichtigung der gegenwärtigen Bestrebungen, Halle a. S. (Schroedel) 1907.

Einen Überblick über die Literatur der Rechenmethodiken gibt W. Lietzmann, Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland, Deutsche IMUK-Abh. V, 1, Leipzig (Teubner) 1912.

Dann kommen die zahllosen Beschäftigungsspiele in Betracht.[1] Beim Perlenaufziehen, beim Papierflechten und -falten, beim Stäbchenlegen, Zeichnen, Formen, Pappen, Bauen, immer spielen die ersten Zahlen, etwa bis fünf oder sechs, eine Rolle. Solcher Art sind die Quellen des primitiven Zahlbegriffes, mit dem der Schüler in die Schule eintritt.

Wie geht nun der Lehrer mit seinen Schülern an den eigentlichen Rechenunterricht heran? Die Ansichten über den einzuschlagenden Weg gehen recht weit auseinander. Vielen Methodikern erscheint als die wichtigste Vorfrage, deren Beantwortung entscheidend für das Unterrichtsverfahren ist, die vom Standpunkt irgendeiner philosophischen Weltanschauung aus zu führende Untersuchung nach dem Wesen des Zahlbegriffes. Man darf wohl aber einem Berichterstatter der „Pädagogischen Jahresschau" Recht geben, wenn er gelegentlich meinte: „Schon vor vielen tausend Jahren hat die Menschheit gerechnet; und sie hat es gelernt, ohne sich den Kopf darüber zu zerbrechen, wie die Zahl mit Zeit und Raum und noch anderem zusammenhängt."

Unzweifelhaft ist eine andere Frage von ungleich größerer Bedeutung: die nach den psychologischen Grundlagen des Zahlbegriffes. Was darüber die experimentelle Psychologie zur Stunde zu sagen hat, findet man in der IMUK-Abhandlung von Katz zusammengestellt.[2] Es ist, alles in allem, doch nur wenig. Jedenfalls erscheint mir gegenwärtig eine lediglich auf das Experiment gestellte Methodik des Anfangsunterrichtes nicht möglich. Es kann nach meiner Meinung auch eine zwingende Entscheidung darüber, welche von den gebräuchlichsten Methoden die richtige ist, heute noch nicht gefällt werden. Vielleicht sind mehrere Methoden richtig, je nach der psychischen Veranlagung des Kindes.

Es stehen sich in der Methodik des ersten Rechen unterrichtes heute zwei Ansichten gegenüber, die Anschauer und die Zähler.

Vom psychologischen Standpunkt aus ist für die „Anschauer" bemerkenswert, daß sie von einer simultanen Auffassung der Zahl ausgehen. Charakteristisch ist die starke Heranholung des Gesichtssinnes bei der Bildung des Zahlbegriffes. In didaktischer Hinsicht ist für die Methode der Anschauer das Zahlbild bezeichnend. Die einzelnen Zahlen werden durch Punktgruppen versinnbildlicht, wobei jeder Zahl nicht nur die entsprechende Anzahl der Punkte, sondern eine ganz bestimmte Gruppierung zugeordnet wird. Diese Zahlbilder, von denen ich die älteren von Busse[3] (Fig. 1) und die neuesten von Lay[4] (Fig. 2), der sich an Born anschließt,

---

[1] In den zusammenfassenden Darstellungen über die Spiele, z. B. in K. Groos, Die Spiele der Menschen, Jena (Fischer) 1899, wird leider auf die Rechenfertigkeit und Anschauungsfähigkeit übenden Spiele recht wenig Rücksicht genommen.

[2] D. Katz, Psychologie und mathematischer Unterricht. Abh. der deutschen IMUK, III 8, Leipzig (Teubner) 1913.

[3] Gottlieb Busse (1756—1835), Professor am Dessauer Philanthropin, gab (1786) ein Rechenbuch und eine Anleitung dazu heraus. Natürlich sind seine Zahlbilder nicht die ältesten überhaupt. Ich bemerke nur, daß viele alte Spiele, wie Würfel, Domino, Karten das Zahlbild benutzen.

[4] Vgl. W. A. Lay, Führer durch den ersten Rechenunterricht, naturgemäßes Lehrverfahren, gegründet auf psychologische Versuche, Karlsruhe (Nemnich) 1898.

hier zum Abdruck bringe, sind nach gewissen, bei den einzelnen Autoren verschiedenen, mehr oder weniger — zuweilen auch gar nicht — psychologisch begründeten

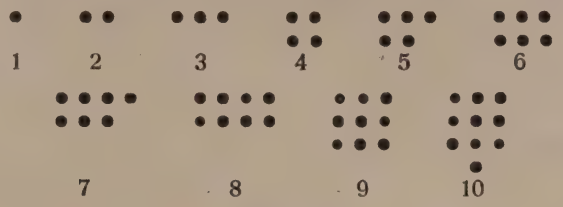


Fig. 1.
Zahlbilder nach Busse.

Gesetzen gebaut. Im Unterricht sind heute wohl am häufigsten die Zahlbilder von Lay anzutreffen.

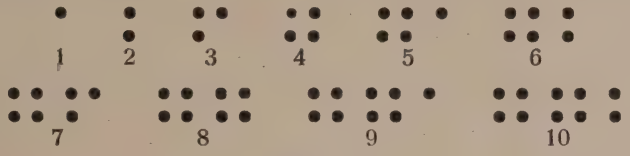


Fig. 2.
Zahlbilder nach Lay.

Ist beim Anschauen der Mengenbegriff und also die Kardinalzahl das Ursprüngliche, so steht beim „Zähler" die Ordinalzahl voran; er betont die sukzessive Auffassung der Zahl. Bei der Darbietung beschränkt er sich nicht auf den Gesichtssinn, sondern zieht daneben auch Tastsinn und, was der Anschauer ganz vermeidet, Hörsinn heran. Man benutzt zur Versinnlichung an Stelle der streng verpönten Zahlbilder Reihen von Punkten oder Strichen, die tatsächlich abgezählt werden, von Tonfolgen, z. B. Klopftönen; bei gewissen Methodikern spielt auch der Rhythmus eine Rolle[1].

Beide Richtungen, „Anschauer" wie „Zähler", bedienen sich zahlreicher Rechenapparate, von Fingern, Steinchen, Bohnen u. dgl. bis hin zu der weitverbreiteten russischen Rechenmaschine (Fig. 3) oder dem Tillichschen Rechenkasten, der als Einzelgegenstände statt der Kugeln Würfel und Säulen nimmt (Fig. 4). Diese beiden häufigsten Lehrmittel für den Anfangsunterricht sind in zahlreichen Abarten im Gebrauch. Leider fehlen auch didaktische Verirrungen nicht, z. B. Rechenapparate mit nachgebildeten Händen.

Wenn der Lehrer in Sexta mit dem wiederholenden Aufbau des in der Grundschule Durchgenommenen beginnt, so wird er keinesfalls auf diese ersten Methoden zur Entwicklung des Zahlbegriffes, denen sich dann auch die erste Einführung in die einfachsten Rechenoperationen mit kleinen Zahlen angliedert, zurückgreifen. Er wird vielmehr gleich mit dem Zahlsystem einsetzen können.

[1] Die grundlegenden Werke der „Zähler" sind R. Knilling, Die naturgemäße Methode des Rechenunterrichts in der deutschen Volksschule, Neue Ausgabe, 2 Teile, München (Oldenbourg) ohne Jahreszahl; und W. Tanck, Das Zählen und erste Rechnen, 2. Aufl., Kiel (Cordes) ohne Jahreszahl.

3. Das dekadische Zahlsystem.

Der auf die höhere Schule vorbereitende Unterricht hat die Schüler in das dekadische Zahlsystem eingeführt, zuerst schon beim Überschreiten des ersten Zehners, dann in gründlicherer Weise bei der Einübung der schriftlichen Rechenoperationen. Der Unterricht in der Sexta wird aber gut tun, gerade an dieser Stelle einzusetzen, aus methodischen Gründen ebenso wie aus systematischen. Ehe wir auf diese Dinge ausführlicher eingehen, wollen wir zwei Fragen vorweg erledigen. Die eine ist die nach der ersten Einführung des Zehnersystems unserer Zahlen, also eine Angelegenheit der vorbereitenden Schule, aber darum nicht unwichtig auch für den Lehrer der Sexta.

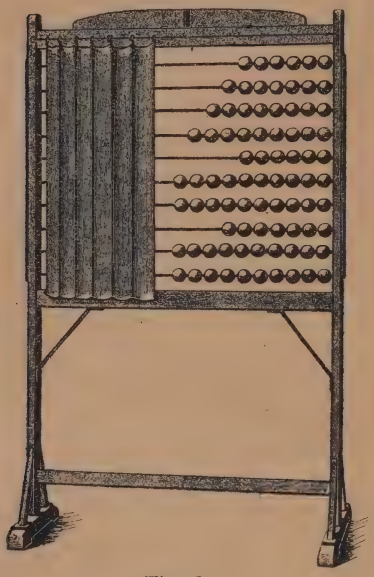


Fig. 3.
Russische Rechenmaschine. Ausführung der Firma H. Uhlmann, Gera-Reuß.

Anschauer und Zähler machen mit ihrer Methode schon in niederen Zahlregionen

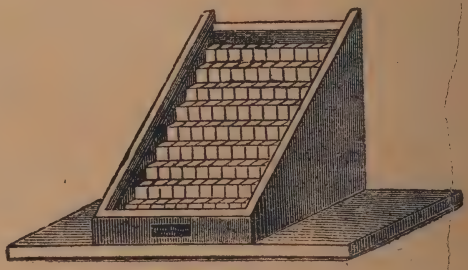


Fig. 4.
Tillichs Rechenkasten. Ausführung der Deutschen Lehrmittel-Anstalt (F. H. Klodt), Frankfurt a. M.

halt. Der Anschauer kann einen Haufen von 117 Kugeln nicht mit einem Blick übersehen — das kann höchstens der Schäfer mit seiner Schafherde — und der Zähler wird zwar, wenn er ein sorgfältiger Mann ist, an der Aufgabe nicht scheitern; bei einer größeren Zahl kann er aber Gefahr laufen, sich zu verzählen. Hier setzt eine Gruppe von Rechenmethodikern ein, die einen in der Praxis allgemein gebräuchlichen Weg zum Ausgangspunkt ihrer Methodik nehmen. Unter dem Namen „Systematiker" möchte ich die beiden Methodiker Wilk — der seine Methode selbst die „der sinnlichen Anschauung" nennt — und Haase vereinigen. Beiden ist nämlich die frühe Benutzung des Zahlsystems gemeinsam. Die Zahl 12 ist nicht in erster Linie 7 + 5 oder 8 + 4, sondern 10 + 2. Es spielen also die Zehner eine besondere Rolle, sie sind andere Zahlen als die Einer. Und mit den Hundertern, Tausendern usf. geht es nachher ebenso. Wilk[1] unterscheidet Grundzahlen 1, 2 usf.,

[1] Von Wilk's Schriften nenne ich außer seinen verbreiteten Rechenbüchern: Das Rechnen der Volksschule, 2 Lehrerhefte, 1909 und 1910; Das Werden der Zahlen im Menschen und in der Menschheit auf Grund von Psychologie und Geschichte, 1905 (2. Aufl. 1922 bei Hirt, Leipzig); Neue Rechenmethode, gegründet auf das natürliche Werden der Zahlen und des Rechnens, 2. Aufl., 1911. Sämtlich bei Bleyl und Kämmerer, Dresden-Blasewitz.

dann Systemeinheiten, wie 10, 100 usf., dann weiter die reinen Zehner, Hunderter, schließlich noch die aus solchen Zahlen aufgebauten mehrgliedrigen Zahlen. An seiner Rechenmaschine sind die kleineren Einerkugeln von den größeren Zehnerkugeln unterschieden; die Zahl 34 z. B. wird durch drei größere Zehnerkugeln und vier kleinere Einerkugeln dargestellt. Etwas anders verfährt Haase[1], der zur Versinnbildlichung der Zahlen eine dekadische Skala nimmt. Wir werden gleich noch auf diese Art der Darstellung zurückzukommen haben. Übrigens gehen auch die Zähler sehr bald zu den Systematikern über, indem sie z. B. die veranschaulichenden Stäbchen zu 10, zu 100, zu 1000 bündeln.

So viel zur Kennzeichnung einer an das Zahlsystem anknüpfenden, in letzter Zeit immer mehr Verbreitung gewinnenden Rechenmethode. Es liegt nahe, schon hier die Frage zu erörtern, wann man an eine allgemeine Theorie der Zahlsysteme wird herangehen können. Denn so viel ist klar: man wird sich in Sexta ganz auf das dekadische System beschränken, wird also nur den eigentlichen Aufbau der Zahlen bringen und erst später, nach Erledigung der Division, auch die auf der Eigenart des dekadischen Systems sich gründenden Teilbarkeitsregeln — diese als Vorbereitung auf die Bruchrechnung. Eine allgemeine Theorie der Zahlsysteme hingegen, die man zwar kurz fassen, keineswegs aber ganz unterschlagen soll, hat am besten ihren Platz im arithmetischen Unterricht nach der Lehre von den Potenzen, also etwa in Obertertia oder noch später.

Doch nun zu dem Unterricht in Sexta selbst. Die Rechenbücher geben hier zunächst meist eine Tabelle mit den Systemzahlen, sie lassen in Worten geschriebene Zahlen in Ziffern umsetzen und umgekehrt, üben auch das „Ponderieren", das Darstellen von Zahlen als Aggregaten von Einern, Zehnern, Hunderten usf. Manchmal wird auch etwas von den Zahlzeichen, den Ziffern, gesagt und dabei der römischen Ziffern gedacht. Da drängt sich eine Reihe methodischer Fragen auf, über die man sich zunächst klar sein muß, ehe man an den Unterricht herangeht.

Soll man gleich mit dem unendlichen Zahlenbereich beginnen oder in konzentrischen Kreisen vorgehend, erst den Hunderterkreis, dann den Tausenderkreis, den Hunderttausenderkreis und dann erst den unendlichen Zahlkreis behandeln, wobei man jedesmal die verschiedenen Rechenoperationen durchgeht. Das letzte Verfahren ist ja das in den vorbereitenden Klassen durchweg befolgte. Da hat man sich auch erst mit dem ersten Zehner befaßt, hat dann den Zahlkreis bis 20 behandelt — manche lassen dieses durch die Schwierigkeit der Zehnerüberschreitung bei Additions- und Subtraktionsaufgaben bedingte Zwischenstadium auch weg — dann den Zahlkreis bis 100 usf.

Wichtig für die Entscheidung der Frage ist natürlich, wieweit denn eigentlich die Schüler beim Eintritt in die Sexta schon in diesen konzentrischen Kreisen vorgeschritten sind. Früher herrschten in dieser Hinsicht große Verschiedenheiten. In Preßen brachte eine Verfügung vom August 1916 einheitliche Forderungen für die Aufnahmeprüfung nach Sexta:

---

[1] F. Haase, Zur Methodik des ersten Rechenunterrichts, 2. Aufl., Langensalza (Beyer & Söhne) 1906.

Die Grundrechnungsarten mit ganzen unbenannten und einfach benannten Zahlen. Sichere Beherrschung des Einmaleins bis 12 und des Eins durch Eins. Geübtheit im Kopfrechnen im Zahlenkreis bis 1000, im schriftlichen Rechnen bis 1 000 000. Teilen mit ein- und zweistelligen Teilern. Beim Abziehen und Teilen ist die sogenannte österreichische Methode nicht anzuwenden.

Die für die Grundschule aufgestellten Richtlinien vom Jahre 1921 gehen mit ihren Lehrplanandeutungen über das so umrissene Ziel nicht wesentlich hinaus.

Soll man nun beim Beginn des Unterrichts in Sexta einen Zahlkreis, etwa den bis 1000, vorschalten, lediglich zur Wiederholung? Ich bin der Meinung, man soll gleich mit dem unendlichen Zahlkreis beginnen. Um nicht mißverstanden zu werden: Ich meine damit natürlich nicht, daß der Lehrer, wenn er am ersten Tage in die Klasse tritt, gleich im Reiche der Millionen und Milliarden sich bewegen soll. Das Wesen des Zahlsystems wird er, von kleinen Zahlen ausgehend, erläutern, um dann allmählich auch zu größeren Zahlen vorzuschreiten. Es kann auf keinen Fall gemeint sein, daß man mit Vorliebe mit möglichst großen Zahlen arbeitet. Was gefordert wird, ist eine Einsicht in den Bau auch großer Zahlen. Es schadet also gar nichts, wenn nun auch einmal von Milliarde und Billion die Rede ist; diese Zahlenriesen, die noch bis vor kurzem kaum praktische Bedeutung besaßen, sind ja in unseren Tagen zu Alltäglichkeiten geworden. Im übrigen aber, insbesondere bei den Rechenoperationen selbst, ist dringende methodische Forderung: Beschränkung auf handliche Zahlen, wie sie im praktischen Leben vorkommen.

Wir haben in der Volksschule, ebenso wie in der höheren Schule, eine Bewegung, die in dieser Hinsicht tatkräftig und mit Erfolg vorgegangen ist. In der Volksschule sind es die Bestrebungen Steuers[1], die von einer Vereinfachung des gegenwärtigen Rechenstoffes ausgehen und als ein Kriterium der Brauchbarkeit die Beantwortung der Frage empfehlen: „Ist es wahrscheinlich, oder doch wenigstens möglich, daß die Aufgabe, die ich eben stelle, einst dem Schüler in seinem Leben begegnen wird?" Auf seiten der höheren Schule hat man noch andere Gründe namhaft gemacht. Schülke, der hier als der Führer der Bewegung anzusprechen ist, führt neben dem praktischen Leben sehr mit Recht die Wissenschaft ins Feld. Auch die Zahlenwerte, mit denen die Wissenschaft operiert, gehen über eine verhältnismäßig kleine Stellenzahl nicht hinaus. Wir werden an anderer Stelle, wenn vom abgekürzten Rechnen die Rede sein wird, darauf wieder zurückkommen.

Es wird in der Tat nichts verschlagen, wenn man sich in der Sexta vor Zahlenriesen hütet, wenn man Rechnungen mit Zahlen über 100000 im allgemeinen vermeidet. Auch die Meraner Vorschläge der Unterrichtskommission Deutscher Naturforscher und Ärzte setzen eine solche Grenze fest. Eine Einschränkung scheint mir dabei aber, wie schon angedeutet, doch am Platze. Es ist nötig, gelegentlich einmal von großen Zahlen zu sprechen. Man wird sich im wesentlichen damit begnügen können, das Bildungsgesetz großer Zahlen aufzuzeigen und dazu einige wenige Beispiele von großen Zahlen heranzubringen; am besten wird man solche Zahlen vor den Schülern entstehen lassen; bei späterer Gelegenheit, bei vorgeschrittener Einsicht der Schüler wird man das ab und zu wiederholen. Man wird sich bei der Potenz-

[1] Steuer hat Rechenbücher verfaßt, die in Volksschulen sehr verbreitet sind. Über seine methodischen Anschauungen unterrichtet seine S. 5 Anm. 1 genannte Methodik.

lehre gewiß nicht die schöne Geschichte vom Erfinder des Schachspieles[1] und seiner Belohnung entgehen lassen — auch für die Kleinen gibt es eine recht nette Einkleidung mit den Wichtelmännchen, die einem Schuster bei der Arbeit helfen.[2] Später gibt die Zinseszinsrechnung mit dem zu Christi Geburt auf die Sparkasse gelegten Pfennig ein bekanntes Beispiel. Und wer wollte sich in Prima bei den Kombinationen die überraschenden Zahlenungeheuer entgehen lassen? Ich erinnere nur an die reizende Novelle von Kurd Laßwitz: „Die Universalbibliothek", in der alles überhaupt mögliche Wissen der Welt aufgestapelt ist.[3] Freilich umfaßt die

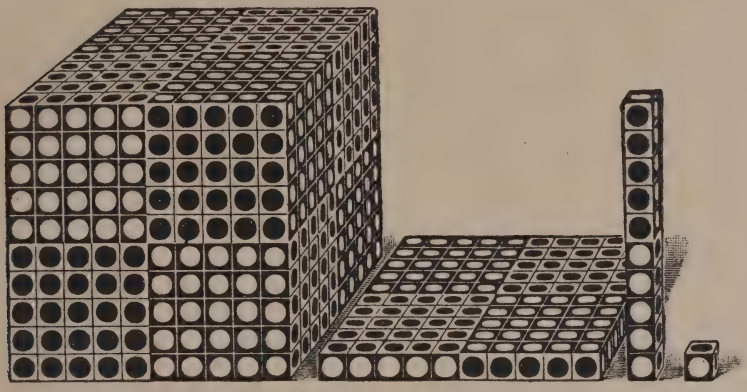


Fig. 5.
Rechenkörper nach Beetz.

Bibliothek bloß $10^{2\,000\,000}$ Bände. Für den Primaner sind solche Beispiele besonders lehrreich, kommt doch bei ihm die Zahl ∞ nicht selten dicht hinter 100 oder 1000.

Alle Zahlvorstellungen schweben in der Luft, solange man sich damit begnügt, die Zahlen bloß ziffernmäßig hinzuschreiben. Eine Veranschaulichung ist immer geboten — übrigens ist damit auch manchmal dem Erwachsenen sehr gedient. Einfache Mittel zur Veranschaulichung der Zahlen sind seit langer Zeit im Gebrauch. Viel verbreitet sind Bündel von Stöckchen, wie sie schon Overberg (1754—1826) empfohlen hat. So enthält z. B. die Treutleinsche Modellsammlung[4] kleine Bündel mit 10, mit 100 Stäbchen. Bei den Würfeln vereinigt man am besten 10 Würfel zu einer Säule, zehn solcher Säulen zu einer ebenen Platte, die 1000 wird dann wieder von einem Würfel von der zehnfachen Kantenlänge des ersten Würfels repräsentiert. Dabei erfährt das, was man wohl das Dreistellenprinzip unserer Zahlenschreibung genannt hat[5], die Zusammenfassung je dreier Ziffern von rechts beginnend, eine anschauliche Darstellung.

[1] Die Fassung dieser Geschichte in den Aufgabensammlungen ist vom historischen Gesichtspunkt aus meist nicht einwandfrei; vgl. J. Ruska, Zur Geschichte der Schachbrettaufgabe, ZmnU 47 (1916) S. 275ff.

[2] Erzählt z. B. bei Gerlach, Schöne Rechenstunden; vgl. S. 6 Anm. 1.

[3] Kurd Laßwitz, Traumkristalle, Leipzig (Elischer).

[4] Erschienen bei B. G. Teubner in Leipzig.

[5] Über die hiermit zusammenhängenden Fragen verbreitet sich W. Porstmann, Normenlehre, Leipzig (Haase) 1917.

Bei noch größeren Zahlen wird man sich an geeignete Überlegungen halten, um die Größe der Zahlen wenigstens einigermaßen plausibel zu machen. Man wird dabei immer seine Schwierigkeiten haben, wenn man versucht, der Zahl durch gleichartige Gegenstände beizukommen. Gino Loria erzählt einmal[1], wie er sich in einem Bade über die große Zahl der Badegäste gewundert habe, denen er im Laufe des Tages begegnete. Nachher habe man ihm zu seinem größten Erstaunen gesagt, daß das Bad im ganzen Jahre nur 10000 Gäste zähle. — Eine Minute ist eine recht kurze Spanne Zeit. Und doch sind von Christi Geburt an erst am 28. April 1902, vormittags 10 Uhr 40 Minuten, eine Milliarde Minuten vergangen, wie H. Schubert berechnet hat.[2] Man muß also schon, will man eine Anschaulichkeit vortäuschen, Einheiten zu höheren Einheiten zusammenfassen, Weizenkörner zu Säcken, Steine zu Wagenladungen, und die wieder zu Eisenbahnzügen usf. Das läuft, genau genommen, auf dasselbe hinaus, was wir bei der Ziffernschreibung tun und was schon Archimedes in seiner Sandrechnung getan hat.[3]

Eine Art der Darstellung von Zahlen scheint mir vor anderen besonders wichtig, die Darstellung durch den Zahlstrahl. Auf einem Strahl werden vom Nullpunkt aus unter Verwendung einer Einheit die Zahlen 1, 2 usf. bezeichnet. Man kann, um den Anschluß an das praktische Leben zu wahren, die Zahlen 10, 20 usf., vielleicht auch in geringerem Grade noch 5, 15 usf. durch längere Striche hervorheben. Haase, den ich vorhin als Vertreter der Systematiker genannt habe, verfährt so schon im Anfangsunterricht. Als Maßstab nimmt man am besten im Heft 1 *cm*, an der Tafel 10 *cm*, wenn Heft und Tafel karriert sind, auch die Seitenlänge eines Quadrates. Man tut aber gut, gelegentlich den Maßstab zu wechseln. Um große Zahlen, etwa 1000 oder 100000, anschaulich zu machen, nimmt man dann Strecken auf dem Schulhof oder in der Umgebung der Stadt zu Hilfe. Bei vielziffrigen Zahlen versagt auch diese Veranschaulichung.

Über die Schreibweise der Ziffern wird wohl schon in Sexta gelegentlich ein Wort zu sagen sein. Leider ist die Geschichte unserer Zahlzeichen noch dunkel. Am schnellsten unterrichtet in dieser Hinsicht die Darstellung von Löffler.[4] Man wird im Unterricht gern auch andere Zahlzeichen heranziehen wollen, in Sexta freilich wohl nur die römischen Ziffern, weil sie auch heute noch praktische Bedeutung haben. Keilschriftliche und — zumindest auf Gymnasien — griechische Zahlzeichen wird man erst später, wenn das Zahlsystem im Anschluß an die Potenzrechnung erneut erörtert wird, erwähnen.

---

[1] G. Loria, Excentricités et mystères des nombres. L'Enseignement mathématique **15** (1913), S. 193ff.

[2] Einiges über große und kleine Zahlen ist in einem auch für Schüler der Unterklassen lesbaren Bändchen der MPhB: W. Lietzmann, Riesen und Zwerge im Zahlenreich, Leipzig (Teubner) 2. A. 1918 zusammengestellt.

[3] Einen Abschnitt aus der Sandrechnung bringt: F. Dannemann, Erläuternde Abschnitte aus den Werken hervorragender Naturforscher aller Z iten und Völker, Leipzig, Engelmann, 1902. Eine deutsche Übertragung findet sich in Th. Heath Archimedes Werke, deutsch von F. Kliem, Berlin, Häring, 1914. Im übrigen sei auf die Heibergsche Ausgabe der Werke von Archimedes, Leipzig (Teubner) ve wiesen.

[4] E. Löffler, Ziffern und Ziffernsysteme, MPhB 1 u. 34, 2. A. Leipzig (Teubner) 1918 u. 1919.

Über die Schreibweise der Zahlen ist man sich jetzt in Deutschland wohl einig. Man nimmt, wie schon gesagt, bei größeren Zahlen je drei Ziffern zusammen, unterscheidet aber die Gruppen nur durch ein größeres Spatium, nicht etwa durch Komma oder Akzent. Das Komma ist durch eine Verfügung als Dezimalzeichen bei Dezimalbrüchen festgelegt. In Österreich und in anderen Ländern, z. B. in den Vereinigten Staaten, steht bekanntlich an Stelle dieses Kommas ein Punkt in halber Zeilenhöhe. In diesen Ländern mit Dezimalpunkt wird dann das Komma nicht selten zur Trennung der Zifferntripel größerer Zahlen verwandt.

Von methodischer Bedeutung für den Unterricht ist der leidige Widerstreit, der im Deutschen zwischen der geschriebenen und der gesprochenen Zahl besteht. Wir schreiben 73, also siebenzig und drei, sprechen aber dreiundsiebzig. Es ist gar nicht auszudenken, wieviele Rechenfehler diesem Verfahren zu Lasten fallen. Man ist sich auch wohl in wissenden Kreisen einig, daß hier ein Übelstand vorliegt. Aber alle früheren Schritte, die zur Beseitigung des Übelstandes unternommen sind, so auch der Vorstoß des Astronomen W. Förster, sind gänzlich gescheitert. Ob ein erneuter Versuch von Schülke[1] Erfolg haben wird, muß die Zukunft lehren. Der Rechenmethodiker muß jedenfalls aus der Sachlage seine Schlüsse ziehen. Er darf natürlich nicht seinen Schülern dekretieren: „Ihr lest die Zahlen so, wie es das einzig Wahre ist!" Sondern er muß sich an den herrschenden Gebrauch halten und bei der Unterweisung nachdrücklich auf diese Inkongruenz von Schrift und Sprache hinweisen; er muß seine Schüler dahin bringen, daß sie an diesen Stellen besonders achtsam sind.

Es ist eine bekannte Tatsache, daß bei der Wiedergabe größerer Zahlen und bei ihrer Aufnahme in eigener oder fremder Sprache leicht Fehler unterlaufen. Man zählt sehr leicht von 12098, 12099 zu 13000. Da ist es nun im praktischen Leben vielfach gebräuchlich, nur die Ziffern hintereinander auszusprechen, oder aber, wie beim Telephonieren, je zwei oder je drei Ziffern zusammenzufassen. Die Schule wird sich diesem Gebrauch im allgemeinen nicht anschließen wollen. Sie kann ihm aber doch entnehmen, daß sich beim Lesen und Sprechen vierzifferiger Zahlen achtzehnhundertfünfundzwanzig besser auffassen läßt als eintausendachthundertfünfundzwanzig.

4. Addition und Subtraktion ganzer Zahlen.

Bei der Definition der Addition begegnet man zwei verschiedenen Fassungen. Die eine geht vom Zählen aus — im Mittelalter wurde die Numeratio vielfach als besondere Rechenart aufgeführt — und erklärt die Addition als eine Abkürzung des Weiterzählens. 7 + 5 heißt: von 7 aus soll um 5 weitergezählt werden. Die andere Erklärung legt den Mengenbegriff zugrunde. Die Aufgabe 7 + 5 hat die Bedeutung, die Zahl zu suchen, die so viel Einheiten hat, wie die Zahlen 7 und 5 zusammen. — Dem Lehrer braucht nicht erst gesagt zu werden, daß eine irgendwie weitergehende logische Zergliederung des Zählprozesses oder des Mengenbegriffes für den Anfangsunterricht nicht in Frage kommen kann. Auch eine Untersuchung der Frage, ob Ordinalzahl oder Kardinalzahl das Primäre ist, kommt hier nicht in Frage.

[1] Vgl. A. Schülke, Zahlwörter und Positionssystem. ZmnU 46 (1915) S. 518ff; ders., Zahlen und Zahlwörter, Ubl 21 (1915) S. 101ff. u. an anderen Stellen.

Auch bei der Definition der Subtraktion lassen sich verschiedene Wege einschlagen. Dem Weiterzählen, dem Vorwärtszählen, entspricht das Rückwärtszählen. Die andere Definition führt schon hier den wesentlichen Begriff der Umkehrung einer Rechenoperation ein. Wenn $7 + 5 = 12$ ist, so ist $12 - 7 = 5$ und ebenso $12 - 5 = 7$. Man kann schließlich auch wieder den Mengenbegriff heranziehen. Dann gibt die Subtraktion $12 - 7$ einen Vergleich der Mengen 12 und 7, der nicht nur zur Feststellung der Ungleichung $12 > 7$ führt, sondern auch zur Angabe, um wieviel Einheiten die eine Menge die andere übertrifft.

Nun erhebt sich sofort die methodische Frage, was soll man von diesen Dingen mit dem Sextaner behandeln. Die Frage ist für die höhere Schule eine andere als für die Volksschule; hier kann die Beachtung des späteren arithmetischen Unterrichtes ausschlaggebend sein.

Darüber wird man überall einig sein, daß schon in Sexta die richtigen Benennungen eingeführt und eingeübt werden müssen, damit sie dem Schüler in Fleisch und Blut übergehen. Man soll also die Ausdrücke Addition, addieren, Subtraktion, subtrahieren gebrauchen, nur gelegentlich die Verdeutschungen wie Zusammenzählen, Abziehen u. dgl. erwähnen, da sie der Mathematiker später doch vermeidet. Um nur ein Beispiel zu nennen: Wo es sich um eine Differenz handelt, benutze man nicht das mehrdeutige Wort Unterschied, wie es so überaus häufig hier und noch später in eingekleideten Gleichungen geschieht. Ich weiß wohl, daß dieser Rat manchem Fremdwortfeind wenig behagen wird. Gibt es doch Lehrer, denen das plus und minus in der Sexta schon zu „gelehrt" ist. Ich möchte aber schon hier davor warnen, daß sich eine Schule oder gar bloß ein Lehrer für den Unterricht seine eigenen deutschen Fachausdrücke zurechtlegt. Ein bei ihm vorgebildeter Schüler wird später die größten Schwierigkeiten haben, die in der Mathematik üblichen Fachausdrücke zu verstehen. Die Bezeichnungen: Summand, Summe, Minuendus, Subtrahendus usw. muß der Schüler also schon von Sexta an vollkommen beherrschen. Leider muß man sich später im arithmetischen Anfangsunterricht sehr oft damit abmühen, den Schülern das beizubringen, was der Rechenunterricht zu seiner Zeit versäumt hat. Und dann sind die Schwierigkeiten da: eine Fülle von Bezeichnungen stürmt auf den Schüler ein, und formale Dinge versperren neuem Stoff den Weg.

Daß man in der Sexta von vornherein die in der Mathematik üblichen Operationszeichen anwendet, ist selbstverständlich. Man sage also auch „plus" und „minus" und nicht, wie es auf Volksschulen und hin und wieder auch in den Unterklassen von Realanstalten geschieht, „und" und „weniger" oder „mehr" und „weg". $5 - 3 = 2$ heißt nicht „fünf weg drei ist zwei" oder auch „sind zwei", sondern „fünf minus drei gleich zwei".

Hinsichtlich der richtigen Anwendung der Symbole ist besonders auf das Gleichheitszeichen[1] hinzuweisen. Verstöße gegen die Forderung, daß auf beiden Seiten

[1] Mit dieser Frage hat sich eine Reihe von Bemerkungen im 13. Bande (1902) der Ubl beschäftigt: E. Kullrich, Zur Frage der Korrektheit von Gleichsetzungen, S. 30; K. Schreber, Die mathematischen und die naturwissenschaftlichen Zahlen, S. 113; C. Hoffmann u. A. Schülke, Nochmals die Korrektheit von Gleichsetzungen, S. 131 ff.

des Gleichheitszeichens gleichgroße Ausdrücke stehen, sind nicht so selten als man denkt; falschen Schreibungen wie $21 : 3 = 7 + 2 = 9 - 1 = 8$ begegnet man recht häufig im Unterricht, ebenso dem Fehler, mit einem Teile eines Ausdrucks Zwischenrechnungen vorzunehmen, etwa $7\frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 7\frac{3}{4}$.

Schwieriger liegen die Dinge, wenn die Ausdrücke zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens ungefähr gleichgroß sind, wenn mit anderen Worten der eine Ausdruck ein Näherungswert des anderen ist. Man hat dafür neuerdings das Zeichen $\approx$ eingeführt, andere gebrauchen auch das Ähnlichkeitszeichen $\sim$, das aber zu Verwechslungen in solchen Fällen Anlaß geben kann, wo es sich um Näherungswerte von Flächeninhalten handelt. Über diese Schreibweise wird später noch zu sprechen sein; für Sexta kommt sie noch nicht in Betracht.

Soll man in Sexta auch schon Erklärungen der Addition und Subtraktion verlangen? Diese Frage ist gewiß dann zu verneinen, wenn man die Jahre im Auge hat, in denen die Schüler zu allererst von diesen Operationen erfahren, in der untersten Klasse der Grundschule. Anders aber liegt die Sache in der Sexta, und hier ist wieder die Rücksicht auf den späteren arithmetischen Unterricht maßgebend. Es kann gar nichts schaden, wenn der Schüler schon auf dieser Stufe wirklich den Zusammenhang der Addition mit dem Zählen kennen lernt und dem auch Ausdruck zu geben versteht. Ganz gewiß wird man ein Einpauken unverstandener Sätze vermeiden, sich auch vor einer Häufung solcher Regeln hüten — nichts schlimmer, als wenn jemand in der Sexta mit der Definition des Begriffes Größe oder des Begriffes Rechnen anzufangen wünschte — aber die wesentlichen Punkte in der Entwicklung der Rechenverfahren sollen auch jetzt schon durch Sätze markiert werden. Dabei bleibe es dahingestellt, ob man diese Regeln in genauem Wortlaut festlegt und, nachdem sie wirklich verstanden sind, auswendig lernen läßt, oder ob man auf eine wortgetreue Wiedergabe verzichtet und nur eine dem Sinne nach richtige Regel verlangt. Ich habe immer die zweite Methode vorgezogen, weil sie den Schüler zwingt, im Augenblick die Sache, wenn nicht zu durchdenken, so doch zu überdenken. Aber man hört auch die andere Weise loben.

Was die Zahl solcher Sätze — gemeint sind nicht nur Lehrsätze, sondern ebenso auch Erklärungen — anlangt, so soll sie möglichst klein sein. Ich würde mich hier zur Not mit einer Erklärung der Addition und Subtraktion und allenfalls noch mit dem kommutativen Gesetz begnügen.

Wie soll man nun die Schüler von der Richtigkeit der Regeln überzeugen? Das steht ja fest, keinesfalls sind Beweise zu geben. Das übliche Mittel ist das, die Regel mit Beispielen zu belegen. Dazu kommt dann die Veranschaulichung. Als Mittel dazu kann mehr oder weniger, soweit es sich noch um ganze Zahlen handelt, jedes der üblichen Anschauungsmittel für den Rechenunterricht dienen. Ich möchte aber dringend raten, hier jedenfalls auch den Zahlstrahl heranzuziehen. Die Aufgaben $3 + 4 = 7$, $8 - 5 = 3$ usf. sind am Zahlstrahl zu veranschaulichen. Das Vorwärts- und Rückwärtszählen kommt eindringlich zur Anschauung. Es gibt eine sehr schöne mechanische Methode des Addierens und Subtrahierens, die man mit zwei nebeneinander gleitenden Zahlengeraden — Papierstreifen oder Meterstäben — ausführen kann; sie gleicht der später beim logarithmischen Rechenstab benutzten. In der

rechenmethodischen Literatur habe ich sie zuerst in dem Buche von Gerlach[1] angegeben gefunden.

Als Einleitung zur Subtraktion tritt vielfach die „Fragezeichenrechnung" auf. Man begegnet Aufgaben wie $4 + ? = 7$, deren allgemein übliche Wiedergabe mit „Vier plus Wieviel ist sieben?" sprachlich nicht ganz einwandfrei ist. Solche Aufgaben sind ausgezeichnet geeignet, die Subtraktion als Umkehrung der Addition verständlich zu machen. Ich gebe zu bedenken, ob man nicht an Stelle des unschönen Zahlzeichens ? schon in Sexta die Zahl x einführt, also schreibt $4 + x = 7$. Wenn auch diese Bezeichnungsweise dem Schüler erst seltsam vorkommen wird, schließlich ist es für ihn nicht weniger absonderlich, die gesuchte Zahl mit einem Interpunktionszeichen als mit einem Buchstaben zu bezeichnen.[2] Im übrigen wird auch bei diesen Aufgaben die Zahlengerade eine wirksame Hilfe für das Verständnis sein. Solche Aufgaben sind erste Beispiele für Bestimmungsgleichungen. Man soll diesen Begriff ruhig schon in Sexta einführen als etwas, was sich von selbst versteht.[3]

Wenn die Addition und Subtraktion zum Verständnis gebracht ist, so drängt sich die Frage auf, wie ist zu verfahren, wenn beide Rechenoperationen nebeneinander in einer Aufgabe auftreten. Mit anderen Worten, wie soll man sich zur Klammerrechnung stellen. Die Frage, ob in der Volksschule Klammern anzuwenden sind, kann strittig sein, unbedingt aber müssen wir in der Sexta der höheren Schulen eine Einführung in das Rechnen mit Klammern geben. Auch hier wieder ist die Rücksicht auf später maßgebend. Freilich muß man sich darüber klar sein, daß in der Sexta die ganze Klammerrechnung ein weit einfacheres Aussehen hat oder doch haben kann als in der Untertertia. In der Sexta haben wir es immer bloß mit ziffernmäßig gegebenen Größen zu tun — die Anwendung des eben besprochenen x in Klammern würde ich für die Sexta vorerst noch nicht befürworten — in der Untertertia aber haben wir es mit Buchstabengrößen zu tun. In Sexta bedeutet also die Klammer: Das, was in Klammern steht, ist zuerst auszurechnen! Vom sogenannten Auflösen der Klammern kann man, wenn man will, ganz absehen. Es wird also in Sexta im Grunde nur die Bedeutung der Klammer einzuüben sein, die Benutzung der Klammerregeln aber wird nicht notwendig damit verbunden sein.

Eine weitergehende Frage ist die, ob sich nicht doch auch schon die Einübung solcher Klammerregeln in einfachen Fällen für Sexta empfehlen möchte. In Betracht kommen zunächst vier Regeln, die Addition und die Subtraktion von Summen und von Differenzen und ihre Umkehrungen, in Buchstabenzeichen:

---

[1] Vgl. das S. 5 Anm. 1 angegebene Werk.

[2] In amerikanischen Rechenbüchern finde ich die Schreibweise $4 + (\quad) = 7$; wie man das liest, weiß ich nicht. Ich ziehe meinen Vorschlag vor

[3] E. Brenken, Zur Methodik des Rechnens auf der Unterstufe. Lehrproben und Lehrgänge, 115. Heft (1913; 2. Heft), S. 106ff., will auch in anderen Fällen, wo es sich nicht um Gleichungen, sondern um Ausdrücke, z. B. Summen, Differenzen handelt, das Ergebnis durchweg mit x bezeichnen und ausdrücklich hinschreiben. Das erscheint mir recht überflüssig, ja mit Rücksicht auf die Verwechslung der Begriffe Ausdruck und Gleichung, auf die später noch zurückzukommen sein wird, sogar bedenklich. Vergl. dazu O. Utescher, Das Verhältnis des Rechenunterrichts zur Mathematik. ZmnU **46** (1915) S. 424ff.

$$m + (a + b) = m + a + b, \qquad m - (a + b) = m - a - b,$$
$$m + (a - b) = m + a - b, \qquad m - (a - b) = m - a + b.$$

Als notwendig möchte ich nur hinstellen, daß der Schüler mit Klammern zu rechnen weiß in der Art, daß er nacheinander die Klammern für sich ausrechnet. Er wird also bei einer Aufgabe $12 - (4 + 3)$ erst den Wert der Klammer zu 7, dann die Differenz zu 5 bestimmen. Über dieses Minimum der Anforderungen hinaus möchte ich es als wünschenswert ansehen, wenn der Schüler mit der Anwendung jener vier Regeln vertraut ist. Und dazu darf ich dann vielleicht noch als Maximum hinzufügen, daß diese Regeln auch in Worten ausgesprochen werden können. Es ist nicht zu befürchten, daß eine solche Rücksichtnahme auf die Anforderungen des späteren mathematischen Unterrichtes in der Luft schwebt und nur Vorarbeit für ferne Zukunft wäre. Es wird im Gegenteil gleich die wichtigste Anwendung der Klammerregeln auf das Kopfrechnen zu machen sein. $77 + 16$ rechnet man beim Kopfrechnen nach der ersten Klammerregel

$$77 + (10 + 6) = 77 + 10 + 6 = 93,$$

ebenso $77 + 19$ nach der zweiten Klammerregel

$$77 + (20 - 1) = 77 + 20 - 1 = 96,$$

und in ähnlicher Weise bei der Subtraktion

$$77 - 16 = 77 - (10 + 6) = 77 - 10 - 6 = 61$$
$$77 - 19 = 77 - (20 - 1) = 77 - 20 + 1 = 58.$$

Es handelt sich bei solchen Kopfrechenregeln und Vorteilen vielfach um Dinge, die den Schülern schon von der Volksschule her bekannt sind, und die ihnen nun in neuem Lichte erscheinen. Aber auch hier gilt, daß man sich nicht etwa mit der Regel und einem oder zwei Beispielen begnügen soll. Wirkliches Rechnen muß die Hauptsache sein.

Die Ableitung der Regeln wird an der Hand mannigfacher Beispiele geschehen können; man tut gut, wieder den Zahlstrahl heranzuziehen.

Eine Mahnung ist nun aber sehr angebracht, die Warnung vor komplizierten Klammerausdrücken, namentlich vor Schachtelklammern. Es kommt nicht auf eine raffinierte Technik in der Bewältigung von Klammern an, sondern auf einen einfachen Einblick in das Wesen der Sache ohne alle Künsteleien. Das gilt in gleichem Maße von der Veranschaulichung am Zahlstrahl. Wenn, wie ich es gelegentlich gesehen, ein Ausdruck vom Typus $(7 - 4) + (8 - 3)$ mit Hilfe von drei untereinander gebauten Zahlstrahlen veranschaulicht werden soll, so wird, glaube ich, dem Schüler „von alledem so dumm, als ging ihm ein Mühlrad im Kopfe herum". Das ist eine gänzliche Verkennung des Segens geometrischer Veranschaulichung.

Bei der praktischen Ausführung der Addition geht man wohl überall einig. Beim schriftlichen Rechnen stellt man meist die beiden Summanden unter Beachtung des Stellenwertes untereinander und summiert sie dann. In der Praxis kommen nicht selten Abweichungen von dieser Stellung vor; man übe also nicht nur beim Kopfrechnen, sondern auch beim schriftlichen Rechnen den Fall, daß die Zahlen nebeneinander stehen. Manche Rechenbücher nehmen darauf Rücksicht,

daß im Leben recht oft lange Reihen von Zahlen zu addieren sind, und bringen solche über ganze Seiten sich erstreckende Übungen. Da es sich hier in der Tat um eine nicht etwa bloß im geschäftlichen Verkehr, sondern in jedem Haushalt vorkommende Aufgabe handelt, wird es sich empfehlen, darauf Rücksicht zu nehmen. Natürlich ist auch hier vor einer Überspannung zu warnen.

Bei solchen langen Additionen wird man gelegentlich auch auf die Rechenvorteile hinweisen, die dadurch entstehen, daß man passende Zahlen, die nicht zu weit auseinander stehen, außer der Reihe addiert — manche Rechenmethodiker warnen freilich vor dieser Abkürzung, weil sie leicht Fehler nach sich ziehe. Auch die multiplikative Zusammenfassung, etwa der häufig bei Geldsummen auftretenden Fünfen am Schluß, ist zu beachten. Zur Probe auf die Richtigkeit empfiehlt es sich, die Zahlen einmal von oben nach unten, das andere Mal von unten nach oben zu addieren.

Für das Subtrahieren kommen zwei Methoden in Betracht. Die erste, sog. norddeutsche Methode rechnet folgendermaßen: 7 von 13 ist 6, 4 von 11 ist 7, 3 von 3 ist 0, 2 von 5 ist 3. Das ist bereits eine abgekürzte Form. Zunächst wird ausführlicher gerechnet: 7 von 3 geht nicht, borge ich mir 1, 7 von 13 ist 6 usf. Vielleicht sagt man korrekter 13 minus 7 gleich 6, 11 minus 4 gleich 7 usf.

$$\begin{array}{r} 5423 \\ -\ 2347 \\ \hline 3076 \end{array}$$

Übrigens ist man mit dem eben angewandten Ausdruck „Borgen“ nicht überall einverstanden. Wenn jemand etwas borgt, so gehört es sich, daß er es wieder zurückgibt, und das geschieht hier nicht. Ob aber Worte wie „entlehnen, herüberholen, wechseln, auflösen“ besser sind und sich einbürgern werden, erscheint fraglich. Auch der Vorschlag ist gemacht worden, statt die nächste Stelle des Minuenden um 1 zu erniedrigen, die entsprechende Stelle des Subtrahenden um 1 zu erhöhen.

Die zweite Methode wird als österreichische oder süddeutsche bezeichnet. Es handelt sich hier um eine um 1850 in Österreich auftretende, jetzt in Deutschland und in anderen Ländern weit verbreitete Methode, die sich in ihrem Wesen mit einer älteren, schon im 16. Jahrhundert in Deutschland heimischen Methode deckt. Auch im täglichen Leben findet sie Anwendung: der Kaufmann pflegt nach ihr zu rechnen, wenn er Geld herausgibt. Man hat zwar gesagt, das Beispiel des Kaufmannes könne deswegen nicht herangezogen werden, weil er immer auf ein rundes Geldstück herausgebe, weil es sich also um ein Verfahren ähnlich der Zehnerergänzung handele. Man kann aber zuweilen beobachten, daß der Kaufmann, wenn er aus irgendeinem Grunde auf eine nicht abgerundete Summe herausgibt — etwa auf einen nicht über eine runde Summe ausgestellten Scheck — auch hinaufaddiert.

Die Aufgabe, die wir oben anführten, wird in österreichischer Methode so gesprochen: 7 plus **6** gleich 13, 4, 5 plus **7** gleich 12, 3, 4 plus **0** gleich 4, 2 plus **3** gleich 5. Die fetten Ziffern sind zu betonen und jeweilig hinzuschreiben. Diese Art zu rechnen hat den schwerwiegenden Nachteil, daß die hinzuschreibende Zahl nicht die letzte und deshalb auch nicht die am längsten in der Erinnerung haftende Zahl ist. Deswegen ist von anderer Seite die Sprechart vorgeschlagen worden: 7 bis 13 ist 6 usf.

Ein Vorteil der österreichischen Subtraktionsmethode ist der, daß man ohne weiteres von einer Zahl mehrere Zahlen subtrahieren kann. Es kommen, um die Be-

deutung dieser Tatsache gleich an einem Beispiel aus höheren Klassen zu zeigen, sehr oft logarithmische Berechnungen von Ausdrücken der Form $\frac{a}{b \cdot c}$ vor. Da rechnet man dann im nebenstehenden Beispiel 8 plus 5 gleich 13, bis 17 ist **4**, 1 plus 3 plus 6 gleich 10, bis 15 ist **5** usf.

3,82457
— 1,49365
— 1,95438
0,37654

Welche der beiden Rechenarten verdient den Vorzug? Man könnte versuchen, die Entscheidung mit Hilfe des psychologischen Experimentes herbeizuführen, wobei zu trennen wäre die Frage des Erklärens und Einübens der Methoden von ihrer mechanischen Anwendung. Und in der Tat, hier ist eine ganz konkrete Frage, an deren einwandfreier Beantwortung sich die Psychologie versuchen möge. Bisher liegen solche Experimente noch nicht vor; was in der Form von Wettrechnen unter Schülern in der Hinsicht versucht wurde, ist nicht einwandfrei[1].

Eine Entscheidung durch eine Art allgemeiner Abstimmung dürfte nicht stichhaltig sein. Darin kann man vielleicht einen Wegweiser sehen, daß die Zahl derer, die von der norddeutschen Methode in den letzten Jahren zur österreichischen übergegangen sind, ungleich größer sein wird als die Zahl derer, die den umgekehrten Weg gegangen sind. In der Literatur ist wenigstens ein für das Zurückgreifen auf die norddeutsche Methode plädierender Aufsatz meines Wissens nicht veröffentlicht worden; alle Artikel für die norddeutsche Methode scheinen von solchen geschrieben, die an Gewohntem festhalten wollen.

Dringend ist eine Entscheidung jedenfalls. Man darf nicht dem Schüler zumuten, daß er womöglich noch in mittleren Klassen umlerne. Es wäre ein wenig ökonomisches Verfahren, in Sexta die norddeutsche, und dann etwa in Quarta die österreichische Methode einzuüben. Andererseits ist nichts fürchterlicher, als wenn später beide Methoden nebeneinander in einer Klasse, z. B. beim Rechnen an der Tafel, in die Erscheinung treten. Daher ist es unumgängliche Pflicht, daß mindestens an den einzelnen Anstalten die Sache eindeutig festgelegt wird. Wünschenswert wäre darüber hinaus eine Festlegung in größeren Bezirken, damit bei Umschulungen nicht Schwierigkeiten entstehen. Das beste wäre eine einheitliche Regelung für ganz Deutschland. Der Deutsche Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, der vom preußischen Ministerium um ein Gutachten in dieser Frage angegangen war, hat sich nach Prüfung der Gründe für die österreichische Methode ausgesprochen.[2]

Schließlich noch ein Wort über die Form der Aufgaben. Neben den unmittelbar mit den üblichen Symbolen hingeschriebenen Aufgaben, die ja für die Einübung des Rechnens die Hauptsache sind, sollte man von Anfang an auch Aufgaben in eingekleideter Form — wie der wenig schöne Ausdruck heißt — stellen. Nicht nur,

[1] Meine in der ersten Auflage gegebene Anregung, die Frage experimentell-psychologisch zu entscheiden, hat zu Ergebnissen noch nicht geführt. Besprechungen, die in Göttingen einen Versuch anbahnen sollten, haben die Schwierigkeiten stark hervortreten lassen. Verschiedene Umstände bewirkten, daß es zur Inangriffnahme der Versuche nicht kam.

[2] Das Gutachten ist abgedruckt in den Schriften des DAMNU I, 8: W. Lietzmann, Bericht über die Tätigkeit des DAMNU im Jahre 1913, Leipzig (Teubner) 1914. Siehe auch: A. Gutzmer, Die Tätigkeit des DAMNU in den Jahren 1908 bis 1913. Ebenda 1914.

daß man immer auch benannte Zahlen heranziehen und dabei Aufgaben des praktischen Lebens bringen sollte — eine Angelegenheit, die gleich noch zur Sprache kommen wird — man sollte auch nicht versäumen, Fragen zu stellen, in denen von der Benutzung der Symbole abgesehen wird und dafür die üblichen Benennungen der Größen angewandt werden. Ich meine Aufgaben wie: „Subtrahiere von 200 die Differenz der Zahlen 176 und 113" u. dgl. Besonders wichtig erscheint mir das Stellen solcher Aufgaben, die die Volksschuldidaktik als algebraische bezeichnet, z. B.: „Welche Zahl muß man zu 16 addieren, damit 31 herauskommt". Wie ich schon oben sagte, bringt man solche Sätze am besten erst in die Form $16 + x = 31$ und läßt dann den Schüler (ohne die üblichen algebraischen Operationen) finden, daß $x = 15$ ist.

5. Multiplikation und Division ganzer Zahlen.

Die übliche Definition der Multiplikation verknüpft sie mit der Addition: Das Multiplizieren wird als Abkürzung des Addierens gleicher Summanden eingeführt. Die Division wird man als Umkehrung der Multiplikation jedenfalls dann definieren, wenn man auch schon bei den Rechenoperationen erster Stufe die Umkehrung einer Rechenart benutzt hat. Andere definieren die Division als wiederholte Subtraktion. Diese letztere Definition hat manches für sich. Man entgeht so der Schwierigkeit, die aus dem Nebeneinander der Division mit und ohne Rest entsteht. Wie die Subtraktionsaufgabe $5 - 7$ im Bereiche der ganzen positiven Zahlen nicht lösbar ist, so auch nicht die als Umkehrung der Multiplikation erklärte Division $11 : 5$. Will man diese Aufgabe lösen, so muß man eben vorher die Brüche einführen, worauf man in Sexta verzichtet. Anders wenn man die Division als wiederholte Subtraktion auffaßt. Dann heißt es eben: Das Ergebnis ist 2 Rest 1.

Man hat aber noch andere Schwierigkeiten bei der Division gefunden. Die Additionsaufgabe $a + b = c$ hat zwei Umkehrungen, die aber beide auf die gleiche Rechenoperation führen. Grund: Das kommutative Gesetz. Ebenso hat die Multiplikationsaufgabe $a \cdot b = c$ zwei Umkehrungen, die wieder auf die gleiche Rechenoperation führen. Grund: Wieder das kommutative Gesetz. So weit ist alles klar. Lasse ich nun aber auch benannte Zahlen zu, so hat zunächst bei unserer Definition der Multiplikation nur der Fall Existenzberechtigung, bei dem der Multiplikator eine unbenannte Zahl ist. Es gibt also Aufgaben der Form

$$7 \text{ cm} \cdot 5 = 35 \text{ cm}, \tag{1}$$

dagegen haben Aufgaben der Form

$$7 \cdot 5 \text{ cm} = ? \quad \text{und} \quad 7 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = ?$$

keinen Sinn, denn ich kann weder die reine noch die benannte Zahl mit 5 cm multiplizieren; das hieße, sie 5 cm mal als Summand setzen. Es fällt ja auch niemandem ein, bei der Potenz eine benannte Zahl als Exponenten zuzulassen. Wenn die zuletzt genannte Aufgabe doch nicht ohne eine sogar sehr wichtige Bedeutung ist, so kann das auf dieser Klassenstufe ganz außer acht bleiben; das kommt erst viel später bei den Dimensionsbetrachtungen zur Geltung, meist auch wohl nicht im mathematischen, sondern im physikalischen Unterricht. Es bleibt also für den Rechenunter-

richt nur der Fall übrig, daß zu einer benannten Zahl als Multiplikand eine unbenannte Zahl als Multiplikator tritt. Ein solches Multiplikationsexempel (1) hat nun in der Tat zwei Umkehrungen. Bei dieser Erweiterung der Multiplikation auf benannte Zahlen gilt ja nicht mehr das kommutative Gesetz, einfach deshalb, weil 7 · 5 cm gar nicht definiert ist. Die beiden Umkehrungen, die möglich sind, lauten:

35 cm geteilt durch 5 ist 7 cm,
7 cm ist in 35 cm 5 mal enthalten.

Ich habe beide Umkehrungen ausführlich in Worten, nicht in Symbolen hingeschrieben. Denn nun verquickt sich die Frage noch mit der nach der Bedeutung der Symbole. Halten wir zunächst als Ergebnis fest: Als Umkehrung der Multiplikation reiner Zahlen erhält man eine einzige Rechenoperation, als Umkehrung der Multiplikation benannter Zahlen erhält man zwei. Man muß, mit anderen Worten, bei der Division benannter Zahlen zwei Fälle unterscheiden, das Teilen und das Messen oder Enthaltensein.

Dieser Feststellung stimmen nicht alle Schulmänner zu. Zunächst kann man die Einwendung machen: auch bei der Multiplikation benannter Zahlen handele es sich nur um eine Umkehrung. Die Rechenoperation als solche bezieht sich nämlich lediglich auf die in den Ausdrücken auftretenden reinen Zahlen, die zugesetzten Benennungen sind der reinen Mathematik fremd. Diese Meinung hat einen richtigen Kern, insofern ja in der Tat zur Bewältigung beider Umkehrungen nicht eigentlich zwei verschiedenartig gestaltete Rechenmethoden nötig sind — so etwa wie bei der Radizierung und Logarithmierung.

Die andere Ansicht wendet sich gegen den ersten Teil unserer Behauptung, sie macht geltend, daß auch bei der Multiplikation reiner Zahlen zwei Rechenoperationen vorliegen. Sie unterscheidet die beiden Fragen: „Wie oft ist 5 in 20 enthalten" und „20 geteilt durch 5". Ich halte diese Auffassung, die die Unterscheidung von Teilen und Enthaltensein auch auf reine Zahlen überträgt, für falsch. Sie wird nur dadurch plausibel gemacht, daß man je nachdem beide Zahlen oder eine der Zahlen willkürlich doch zu benannten macht und sagt: Wir unterscheiden die Frage: Wie oft sind 5 Einer in 20 Einern enthalten — Antwort: 4mal; und andererseits: Was gibt es, wenn ich 20 Einer in 5 Teile teile? — Antwort: 4 Einer. Man möchte eben bei dieser Auffassung die Inkongruenz zwischen dem Rechnen mit reinen und benannten Zahlen vermeiden.

Ich halte es für berechtigt, wenn auch für unnötig, beim Rechnen mit benannten Zahlen für die beiden Umkehrungen verschiedene Symbole einzuführen. Das Operationssymbol für das Teilen ist der bekannte Doppelpunkt. Für das Enthaltensein wird hingegen zuweilen das Zeichen ÷ angewandt. Andere schreiben auch für das Teilen *g t* (lies „geteilt durch"), für das Enthaltensein (Messen) *g m* (lies „gemessen durch"). Schließlich ist auch die Schreibweise sehr häufig: 4 in 12 = 3 mal. Wenn durchaus ein besonderes Zeichen gewünscht wird, so nehme man das an erster Stelle genannte.

Für „mal" wird auch das in Volksschulen noch recht übliche Multiplikationssymbol ×, ein Andreaskreuz, angewandt, das von Oughtred stammt[1]. Die höhere

[1] Vgl. H. Wieleitner, Zur Erfindung des Zeichens ×, ZmnU **51** (1920) S. 145ff.

Schule wird den in der Mathematik gebräuchlichen Punkt in halber Zeilenhöhe benutzen müssen. Es ist nicht einzusehen, warum nicht auch die Volksschule dieses Symbol annimmt. Daß der Kaufmann den Punkt auf der Zeile, der Österreicher den Punkt in halber Zeilenhöhe als Dezimalzeichen benutzt, kann in keiner Weise bestimmend für die deutsche Schule sein.

Zur Schreibweise der Operationen gehört auch die Reihenfolge der in der Aufgabe auftretenden Größen. Die Frage ist bei der Multiplikation reiner Zahlen theoretisch nicht wichtig, weil ja das kommutative Gesetz gilt und damit die Gleichberechtigung zwischen Multiplikator und Multiplikandus: beides sind eben Faktoren. Praktisch spielt der Streit eine Rolle schon bei der schriftlichen Multiplikation ganzer und dezimaler Zahlen und dann erst recht bei der Multiplikation benannter Zahlen und bei der Division reiner oder benannter Zahlen.

Es ist sehr viel darüber gestritten worden, ob man $28 \cdot 215\ \mathcal{M}$ schreiben soll oder $215\ \mathcal{M} \cdot 28$. Die erste Schreibweise überwiegt in den Volksschulen, die zweite in den höheren Schulen. Ich ziehe die zweite vor.

Bedenklich wird die Sache nun aber bei der Division. Hier gilt das kommutative Gesetz nicht mehr, mithin ist die Reihenfolge wesentlich. Es ist ein Unterschied zwischen 12 : 6 und 6 : 12. Leider wurde aber früher vielfach der Doppelpunkt mit „in" übertragen, so daß also womöglich 12 : 6 der eine: „12 geteilt durch 6", ein anderer „6 in 12" las. Nach meiner Ansicht sollte die „Inrechnung" bei reinen Zahlen gänzlich verschwinden. Jedenfalls sollte man aber den Doppelpunkt als Symbol für „In" grundsätzlich verbieten. Erfreulicherweise begegnet man heute der Schreibweise nur noch in ganz alten Büchern.

Beim Doppelpunkt als Operationssymbol stoßen wir auch zum ersten Male auf eine Schwierigkeit, die nachher beim Komma wiederkehrt: Beide finden im mathematischen Text gleichzeitig auch als Interpunktionszeichen Verwendung. Diese Doppeldeutigkeit gebietet der Schule, von vornherein in rechnerischen Darstellungen auf eine reinliche Scheidung der Rechnung vom begleitenden Text zu dringen.

Was bisher gesagt worden ist, bezog sich lediglich auf die begrifflichen Grundlagen. Nun entsteht aber wieder die Frage nach der didaktischen Behandlung der Dinge.

Inwieweit der Schüler angehalten werden wird, die Grundlagen in Worten auszusprechen, wie weit man Erklärungen und Regeln „lernen" läßt, diese Frage ist wieder wie vorhin bei der Addition und Subtraktion zu beantworten, also nicht eindeutig, sondern je nach dem Schüler und Lehrer. Wie aber die Regeln oder doch ihren Inhalt erklären?

Für die begriffliche Auffassung wird es genügen, wenn man die bei den Schülern aus früheren Klassen vorhandene Kenntnis der Sachlage durch geometrische Veranschaulichung ergänzt. Man kann da zunächst wieder am Zahlstrahl die Aufgaben $3 \cdot 4$ oder 9 : 3 darstellen. Man wird sich aber nicht verhehlen, daß diese Art der Veranschaulichung, so deutlich auch bei ihr die Zurückführung auf die Rechenoperationen 1. Stufe in die Erscheinung tritt, durchaus nicht die tiefere Bedeutung der Rechenoperationen 2. Stufe erkennen läßt. Hier ist eigentlich die Multiplikation nichts anderes als auch ein Weiterzählen nur mit geändertem Maßstabe; man hat in der Tat so das Wesen der Multiplikation gekennzeichnet, ohne, wie ich meine, da-

mit den Kern zu treffen. Ich empfehle demgegenüber schon hier eine Veranschaulichung durch Flächen. Wenn man beim Zahlstrahl einmal das Produkt $3 \cdot 4$, dann das Produkt $4 \cdot 3$ bildet, so ist es gewiß für den Schüler überraschend, daß beide Male der gleiche Endpunkt erreicht wird. Die Zahlen drei und vier treten ja gar nicht gleichartig bei dem ganzen Prozeß auf. Das eine sind Einheiten auf dem Zahlstrahl, das andere ist eine reine Zahl. Ganz anders, wenn wir Flächen oder zweidimensional angeordnete Punktmengen zur Veranschaulichung verwenden. Man hege keine falschen Befürchtungen, daß die Flächenlehre für die Sexta verfrüht sei. Jeder Sextaner wird sofort das kommutative Gesetz als vollkommen plausibel ansprechen, wenn man ihm sagt, daß man die Fig. 6 und 7 einmal als Reihen von oben nach unten, zum andern als Reihen von rechts nach links ansehen kann. Man kann etwa die Jungen sich in 5 Reihen zu 7 aufstellen und sie nachher rechtsum machen lassen. Dann stehen sie in 7 Reihen zu je 5. Natürlich sind es jetzt ebensoviel wie vorher.

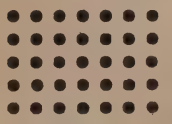


Fig. 6.
Zur Erläuterung des kommutativen Gesetzes
$7 \cdot 5 = 5 \cdot 7$.

Das kommutative Gesetz, das so als das wichtigste hier herausgehoben ist, kann nun vielleicht auch den ersten Anlaß dazu geben, Buchstabengrößen einzuführen. Ich glaube, daß der Schüler ganz froh ist, wenn er als kurze Form des kommutativen Gesetzes die Formel $a \cdot b = b \cdot a$ kennen lernt. Warum man Buchstaben an Stelle der Zahlen einführt und was sie bezwecken, wird ihm hier recht klar: eine Zusammenfassung vieler Einzelfälle in eine kurze Formel. Man wird dann natürlich nicht verfehlen, auch das kommutative Gesetz der Addition nachträglich noch in eine Formel zu kleiden.

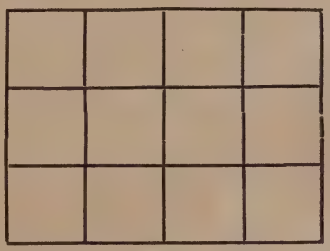


Fig. 7.
Zur Erläuterung des kommutativen Gesetzes
$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$.

Im Mittelpunkt der Übungen in den Rechenoperationen zweiter Stufe steht das Einmaleins; bei allen Multiplikations- und Divisionsaufgaben, mündlichen wie schriftlichen, wird es immer wieder angewandt. Wir brauchen uns nicht mit der sehr wichtigen und durchaus nicht ganz einfach zu beantwortenden Frage zu beschäftigen, wie man mit den Schülern das kleine Einmaleins einübt, in welcher Reihenfolge man vor allem dabei vorgeht. Es liegt über diese, die vorbereitenden Klassen angehende Frage eine weitschichtige, aber keineswegs abschließende Literatur vor.[1]

Gewiß muß auch in der Sexta immer und immer wieder das Einmaleins geübt werden, wenn es ausreicht, immanent, wenn anders es aber nötig ist, auch für sich — und dann scheue man sich nicht, einmal ausnahmsweise regelrecht zu pauken.

Wie steht es nun aber mit dem sogenannten großen Einmaleins, also den ersten 10 Vielfachen von 11 bis 20, allenfalls auch noch bis 25? Da man es beim schriftlichen Multiplizieren und Dividieren nicht unbedingt braucht, bin ich kein be-

[1] Vgl. W. Lietzmann, Rechenbericht (s. S. 5 Anm. 1), S. 55. Außer der dort angegebenen Literatur beachte noch M. Döring, Zur Psychologie des kleinen Einmaleins. Zeitschrift für pädagogische Psychologie und experimentelle Pädagogik, 13 (1912), S. 163ff.

sonders energischer Verfechter des großen Einmaleins in der Sexta. Es wird viel Zeit vertan mit einer wirklich bis zur mechanischen Beherrschung getriebenen Einübung. Und meist „sitzt" das große Einmaleins später doch nicht — weil es eben nicht, wie das kleine, dauernd angewandt wird. Man beschränke sich also auf die Fälle, in denen das Gedächtnis am wenigsten angestrengt wird und die gleichzeitig noch am häufigsten vorkommen, die Reihen der 11, 12, 15, 20, 25, vielleicht noch 24. Etwas anderes ist es mit der Behandlung von Aufgaben aus dem großen Einmaleins im Kopfrechnen. Bei der im Kopfe auszuführenden Multiplikation zweistelliger Zahlen sollte man Aufgaben aus dem Bereich des großen Einmaleins bevorzugen. Nur von einem mechanischen Auswendiglernen der Reihen möchte ich abraten.

Der Verwendung von Einmaleinstafeln wird wohl gelegentlich das Wort geredet; ich finde sie in Sexta und in allen späteren Klassen durchaus entbehrlich — etwas anderes sind solche Tafeln im praktischen Leben, etwa als Lohntafeln. Den Schülern ist mit den häufig in den Heften für die häuslichen Arbeiten, in den Schülerkalendern u. dgl. angebrachten Einmaleinstafeln recht wenig gedient, jedenfalls dann nicht, wenn sie bei jeder kleinen Gelegenheit Hilfe bei der Tafel suchen, statt ihr Gedächtnis oder ihre Rechenfertigkeit zu Rate zu ziehen.

Eine weitere Vorbedingung für das schriftliche Multiplizieren und Dividieren ist neben dem kleinen Einmaleins das Rechnen mit Systemzahlen. Wie multipliziert man Einer, Zehner, Hunderter mit Einern, Zehnern und Hundertern? Wie tut man das gleiche bei der Division? Ich habe den Eindruck, als ob diese für alles Rechnen außerordentlich wichtigen Übungen zuweilen vernachlässigt werden.

Dazu kommt dann schließlich noch das Problem, eine Summe mit einer anderen zu multiplizieren. Was hier im Grunde gebraucht wird, ist nichts anderes als das Klammerrechnen, und zwar die Fälle $(a + b) \cdot c$ ebenso wie die allgemeineren Fälle $(a + b) \cdot (c + d)$. Damit erweist es sich als wünschenswert, will anders man die Dinge gründlich betreiben, die eben genannten Klammerregeln, natürlich nicht für Buchstabenzahlen, wohl aber für ziffernmäßig gegebene Zahlen, durchzunehmen. Beschränkung auf wirklich brauchbare Fälle ist auch hier wieder geboten. Die Ableitung der Klammerregeln kann vielleicht geometrisch erläutert werden, und zwar durch Punktrechtecke besser als am Zahlstrahl.

Gute Anwendungen wird die Klammerregel beim Kopfrechnen finden. Die Schüler benutzen ja diese Rechenweise schon, wenn sie in der Aufgabe $42 \cdot 7$ erst $40 \cdot 7$ rechnen, dann $2 \cdot 7$ und beides addieren. Es gibt aber auch zahlreiche Rechenvorteile bei der Multiplikation zweistelliger Zahlen, die sich hier bei guten Klassen anschließen lassen. Ganz einfach sind Rechenverfahren wie $39 \cdot 5 = (40 - 1) \cdot 5$. Andere Vorteile sind etwas komplizierter[1]; ich nenne nur zwei Beispiele für die Multiplikation zweistelliger Zahlen. Wenn beide Zahlen gleiche Zehner und zu 10 sich ergänzende Einer haben, so hat man

$$(10a + b)\ (10a + 10 - b) = a\,(a + 1)\ 10^2 + b\,(10 - b),$$

[1] Auf Rechenvorteile weist die Mehrzahl der Rechenmethodiken hin. Eine knappe Zusammenstellung gibt Fr. Rogel, Das Rechnen mit Vorteil, Leipzig, Teubner, 1905. Daneben nenne ich ein stoffreiches, allerdings in der Schreibweise nicht vorbildliches Buch: J. Bojko, Lehrbuch der Rechenvorteile. Schnellrechnen und Rechenkunst (Aus Natur und Geisteswelt 739). Leipzig, Teubner, 1920.

also z. B. $23 \cdot 27 = 20 \cdot 30 + 3 \cdot 7$. Die Multiplikation zweier Zahlen mit gleichen Ziffern, aber umgekehrter Ziffernfolge erleichtert die Regel:

$$(10a + b)(10b + a) = 101\ ab + 10(a^2 + b^2),$$

also z. B. $17 \cdot 71 = 7 \cdot 101 + 10 \cdot 50$.

Sicherlich wird die Schüler eine bei manchen Völkern ausgebildete mechanische Rechenmethode höchlichst interessieren: Bei den Kurden in Persien, in der Walachei, nach manchen Angaben auch beim gemeinen Volk in Italien, Spanien und Südfrankreich, ist ein Fingerrechnen gebräuchlich, das die Multiplikation von Zahlen zwischen 5 und 10 auf eine solche von Zahlen kleiner als 5 reduziert. Ist etwa $6 \cdot 8$ zu bilden, so strecken sie an jeder Hand so viel Finger aus, als der Überschuß der Faktoren über 5 beträgt, hier also an der einen Hand einen, an der anderen drei Finger. Die Summe der erhobenen Finger gibt die Zehner (hier also $3 + 1 = 4$), das Produkt der nicht erhobenen Finger (hier also $4 \cdot 2 = 8$) liefert die Einer. Diese Regel kann schon in Sexta, wenn auch natürlich nicht in allgemeinen Zahlen, als richtig erwiesen werden.

Bei dieser Gelegenheit noch eine andere Bemerkung über die Vereinigung verschiedener Rechenoperationen in einem Ausdruck. Bei der Vereinigung von Multiplikation und Division entstehen keine besonderen Schwierigkeiten. Andererseits ist die Sache doch wichtig, da sie Anlaß zu manchen Rechenvorteilen gibt. Hierher gehört z. B., daß man bei Multiplikationen mit 5, 25, 125, mit 10, 100, 1000 multipliziert, nachdem man vorher den zweiten, vierten, achten Teil genommen hat. Ähnlich verfährt man bei Multiplikationen mit 75, 375 usf. und auch bei Divisionen. Solche Aufgaben sind gute Kopfrechenübungen.

Doch nun zurück zu dem Multiplizieren größerer Zahlen. Wenn die drei von uns angegebenen Vorbedingungen, das kleine Einmaleins, die Multiplikation und Division von Systemzahlen und die Multiplikation und Division von Summen von den Schülern wirklich erfaßt sind, wird auch eine genügende Erklärung der bei der schriftlichen Multiplikation und Division eingeschlagenen Methoden möglich sein. Eine solche gründliche Erklärung ist notwendig. Es ist eine bekannte Tatsache, daß gerade hier in der Vorbildung der Schüler große, manchmal nie ausgefüllte Lücken häufig sind.

Was das bei der Multiplikation benutzte Rechenschema[1] anlangt, so bleibt, wenn man sich über die Reihenfolge von Multiplikator und Multiplikand geeinigt hat, eigentlich nur eines strittig, wie man nämlich die Teilsummen untereinander setzt. Man kann zunächst nach Schema I schreiben:

Schema I.	Schema IIa.	Schema IIb.
$317 \cdot 28$	$317 \cdot 28$	$317 \cdot 28$
2536	634	634
634	2536	2536
8876	8876	8876

[1] Eine ausführliche Begründung des hier vertretenen Standpunktes findet man in W. Dieck, Mathematische Forderungen und Förderungen für den Rechenunterricht, Pädagogische Blätter 49 (1920) S. 205 ff.; abgedruckt in W. Dieck, Mathematisches Lesebuch, 1. Bd., Sterkrade (Osterkamp) 1920.

wobei nach links eingerückt, d. h. mit den Einern zuerst ausmultipliziert wird. Man kann aber auch Schema IIa oder IIb benutzen, wobei hier die Multiplikation mit der höchsten Stelle begonnen ist. Ich habe zwei Schemata (a und b) angegeben, auch bei Schema I hätte das gleiche geschehen können: die Teilsummen sind, ihrem Stellenwerte entsprechend, einmal unter den Multiplikandus, das andere Mal unter den Multiplikator gesetzt.

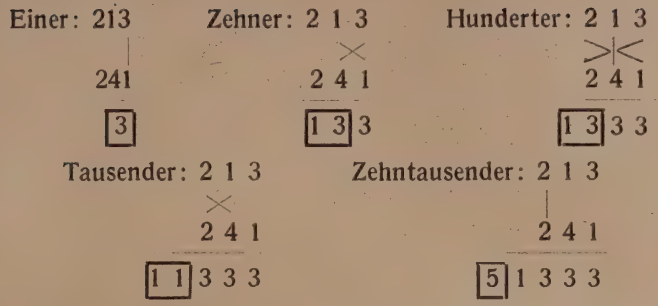
Man sieht häufig noch die Form I; sie ist beliebt, weil man hier unmittelbar die Stellenwerte der Teilprodukte durch geeignete Anordnung unter dem Multiplikandus andeuten kann. Die Formen II des Einrückens zeigen, wie man den Vorteil auch hier haben kann, wenn auch erst eine Überlegung nötig ist, wohin die erste Ziffer zu schreiben ist. Aus anderen Gründen aber scheint mir diese zweite Methode den Vorzug zu verdienen. Wenn man nämlich in höheren Klassen die abgekürzte Rechnung betreibt — wir werden noch an späterer Stelle zu dieser Forderung Stellung zu nehmen haben — so versagt die erste Methode; die Schüler müßten also von dem Zeitpunkt an, wo man die abgekürzte Dezimalbruchrechnung einführt, umlernen; das ist kein ökonomisches Verfahren. Noch einen anderen Vorzug hat diese Wahl, wenn er auch nur äußerlicher Art ist. Der Schüler nimmt in seinem Heft auf das Rechenschema, das sich erst entwickeln soll, vielfach mit dem Platz nicht genügend Rücksicht. Beim Ausrücken nach links kommt er dann bei längeren Aufgaben leicht mit dem Heftrand in Konflikt.

Ob man sich bei dem Schema II für die Schreibart a oder b entscheidet, bleibe dem einzelnen Lehrer überlassen; b nutzt bei größeren Zahlen besser den Raum aus als a. Der Deutsche Ausschuß hat sich deshalb dort, wo er sich über die abgekürzte Multiplikation der Dezimalbrüche äußert, für die Schreibart b entschieden.

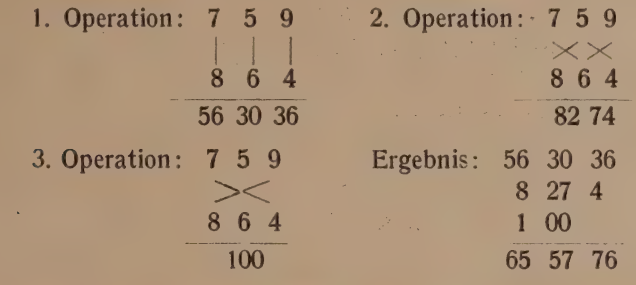
Übrigens empfiehlt es sich, zuweilen von dem eingeübten Schema des Einrückens abzuweichen. Wenn z. B. eine 1 im Multiplikator auftritt, kann man die oben als Multiplikand geschriebene Zahl als Teilsumme auffassen, die bei einem Multiplikator 418 in der Mitte steht. Die Frage, welchen Faktor man als Multiplikator nimmt, ist nicht zweifelhaft; selbstverständlich wählt man den „einfacheren", also den kleineren oder bei gleicher Ziffernzahl den mit den „einfachsten Ziffern".

Unter Umständen sind einige andere Arten des Multiplizierens[1] von praktischer Bedeutung, alle verwandt mit der multiplicatio per crocetta, wie sie bei Lucas de Burgo heißt; heute wird sie zuweilen die Blitzmethode genannt. In $43 \cdot 57$ rechnet man erst die Einer aus — es sind ihrer 21 — dann durch kreuzweise Multiplikation und Addition die Zehner — also $3 \cdot 5 + 4 \cdot 7$, wozu von eben noch 2 kommt, insgesamt 45 — schließlich die Hunderter, also durch Multiplikation der Zehner 20 und von eben noch 4 dazu, zusammen 24. Das Ergebnis ist 2451. Bei dreiziffrigen Zahlen gibt das folgende Schema die Erläuterung:

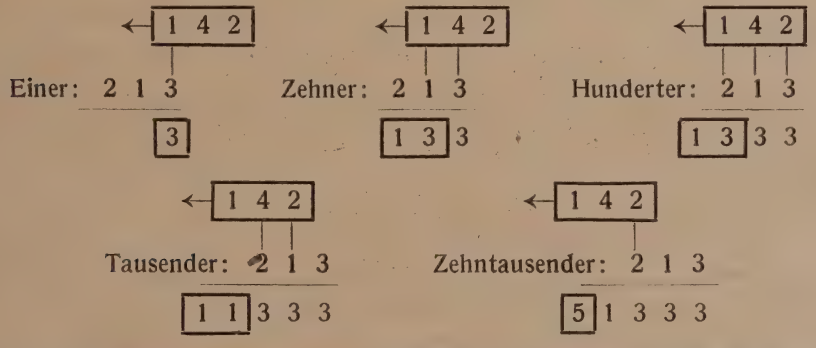
[1] Ich nenne als Literaturwegweiser über andere Multiplikations- und Divisionsarten den Enzyklopädieartikel über numerisches Rechnen von Mehmke (Deutsche Ausg., I. Bd., 2. Teil) und d'Ocagne (Französ. Ausg., Tome I, vol. 4), außerdem J. Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Leipzig (Teubner) 1900, P. Werkmeister, Praktisches Zahlenrechnen (Sammlung Göschen 405) Berlin, Verein. wiss. Verleg., 1921. Von Rechenmaschinen wird später ein Wort zu sagen sein.



Bei größeren Ziffern, als sie hier der Deutlichkeit halber gewählt wurden, ist das Multiplizieren und Addieren im Kopf vielleicht zu schwierig. Ich führe deshalb eine andere Anordnung[1] bei größeren Ziffern an:



Nur eine andere Form der multiplicatio per crocetta ist die Schiebzettelmethode. Man schreibt den zweiten Faktor in umgekehrter Ziffernfolge auf einen kleinen Zettel und multipliziert, wie es hier angedeutet wird:



Das in Deutschland[2] gebräuchliche Schema des Dividierens ist das Untersichdividieren. Schema I zeigt ein Beispiel in ausführlicher norddeutscher Methode. Man lasse beim Herunterziehen der Zahlen zuerst immer ihre Benennung mit angeben, in unserem Beispiel also „8 Zehner herunter", später „4 Einer".

[1] B. Schmitz, Das neue Multiplikationsverfahren. Leipzig, Johannes Adler, o. J. (1917).
[2] Andere Länder haben andere Schemata. Eine Divisionsaufgabe in der Schreibart der angelsächsischen Länder zeigt Schema III.

Schema I.	Schema II.	Schema III.
2784 : 12 = 232	2784 : 12 = 232	232
24	38	12) 2784
38	24	24
36	—	38
24		36
24		24
—		24

Man kann dem Schema I nicht ansehen, ob die darin vorkommenden Subtraktionen nach norddeutscher oder österreichischer Weise ausgeführt sind. Wer früher österreichisch subtrahierte, wird es auch hier tun. Man geht nun aber bei der Anwendung dieser Methode noch etwas weiter. Man schreibt die Teilprodukte gar nicht hin (Schema II). Das rechnet man so: 12 ist in 27 2mal enthalten. 2mal 2 gleich 4, bis 7 ist 3; 2mal 1 gleich 2, bis 2 ist 0. 12 ist in 38 3mal enthalten. 3mal 2 gleich 6, bis 8 ist 2 usf.

Ich habe, um den Gang der Handlung zu zeigen, die Rechnung ausführlicher dargestellt, als sie ein Schüler, der das Einmaleins mit der 12 beherrscht, anstellen würde; er würde gleich „am Strich" dividieren, d. h. das Ergebnis wie bei Divisionen durch einziffrige Zahlen schrittweise hinschreiben und die Reste im Kopf behalten. Das Wesentliche bei dem als österreichische Division bezeichneten Verfahren ist also, daß die Teilsummen nicht hingeschrieben, sondern im Entstehen subtrahiert werden — ich habe mich dabei gleich der „bis"-Sprechweise bedient.

Zunächst muß klar gesagt werden, daß keineswegs, wer österreichisch subtrahiert, nun auch österreichisch dividieren müßte. Weiter aber wird man zugeben, daß von dieser Art der Division gilt, was Adam Riese mit dem Worte: „Sie nimpt viel kopffs!" meinte. Man mache sich nur klar, wie lange hier der Schüler die Zehnerübertragungen behalten muß — die Multiplikation wird ja zwischendurch ausgeführt —; ich glaube, daß da eine ergiebige Quelle von Rechenfehlern liegt. So bin ich der Überzeugung, daß die durch das Sparen von Ziffern erreichte Fixigkeit, um mit Fritz Reuter zu sprechen, auf Kosten der Richtigkeit geschieht.[1] Ich stimme also hier durchaus einem Gutachten des Deutschen Ausschusses zu, der den Vorschlag macht, die österreichische Division bei mehrstelligem Divisor zu verbieten.

Über die Aufgaben, die der Einübung des Multiplizierens und Dividierens dienen, kann wiederholt werden, was oben über das Addieren und Subtrahieren gesagt wurde. Man bringe insbesondere auch Aufgaben, in denen die Ausdrücke Produkt, Divisor, Quotient usf. vorkommen. Man stelle ab und zu auch die Forderung, eine ziffernmäßig, etwa unter Verwendung von Klammern hingeschriebene Aufgabe

[1] Herr Witting schreibt mir, daß er seit längerer Zeit Untersuchungen bei solchen Schülern angestellt hat, die österreichisch dividieren: sie brauchen im allgemeinen mehr Zeit als diejenigen, die norddeutsch dividieren. Alle aber sagen, daß das österreichische Dividieren mehr anstrengt. — Also auch die „Fixigkeit" ist danach noch umstritten. Im übrigen kann darüber, ob die eine oder andere Methode vorzuziehen sei, nicht allerlei theoretisch-didaktische Streiterei, sondern ein einwandfreies psychologisches Experiment entscheiden, und das steht noch aus.

in Worte zu fassen. Sehr nützlich sind in dieser Hinsicht wieder algebraische Aufgaben, bei denen man bis zu Formen gehen kann, die in allgemeinen Zahlen geschrieben $ax + b = c$ lauten würden.

Gerade bei den Rechenoperationen zweiter Stufe treten die beiden Phasen in der Darbietung im Rechenunterricht, wenn sie auch überall in gleichem Sinne vorhanden sein sollen, mit besonderer Deutlichkeit in die Erscheinung: die Erarbeitung der Methode durch Denkarbeit und die Erlernung durch Gewöhnung. Man hat behauptet, alles Rechnen müsse denkend ausgeführt werden. Meine Meinung ist, daß erst mit einer gewissen Mechanisierung das Ziel erreicht ist. Wer bei jeder Addition und Multiplikation immer erst noch überlegen muß, der kommt nicht vorwärts. Diese Tatsache spricht übrigens gegen eine Häufung von Rechenvorteilen. — Die Ökonomie der Mathematik besteht darin, daß mehr und mehr eine Mechanisierung eintritt, daß schwierige Methoden ausgeübt werden dadurch, daß die in ihnen auftretenden bereits bekannten Verfahren ohne komplizierte Denktätigkeit rasch ablaufen. Für den Unterricht ergibt sich daraus die Forderung, Erklärung und Einübung im Rechnen in gleicher Weise zu berücksichtigen. Es bedarf keiner Ausführungen im einzelnen, daß eine vollständige Mechanisierung sich nur auf die immer und immer wiederkehrenden Verfahren zu erstrecken hat, auf die vier Rechenoperationen mit ganzen, gebrochenen und dezimalen Zahlen z. B., aber nicht beispielsweise auf eingekleidete Aufgaben in der Regeldetri.

6. Zahlentheoretisches im Rechenunterricht.

Die Vorbereitung der Bruchrechnung muß eine ihrer Hauptaufgaben in der Anleitung zur Faktorenzerlegung und in der Vertrautheit mit den zwei Begriffen: Kleinstes gemeinsames Vielfaches und größter gemeinschaftlicher Teiler sehen. Dieser Gesichtspunkt, nicht etwa der Wunsch, einen Einblick in die Grundbegriffe der Zahlentheorie zu geben, ist maßgebend dafür, daß man im Sexta- oder Quintaunterricht eine erste Einführung in die Primzahllehre bietet. Der Freund der Zahlentheorie, „des mathematischsten Teiles der Mathematik", wird aber gern das Schöne mit dem Nützlichen verbinden und gelegentlich ein wenig über den Rand der üblichen Straße hinausblicken; er kann dann seine Seitenblicke in der Untertertia oder Obertertia, wenn wieder vom Zahlsystem die Rede ist, wiederholen.

Die Sache hebt gemeinhin damit an, daß man die Frage aufwirft, wann ist eine Zahl durch 2, 3, 4, 5 usf. ohne Rest teilbar. Man sucht nach leichten Kriterien, wie man ohne das langweilige Ausprobieren auskommt. Bei 2 und 5, dann auch bei 4 und 25, von 10 und 100 ganz zu schweigen, ist es recht einfach, solche Regeln zu finden. Auch die Erklärung der Regeln ist recht leicht; man braucht nur die zu untersuchende Zahl als Systemzahl zu schreiben und dann durchzudividieren.

Etwas schwieriger ist die Ableitung der Regel für 9 und 3. Sind die Klammerregeln durchgenommen, so kann man auch die Systemzahlen zerlegen und dann die Teilung teilweise durchführen, also z. B.:

$$[2(999 + 1) + 3(99 + 1) + 6(9 + 1) + 7] : 9$$

gibt den Rest $2 + 3 + 6 + 7$.

Ich habe hier nur angedeutet, was in Sexta Gegenstand längerer Überlegung sein muß; nur der Weg soll damit beschrieben werden. Vielleicht ist es sogar zu empfehlen, in schlechten Klassen von einer vollständigen Begründung der Regeln abzusehen. Darüber hinauszugehen und nun auch die Teilbarkeit durch 11 oder gar 7 in dieser Klasse zu untersuchen, halte ich für verfehlt.

Um so wichtiger erscheint es mir aber, daß man nun auch den Nutzen der Neunerteilung an der Neunerprobe zeigt. Es kann gar nichts schaden, wenn schon auf dieser Klassenstufe die Schüler diese eigenartige und früher allgemein übliche Probe kennen und benutzen lernen. Man wende sie also auf Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ohne Rest an; die Division mit Rest ist vielleicht etwas zu schwer. Der Gedanke, der den Leitfaden für die Erklärung abgeben muß, ist der, daß $(9n + a) + (9m + b)$ den Neunerrest $a + b$ hat, ähnlich so bei der Subtraktion, daß schließlich $(9n + a) \cdot (9m + b)$ den Neunerrest $a \cdot b$ läßt, wie sich durch Multiplikation ergibt. Man wird sich bei diesen Erklärungen natürlich an bestimmte, ziffernmäßig gegebene Zahlen halten und an ihnen die nötigen Additionen und Multiplikationen der Klammerausdrücke durchführen. Später in der Arithmetik kann man auch die Begründung mit Buchstabenzahlen geben. Noch einmal aber muß festgehalten werden: das alles hat gar keinen Zweck, wenn nicht nachher auch ständige Verwendung den Wert der Neunerprobe erweist.

Die naheliegende Frage, ob man nun, wenn die Neunerprobe keinen Fehler aufdeckt, auch sicher richtig gerechnet habe, wird gelegentlich schon durch die Macht der Ereignisse aufgeworfen werden. Man wird an gewissen Beispielen zeigen können, in welchen Hauptfällen die Probe versagt, also z. B. beim Vertauschen zweier Ziffern in einer Zahl oder bei falschem Untereinandersetzen bei der Multiplikation.

Auf die Einübung der Teilbarkeitsregeln läßt man zweckmäßig die Zerlegung der Zahlen in Primfaktoren folgen, das umgekehrte Einmaleins, wie Schwering es nennt.[1] Damit treten die Begriffe Primzahl und zerlegbare Zahl auf. Man wird gut tun, eine Tafel der Primzahlen etwa bis 100 allmählich aufzustellen. Ob man dabei schon die als Sieb des Eratosthenes bezeichnete Methode anwendet, wird von der Schülergeneration abhängen, notwendig ist es jedenfalls nicht. Übrigens tritt die Erklärung der Multiplikation als Addition gleicher Summanden hier besonders deutlich in die Erscheinung.

Dann setzen lebhafte Kopfrechenübungen in der Zerlegung der Zahlen bis 100 ein, bei einfachen Zahlen auch über diesen Bereich hinaus. Die Aufgaben werden durch schriftliche Rechenübungen im maßvoll erweiterten Zahlbereich ergänzt. Der Nachweis, daß die Zahl der Primzahlen beliebig groß ist, gehört noch nicht hierher, ebensowenig eine Untersuchung der Gesetze über relativprime Zahlen.

Die wichtigste Anwendung der Primzahllehre, diejenige, derentwegen sie an dieser Stelle überhaupt auftritt, ist die Berechnung des größten gemeinschaftlichen Teilers und des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen. Die Schüler werden zunächst mit diesen beiden Begriffen selbst vertraut zu machen sein, ehe man an eine möglichst ökonomische Methode zu ihrer Auffindung herangeht.

---

[1] Vgl. die sehr lehrreiche kleine Schrift: K. Schwering, Ist Mathematik Hexerei? 2. A. Freiburg i. B., Herder, 1921.

Es handele sich um die Zahlen 24 und 36. Um den größten gemeinschaftlichen Teiler zu finden, wird man eine Liste aller Teiler von 24 und 36 aufstellen, die gemeinsamen feststellen und nun sehen, welches der größte ist. Ebenso wird man die Folge der Vielfachen von 24 und 36, soweit es nötig ist, aufstellen, wird in beiden Reihen gleichzeitig auftretende Zahlen und dann die kleinste dieser Zahlen aufsuchen. So erfährt der Schüler, um was es sich handelt, wird aber gleichzeitig auch den lebhaften Wunsch nach einem weniger langwierigen Bestimmungsverfahren äußern.

Die nächstliegende Methode, die zudem den klarsten Einblick in das Wesen der Sache gibt, ist die, daß man die gegebenen Zahlen in Primfaktoren zerlegt und daraus die gesuchten Zahlen findet. Ich möchte diesen naturgemäßen Weg als Normalverfahren auf den höheren Schulen dringend empfehlen; man kommt damit auch in der Bruchrechnung vollkommen aus, wenn, was heute ja die Regel sein wird, Brüche mit schwer zerlegbarem Nenner vermieden werden. Dann werden auch die Sonderfälle, der eine, bei dem es sich um den größten gemeinschaftlichen Teiler und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier teilerfremder Zahlen, insbesondere zweier Primzahlen handelt, und der andere, wo eine Zahl ein Teiler der anderen ist, in ihrer besonderen Einfachheit sofort klar. Für ein schnelleres Rechnen ist es oft auch vorteilhaft, bei der Bestimmung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen zweier Zahlen zunächst den meist leicht erkennbaren größten gemeinschaftlichen Teiler zu suchen, durch ihn die erste Zahl zu dividieren und dann mit dem Ergebnis die zweite Zahl zu mutiplizieren.

Die Zerlegung der Zahlen in Primzahlen stößt bei unbequemen Zahlen auf Schwierigkeiten. Der Sextaner wird schon bei Zahlen wie $323 = 17 \cdot 19$ die Zerlegung schwer finden. Bei solchen Zahlen besteht die Gefahr, daß ein vorhandener größter Teiler nicht entdeckt wird. Man sollte einmal in der Bruchrechnung an einem vollständig durchgerechneten Beispiel zeigen, wie ein solches Übersehen zwar die Richtigkeit der Rechnung nicht gefährdet, wie aber die Zahlen außerordentlich viel unbequemer, die Rechnung also viel langwieriger wird.

In solchen Fällen hilft bekanntlich die Kettendivision aus, der auch bei der Teilbarkeit der Polynome wieder verwendbare, leicht in die Streckenrechnung übersetzbare euklidische Algorithmus. Es mag etwa der gemeinsame größte Teiler von 323 und 391 gesucht werden. Man errechnet dann in leicht verständlicher Weise (Schema I) die Zahl 17:

Schema I.

$$\begin{array}{r} 391 : 323 = 1 \\ \underline{323} \\ 323 : 68 = 4 \\ \underline{272} \\ 68 : 51 = 1 \\ \underline{51} \\ 51 : 17 = 3 \end{array}$$

Schema II.

	391	323	1
4	68	51	
3	17	0	

Baltzer hat für die Kettendivision das Schema II, das für sich verständlich sein wird. Ich ziehe die ausführliche Schreibweise, selbst wenn sie mehr Zeit und Raum erfordert, schematischer Abkürzung vor.

Aus dem größten gemeinschaftlichen Teiler errechnet man in der oben angegebenen Weise auch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache; hier z. B. $391 : 17 = 23$; $323 \cdot 23 = 7429$.

Die Frage ist nun, wie kann man dieses Verfahren dem Sextaner klar machen. Vielleicht ist es möglich, ich glaube aber, daß man recht viel Zeit darauf verwenden muß. Aus diesem Grunde halte ich es für wünschenswert, auf diese Kettenregel in Sexta ganz zu verzichten, oder sie doch nur bei ganz guten Generationen zu bringen. Ich sagte schon, in einer vernünftig gehandhabten Bruchrechnung werden kaum Aufgaben vorkommen, in denen die Bestimmung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen durch Faktorenzerlegung auf Schwierigkeiten stoßen wird. Andererseits halte ich das Verfahren an sich doch für so wichtig, daß es später im arithmetischen Unterricht, etwa in der Obertertia, jedenfalls seine Stelle haben sollte. Da kann dann auf seine Bedeutung für die Bruchrechnung zurückgewiesen werden.

Verwerflich ist, um das noch einmal ganz deutlich zu sagen, die Kettendivision in Sexta oder Quinta einzuüben, ohne daß der Schüler sie versteht. Mir hat einmal ein alter gewiegter Rechenlehrer, der sich durch das eingeführte Rechenbuch zur Durchnahme verpflichtet fühlte, gestanden, daß er die Kettendivision selbst nicht verstände.

Es gibt dann noch ein anderes Verfahren, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu suchen, das in der Volksschule außerordentlich häufig anzutreffen ist, die sog. „Galgenmethode". Nacheinander entsteht das folgende Schema zur Bestimmung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Zahlen 8, 12, 18 und 27:

2	8	12	18	27
3	4	6	9	27
	4	2		9

oder

4	8	12	18	27
9	2	3	18	27
			2	3

Das gemeinschaftliche Vielfache ist $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9 = 216$.

Das Verfahren besticht durch seine Einfachheit. Es gibt in ganz mechanischer Weise vollkommen zuverlässige Ergebnisse in sehr kurzer Zeit. Schlimm steht es nur mit der Begründung. Es ist fast aussichtslos, das Verfahren dem Sextaner so zu erklären, daß er den Grund für alle einzelne Schritte einsieht. Ist das aber so, dann fragt es sich doch sehr, ob man nicht ganz davon absehen soll, dem Sextaner dieses Mittel an die Hand zu geben. Ich habe schon bei einer früheren Gelegenheit, ebenso wie andere Methodiker, z. B. Höfler, dringend vor der Galgenmethode gewarnt. Dazu eine bezeichnende Geschichte. Ein Geistlicher kam als Kreisschulrat mit seinem Kandidaten in eine Einklassenschule zur Prüfung. Ein Schüler errechnet nach der Primzahlzerlegung ein kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches. Den Revisoren ist das Verfahren nicht bekannt; als der Schüler eine 2 irgendwo verliert, müssen sie zu ihrer Galgenmethode greifen, um festzustellen, daß der Schüler sich verrechnet hat. Aber wo? Nachher wird im Revisionsprotokoll vermerkt: „Die Schüler rechnen zu sehr mechanisch."

7. Das Rechnen mit benannten Zahlen.

Es ist eine sehr eigentümliche Tatsache, daß die Kinder, zumal wenn sie erst zumeist mit unbenannten Zahlen gerechnet haben, sich nur sehr schwer an das Rechnen

mit benannten Zahlen gewöhnen.[1] Das Ursprüngliche ist ja doch die benannte Zahl, die unbenannte Zahl ist eine Abstraktion. Man sollte also meinen, daß das Kind viel leichter mit den Dingen der realen Wirklichkeit rechnen möchte. — Es gibt eine analoge Tatsache in der Geometrie. Wir sehen räumlich, wir leben im Raum, und doch gewöhnt der planimetrische Anfangsunterricht unsere Schüler so sehr an die ebenen Gebilde, daß ihnen später beim Beginn der Stereometrie die Erfassung der räumlichen Gebilde außerordentlich schwer fällt. Liegt hier tatsächlich ein Ergebnis unserer Unterrichtsmethoden vor, die eine anfangs vorhandene Fähigkeit verkümmern lassen, oder aber handelt es sich um eine davon ganz unabhängige Erscheinung in der psychologischen Entwicklung des Menschen?

Es wäre gänzlich verfehlt, mit benannten Zahlen erst dann zu rechnen, wenn man sich dem Kapitel, das uns hier beschäftigt, dem Sortenrechnen oder wie man es nennen mag, zuwendet. Auf allen Stufen des Rechnens sollen Aufgaben mit benannten Zahlen diejenigen mit unbenannten begleiten; das gilt ganz besonders auch von dem Unterricht in Sexta, wenn die verschiedenen Rechenoperationen noch einmal ausführlich und im Zusammenhange behandelt und in zahlreichen Aufgaben geübt werden. Es wird sich aber dabei zunächst nur um einfach benannte Zahlen handeln. Wichtige Aufgaben, die die Urteilskraft der Schüler zu schärfen geeignet sind, sind insbesondere die Schlüsse von der Einheit auf die Mehrheit, als Anwendung der Multiplikation — wenn man sich auf direkte Proportionalität beschränkt — und die Schlüsse von der Mehrheit auf die Einheit, als Anwendung der Division. Das sind zugleich die notwendigen Vorarbeiten für die später zu behandelnde Regeldetri.

Ehe man sich nun mit den mehrfach benannten Zahlen beschäftigt, erscheint es geboten, die einzelnen Maße einer genaueren Betrachtung zu unterwerfen, sie selbst und ihre gegenseitige Beziehung, schließlich auch ihre Bezeichnung in abgekürzter Form.

Welche Maße sollen im Unterricht Erwähnung finden? Zunächst natürlich alle diejenigen, die amtlich zugelassen sind. Das sind — ich schreibe gleich die amtlichen Abkürzungen dazu:

Längenmaße: Meter, m; Dezimeter, dm; Zentimeter, cm; Millimeter, mm; Kilometer, km.

Flächenmaße: Quadratmeter, qm oder m^2; Quadratdezimeter, qdm oder dm^2; Quadratzentimeter, qcm oder cm^2; Quadratmillimeter, qmm oder mm^2; Ar, a; Hektar, ha; Quadratkilometer, qkm oder km^2.

Körpermaße: Kubikmeter, cbm oder m^3; Kubikdezimeter, cdm oder dm^3; Kubikzentimeter, ccm oder cm^3; Kubikmillimeter, cmm oder mm^3; Liter, l; Hektoliter, hl; Milliliter, ml.

Gewichte: Kilogramm, kg; Hektogramm, hg; Gramm, g; Milligramm, mg; Tonne, t; Doppelzentner, dz.

Die Reihe dieser durch Reichsgesetz vom 30. Mai 1908 festgelegten Maße und Gewichte ist schon recht lang. Dazu kommen dann noch als unumgänglich notwendig die Zeitmaße und das Münzsystem. Von nichtdezimalen Benennungen nennen wir das Winkelmaß, dessen Behandlung in Sexta noch außer acht bleiben kann. Nicht-

[1] Ich will nicht verschweigen, daß mir von Lesern der ersten Auflage gelegentlich auch das Gegenteil berichtet worden ist.

dezimal sind ferner die Zählmaße, wie Dutzend, Mandel usf. Wir haben es hier mit bereits veraltenden Maßen zu tun; nach Gros zählt eigentlich nur noch der Stahlfederhändler, wenn man von gewissen, uns Männern weniger vertrauten Artikeln (Posamenten, Knöpfen u. dgl.) absieht; die Handelsfrau auf dem Markt verkauft schon immer seltener ihre Eier nach Mandeln; die Stiege verschwindet in manchen Gegenden Deutschlands ganz. Trotzdem wird der Unterricht gut tun, diese Zählmaße zu berücksichtigen. Anders liegt es vielleicht bei den in den Rechenbüchern noch recht häufig, im Papierhandel immer seltener angewandten Papiermaßen.

Wie soll man sich aber zu den gänzlich veralteten Maßen stellen? Es ist eine gewiß reizvolle Aufgabe, auf die jetzt fast ganz verschwundenen Maße, wie Zoll, Fuß, Elle, Morgen, Rute einzugehen. Solche Ausflüge in kulturhistorisch interessante Gebiete können auch den Eindruck von dem Wert des dezimalen Maßsystems wirksam vertiefen. Und auch der große Vorteil, der in der Vereinheitlichung des Maßsystems liegt, wird dadurch recht deutlich gemacht werden können, daß man etwa die Größen, die der Morgen oder der Zoll oder die Elle in verschiedenen Gebieten hat, nebeneinander stellen läßt. Gibt es doch Gegenden, wo für das Schülermaterial einer Schule drei verschiedene Arten Morgen in Betracht kommen. Solche Vergleiche von Maßen werden aber besser erst in späteren Klassen angestellt. Man muß dazu schon die Dezimalbruchrechnung voraussetzen können.

An einzelnen Maßen, die, obwohl amtlich nicht zugelassen, heute noch allgemein üblich sind, wie Pfund (℔) und Zentner, wird die Schule schon um deswillen nicht ganz vorübergehen können, weil das Rechnen überall die Berührung mit dem praktischen Leben wahren soll.

Eine andere Möglichkeit der Erweiterung des Maßverzeichnisses ist dadurch gegeben, daß auch die Maßsysteme anderer Länder berücksichtigt werden können. Bei den Längen-, Flächen- und Raummaßen kommt das nicht in Betracht. Hier kann man sich in der Sexta jedenfalls mit den schon genannten Maßen begnügen; die Seemeile, die man später braucht, kann immer noch zeitig genug eingeführt werden. — Etwas anders liegt die Frage hinsichtlich der Münzsysteme. Man findet in vielen Rechenbüchern, zumal solchen von Realanstalten, ausgedehnte Zusammenstellungen der ausländischen Münzen. Ich halte es für sehr erwünscht, wenn der Schüler von einigen solchen Münzsystemen etwas erfährt. In Betracht kommen einmal die Nachbarländer, bei denen ein persönliches Zusammentreffen heute im Zeitalter des Verkehrs nahe liegt, dann die übrigen Länder, mit denen uns wirtschaftliche Beziehungen verbinden. Notwendig erscheint mir also eine Bekanntschaft mit den Münzen der angelsächsischen Länder und der lateinischen Münzkonvention, dazu der nordischen Länder, Holland, Rußland, je nach der Lage der Schule. Bei der Beurteilung der Frage wird es nicht ganz gleichgültig sein, ob es sich etwa um eine Schule in Hamburg oder in irgendeinem kleinen Städtchen des Ostens handelt.

Nun zur Schreibweise der im Unterricht benutzten Maße. Für die meisten Maße sind die Schreibungen in Preußen durch eine Verfügung des Ministers amtlich festgelegt. Eine Frage nur bleibt zu beantworten, ob man die im amtlichen Verkehr zugelassene Potenzschreibung der Maße schon in Sexta berücksichtigen soll. Das gibt uns Anlaß, zunächst einmal dazu Stellung zu nehmen, ob man im Unterricht der Sexta schon Potenzen von Zahlen schreiben soll. Ich möchte mit ja antworten.

Ich kann nur dringend raten, schon bei dem umgekehrten Einmaleins die zweiten, dritten und vierten Potenzen — darüber wird es kaum hinausgehen — in Potenzform, nicht als Produkte zu schreiben. Der Sextaner wird die Schreibung als eine angenehme Abkürzung sofort begreifen. Trotzdem ich aber in Sexta diese Potenzschreibung bei Zahlen empfehle, möchte ich doch davon abraten, nun auch bei den Bezeichnungen der Flächen- und Raummaße diese Art der Schreibung einzuüben. Es ist ein Unterschied, ob man 2^3 oder cm^3 verstehen soll. Es wird im letzten Falle doch so viel aus der Raumanschauung vorausgesetzt, daß ein wirkliches Verständnis, warum man diese Bezeichnung zuläßt, wahrscheinlich beim Durchschnittssextaner nicht erzielt werden kann. Es ist ja später auch noch Gelegenheit genug, das hier Versäumte schnell und sicher nachzuholen.[1]

Eines verdient noch Erwähnung, weil dagegen im täglichen Verkehr häufig verstoßen wird. Ganz allgemein gilt die Vorschrift: Hinter die Bezeichnungen ist kein Punkt zu setzen. Den Geschäftsmann wird man freilich von seiner durch lange Tradition begründeten Gewohnheit, hinter das Markzeichen, das er vor die Summe setzt, einen Punkt zu setzen, nicht abbringen, auch davon nicht, an Stelle des amtlich vorgeschriebenen Komma-Dezimalzeichens den Punkt zu wählen. Die höhere Schule muß sich aber unbedingt an die amtlich vorgeschriebene Bezeichnung halten, meiner Meinung nach auch beim sog. kaufmännischen Rechnen.

Auch das mag noch gesagt werden, daß manchmal eine amtliche Abkürzung für Pfennig vermißt wird. Man wird nicht immer fünf Pfennig mit 0,05 ℳ abkürzen wollen. Die Abkürzung 5 Pf ist zwar nicht amtlich zugelassen, es ist aber wohl nichts dagegen einzuwenden, sie in der Schule zu benutzen; das Zeichen ₰ ist dann entbehrlich.

Eine oft ausgesprochene, aber noch nicht immer befolgte methodische Forderung ist es, die im Unterricht besprochenen Maße auch wirklich vorzuzeigen. Beim Metermaß ist das ja selbstverständlich. Ein Quadratmeter ist vielfach an die Wand des Schulzimmers gezeichnet. Ein Ar kann man auf dem Schulhof durch Steine bezeichnen, ein Kilometer ist auf einer möglichst geraden Landstraße oder Stadtstraße abzuschreiten. Ein Kubikmeter läßt sich aus 12 Meterstäben und acht mit entsprechenden Durchbohrungen versehenen kubischen Klötzchen leicht zusammensetzen. Fig. 9/10 zeigt einen Kubus, der in zusammengeklappter Form wenig Raum

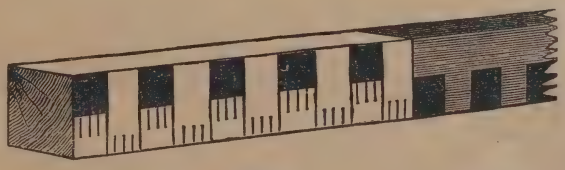


Fig. 8.
Schulmetermaßstab. Vierfarbige Angabe der Maße, die so deutlich ist, daß sie für die ganze Klasse sichtbar sind. Ausführung des Polyt. Arbeits-Instituts J. Schröder, Darmstadt.

[1] Ein Gutachten des DAMNU hat sich in dem gleichen Sinne ausgesprochen (vgl. Schriften I, 17, Leipzig, Teubner). Der Lehrplan für die bayerischen höheren Lehranstalten (vom Jahre 1914) sagt ausdrücklich: „Zur abgekürzten Bezeichnung der Flächen- und Körpermaße ist in den unteren Klassen diejenige zu wählen, die den Potenzbegriff nicht voraussetzt; in den oberen Klassen sollen daneben die Schüler mit den Bezeichnungen durch Potenzen bekannt gemacht werden."

beansprucht. Ein Kubikdezimeter mit, wenn auch nur teilweise durchgeführter Einteilung in Kubikzentimeter sollte zur Verfügung stehen (Fig. 11). Dazu kommt,

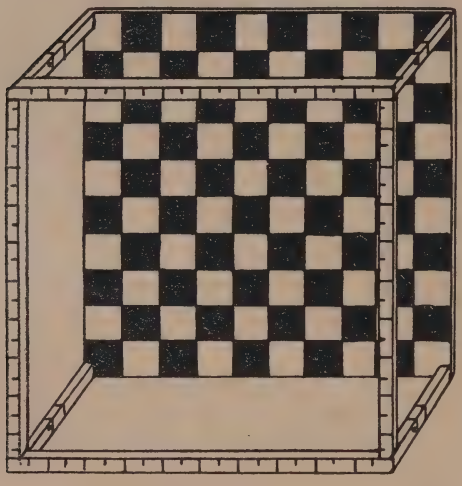


Fig. 9.
Klappkubus. Stellt einen Kubikmeter dar. Amelangsche Lehrmittelhandlung, Berlin.

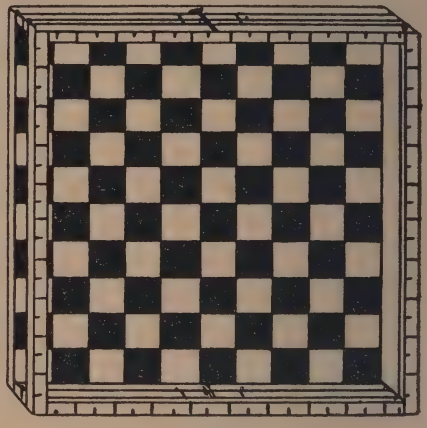


Fig. 10.
Der Klappkubus in zusammengeklapptem Zustand.

daß die in Quinta oder Quarta einsetzende Raumlehre gar bald das Messen und Schätzen von Strecken und Flächen erneut aufnimmt. Auch in Sexta schon wird es nötig sein, sollen anders die Maße nicht bloße Schemen sein, Längen, Flächen und Inhalte zu messen; das ist aber bei Flächen und Inhalten gleichbedeutend mit Berechnen. In der Tat ist es sehr wohl schon auf dieser Klassenstufe möglich — und für den Unterricht außerordentlich belebend —, Flächen zu messen und zu berechnen. Man wird sich gelegentlich auch an die Berechnung von Quadern wagen können, z. B. an die Berechnung des Luftinhaltes des Schulzimmers. Sollte übrigens der Rechenunterricht hier eine Unterlassungssünde begehen, so wird gewiß schon der erste Geometrieunterricht das wieder gutmachen können.

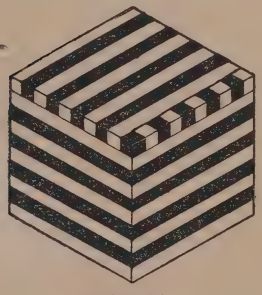


Fig. 11.
Kubikdezimeter. Die Zerlegung in 10 Schichten, der obersten Schicht in 10 Säulen, einer Säule in 10 Kubikzentimeter ist angedeutet. Ausführung der Firma F. Neustadt, Niederlößnitz-Dresden.

Etwas anders liegen die Dinge mit den Gewichten. Hier dauert es recht lange, ehe die Physik den Schülern eine eingehende Erklärung der Grundmaße bringt. Es ist also eine Pflicht des Sextaunterrichtes, eine vorläufige Erklärung zu geben. Diese Erklärung darf nicht auf Worte beschränkt bleiben, man muß den Schülern an der Wage zeigen, daß ein Liter Wasser ein Kilogramm wiegt. Man muß weiter den Schülern auch Gramm- und Kilogrammstücke in die Hand geben, damit sie eine Anschauung von der Größe der Gewichte bekommen. Sonst kann es sich ereignen,

daß ein Schüler, dessen Vater immer mit der Dezimalwage zu arbeiten gewohnt ist, ein 100-g-Stück für ein Kilostück anspricht und nicht davon abzubringen ist.

Man kann natürlich nicht schon in Sexta erschöpfende Definitionen der Maße geben; dafür ist in höheren Klassen immer noch Zeit genug. Die Herleitung des Zeitmaßes z. B., vielleicht auch die des Metermaßes, wird man in exakter Form erst in der Physik geben; auch bei den Münzen wird man genaue Angaben über ihre Dimensionen, über ihren Metallgehalt u. dgl. möglicherweise erst in der Quarta oder noch später geben, wenn von dem Geldwesen die Rede ist. Bei solchen Gelegenheiten soll man dann auch Nebensachen ruhig erwähnen, wie die Eichungsplomben der Gewichte, die Münzstätten der Geldstücke und ähnliche Dinge.

Das eigentliche Sortenrechnen beschäftigt sich mit dem Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen. Die einfachsten Rechnungen, die dabei auftreten, sind die, höhere Einheiten in niedere und niedere in höhere zu zerlegen. Man nennt die erste Art der Sortenverwandlung Resolution (ein wenig schöner und überdies entbehrlicher Name!); es ist also z. B. der Ausdruck: 7 Jahre, 5 Monate, 23 Tage in Tage zu verwandeln. Das andere Verfahren heißt ebenso unschön Reduktion. Man rechnet etwa aus, wieviel Tage, Stunden und Minuten 1000 Minuten sind. Bei dezimalen Maßen erfordern diese, dem früher erwähnten und geübten Ponderieren verwandten Operationen keine besonders umständlichen Rechnungen; bei den nichtdezimalen Maßen treten die Reihen ganz bestimmter Vielfache auf.

Die Addition und Subtraktion mehrfach benannter Zahlen begegnet dann keinen Schwierigkeiten mehr. Bei den Aufgaben möge man sich vor einer Häufung der Benennungen hüten. Zwei, allenfalls einmal drei Benennungen genügen vollkommen. Von 13 km 241 m 34 cm 6 mm zu reden, ist gänzlich unnütz.

Bei der Multiplikation kommt nur der Fall in Frage, daß eine mehrfach benannte Zahl mit einer reinen Zahl multipliziert wird. Bei der Division kommen hingegen zwei Fälle vor: der Dividend ist immer eine benannte Zahl, der Divisor aber kann entweder benannt oder unbenannt sein. Erst recht bei den Multiplikationen und Divisionen soll man sich vor allzu langen Ausdrücken hüten. Es kommt hinzu, daß eine Bedeutung für das praktische Leben nur bei ganz einfachen Zahlverhältnissen vorliegt. Aufgaben wie 593 Jahre 189 Tage 3 Stunden 54 Minuten 3 Sekunden: 8 Jahre 219 Tage 15 Stunden 47 Sekunden sollten wirklich aus dem Unterricht verschwinden. Leider sind solche Monstra gerade in Rechenbüchern für höhere Schulen gar nicht so selten.

Oft geht das Rechnen mit den Zeitmaßen unter dem besonderen Namen „Zeitrechnung". Nachdem zunächst die Zeitmaße selbst und damit kurz auch unser Kalenderwesen besprochen worden ist, handelt es sich um die drei Aufgaben, von den drei Größen Zeitraum, Anfangstermin, Endtermin die eine zu bestimmen, wenn die beiden anderen gegeben sind. Während die Berechnung des Zeitraumes eine im praktischen Leben sehr häufig begegnende Aufgabe ist — man vergesse ja nicht, an dieser Stelle das Kursbuch[1] heranzuziehen —, treten die anderen Aufgaben mehr zurück. Die Beispiele, die die Rechenbücher hier geben, haben deshalb meist etwas

[1] Der Verlag der Stormschen Kursbücher in Leipzig hat vor einiger Zeit ein „Handbuch zu den Stormschen Kursbüchern" herausgegeben, das ein Lehrbuch für Reisende, Lehrer und Schüler sein will, und gibt dazu für billiges Geld alte Kursbücher als Übungsmaterial ab.

Konstruiertes. Man wird selten in die Verlegenheit kommen, von einem Manne den Geburtstag zu berechnen, wenn man sein Alter kennt und überdies seinen Todestag, oder den Todestag, wenn man den Geburtstag kennt. So oder ähnlich lauten aber fast alle Aufgaben, die sich in den Rechenbüchern finden. Wirkliche Aufgaben, wie etwa die Frage nach dem Erlöschen einer 45tägigen Rundreisekarte, operieren meist mit recht kleinen Zahlen. Man kann sich also im großen und ganzen in der Zeitrechnung ohne jede Gefahr kurz fassen.

8. Die gemeinen Brüche.

Die Bruchrechnung bedeutet den Eintritt in das eigentliche Denkrechnen, wenn ich so sagen darf. Zwar soll auch das Rechnen mit ganzen Zahlen Denkrechnen sein. Aber schließlich ist es, wie die Hilfsschulen zeigen, auch ohne allzu große Denkarbeit möglich, die Rechenoperationen mit nicht allzu großen ganzen Zahlen auszuüben. Kommt man nun aber zu der Ausdehnung der Rechenoperationen auf die Brüche, kommt man vor allem zur Multiplikation mit Brüchen, dann wird die Methode der mechanischen Aneignung zumeist versagen. Es wird da eine weit größere Abstraktionskraft verlangt, als irgendwo vorher. Das ist der Grund, warum so viele Schüler an dieser Stelle scheitern. Hier rächt sich auch bitter eine schlechte Grundlegung bei den Rechenoperationen mit ganzen Zahlen, die sonst vielleicht unbemerkt geblieben wäre.

In der Volksschule geht heute eine starke Bewegung dahin, das Rechnen mit gemeinen Brüchen immer mehr einzuschränken. Man kann solchen Bestrebungen eine Berechtigung nicht absprechen. Wenn es sich in der Hilfsschule, in der Taubstummenschule, vielleicht aber auch schon in der einklassigen Schule darum handelt, das Rechenpensum zu kürzen, dann kann man ganz ruhig auf das Multiplizieren mit einem Bruch, das Dividieren durch einen Bruch verzichten. Das kommt im praktischen Leben nur äußerst selten vor. Ganz anders aber liegen die Dinge an der höheren Schule. Hier sind diese Operationen wegen ihrer grundsätzlichen Bedeutung nicht zu missen. Der Rechenunterricht, der hier als ein wesentlicher Teil des mathematischen Unterrichtes zu gelten hat, darf auf die Erweiterung der Rechenoperationen auf die gebrochenen Zahlen nicht verzichten. Er muß vielmehr diese Erweiterung mit aller Gründlichkeit vornehmen. Es wäre ganz verfehlt, anzunehmen, daß die spätere Durchnahme in der Arithmetik in Untertertia dem Quintaunterricht die schwere Bürde der Erklärung der Bruchoperationen abnähme. Jener Unterricht will und muß sich ja gerade auf seinen Vorgänger stützen. Und dann noch eins. Man wird den Wert einer Propädeutik der arithmetischen Methode nicht verkennen dürfen. Es gibt im ganzen Rechenunterricht vielleicht kein geeigneteres Stoffgebiet als die Bruchrechnung, bei der eine, zwar immer wieder auf die Anschauung zurückgreifende, aber doch schon recht erhebliche Anforderungen stellende Abstraktion von den Schülern verlangt wird.

Die erste Frage, die zu erörtern ist, ist die nach der Definition der Brüche. Gewiß wird man in Quinta keine Wortdefinition geben wollen. Aber man muß doch sagen, wo man Brüche einführt, warum man sie einführt, was man darunter versteht. — Die Division ist nicht immer ohne Rest ausführbar. Soll sie ausführbar sein, so muß man sich einen gewaltsamen Eingriff in den Zusammenhang der Dinge er-

lauben. Man zerschneidet die Äpfel, zerbricht die Stäbe; man erzeugt neue Gebilde aus den alten. Ihnen entsprechen neue Zahlen. Immer geht das nicht. Mit einem halben Menschen können wir nicht operieren. Und doch schaffen wir uns die neuen Zahlen im Bereiche der reinen Zahlen ausnahmslos, während wir im Bereiche der benannten Zahlen vorsichtig sein müssen. So muß also hier die Erweiterung des Zahlbereiches dem Schüler vor Auge und Verstand gestellt werden. Er muß schon eine kleine Ahnung von dem bekommen, was Kummer einst meinte, als er sagte: Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen, alles andere ist Menschenwerk. — Auch das Wort „Bruch" verdient Beachtung; welcher Schüler denkt ohne weiteres dabei an den Zusammenhang mit dem Verb „brechen"?

Bei der Suche nach der einfachsten Veranschaulichung der Brüche ist man bei drei Dingen stehen geblieben. Man benutzt entweder Strecken oder Kreise oder Kugeln. Strecken sind mit Rücksicht auf die frühere und spätere Benutzung des Zahlstrahls sehr zu empfehlen. Ihr Nachteil liegt darin, daß sich die einzelnen Teile nicht gestaltlich voneinander unterscheiden. Kreise zeigen diesen Unterschied sehr deutlich. Einen Viertelkreis erkenne ich als solchen, in welchem Maßstabe er auch gezeichnet sei, ein Viertel der Einheitsstrecke dagegen erst, wenn ich den Maßstab daneben halte. Der Mißstand bei Kreisen ist dagegen der, daß man unechte Brüche nicht durch eine zusammenhängende Figur darstellen kann. Treutlein vermißt auch bei ebenen Stücken, daß sie sofort als Teile eines Ganzen und nicht wieder selbst als Ganze aufgefaßt werden. Er wählt deshalb Teile eines Körpers, und zwar der Kugel, zur Darstellung der Brüche. Mir will scheinen, daß sein Einwand wohl für Quadrate und Rechtecke, nicht aber für Kreise zutrifft. Ich möchte also vorschlagen, sich der beiden zuerst genannten, leicht in Zeichnungen oder in Pappe herstellbaren[1] Veranschaulichungsmittel, der Strecken und der Kreise, zu bedienen, je nach der besonderen Eignung für den gerade vorliegenden Zweck.

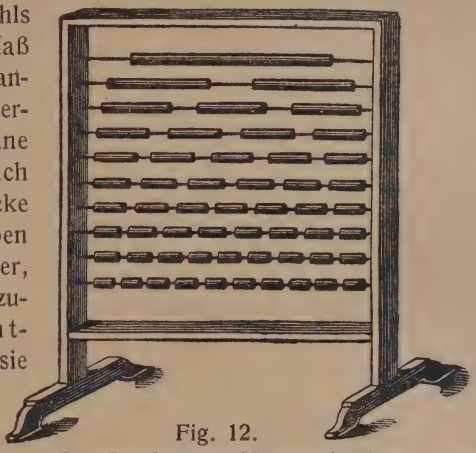


Fig. 12.
Bruchrechenmaschine nach Hermann. Die Einheit ist durch einen zylindrischen Stab dargestellt. Ausführung der Deutschen Lehrmittel-Anstalt (F. A. Klodt), Frankfurt a. M.

Die erste Eigentümlichkeit des Bruches, die im krassen Gegensatz zu dem im Bereiche der ganzen Zahlen Gewohnten steht, ist die, daß Brüche gleichen Wertes durchaus nicht in gleicher Weise geschrieben zu werden brauchen. Der Mathematiker würde sagen, man muß erst ausdrücklich definieren, wann zwei neu eingeführte Zahlen gleich sind. Der Rechenlehrer in Quinta wird sich natürlich ganz an die Anschauung halten. Er wird so das Verwandeln gemischter Zahlen in unechte Brüche erklären, das Kürzen oder Heben und das Erweitern; der Ausdruck „verkleinern" ist irreführend, da der Bruch seinen Wert nicht ändert.

[1] Vgl. hierzu W. Finke, Über eine „Bruchkasse" für den Unterricht in der Bruchrechnung ZmnU 47 (1916) S. 477ff.

Als eine gute Vorübung zum Kürzen und Erweitern ist die Beurteilung der Wertänderung eines Bruches anzusehen, wenn einmal der Zähler, das andere Mal der Nenner wächst oder abnimmt. Das ist zugleich eine erste, ungezwungene Verwertung des Begriffes der gegenseitigen Abhängigkeit von Größen.

Es erfordert nicht nur eine längere Übung im mündlichen und schriftlichen Rechnen, sondern eine öfters wiederholte, durch Anschauung und Überlegung erläuterte ausführliche Besprechung, daß der Wert eines Bruches beim Kürzen und Erweitern sich nicht ändert. Man mache einmal den Versuch und frage, was die Schüler vorziehen, einen Teller mit $\frac{2}{3}$ oder mit $\frac{10}{15}$ Wurst. Wenn sie auch nicht so unverschämt sein werden, wie jener Schüler, der dem also fragenden Schulrat, als ich einmal dem Unterricht in einer Volksschule beiwohnte, erwiderte: „Ich nehme beide" — die Mehrzahl wird jedenfalls sofort die $\frac{10}{15}$ Wurst wählen.

Die Addition und die Subtraktion von Brüchen scheint zunächst kaum prinzipielle Schwierigkeiten zu bieten.[1] Was man unter der Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche zu verstehen hat, liegt ja auf der Hand, und ungleichnamige Brüche macht man eben erst gleichnamig. Aber die Sache ist doch nur auf den ersten Blick so einfach. Man mache einmal den Versuch: Wieviel ist $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$? Antwort: $\frac{3}{5}$. Und nun wende man ein: Was hatten wir doch unter Addition verstanden? Eine Abkürzung des Weiterzählens. Ja, aber können wir denn um $\frac{2}{5}$ weiterzählen? Man kann doch nur um 2 oder 3 oder 10, also nur um ganze Zahlen weiterzählen? Oder wie ist das?

So wird sich herausstellen, daß man ganz unbewußt die reine Zahl zwei Fünftel wie eine benannte Zahl 2 mit der Benennung „Fünftel" behandelt hat (beachte auch den Ausdruck „Nenner"!). Es verdient einer ausdrücklichen Hervorhebung, daß damit der Begriff der Addition gegen früher eine Erweiterung seiner Bedeutung erfahren hat; die Verdeutlichung am Zahlstrahl wird auch bei dieser Erweiterung des Begriffes nützlich sein. Natürlich kann man auch die Sachlage so erklären, daß man schon das Zählen, auf das die Addition zurückgeht, in erweitertem Sinne auffaßt. Man kann ja auch um Fünftel weiterzählen und auch da den Zahlstrahl zu Hilfe nehmen.

Wie man einen Bruch mit einer ganzen Zahl multiplizieren kann, ebenso wie man ihn durch eine ganze Zahl dividiert, das folgt aus der Bedeutung der Multiplikation ohne weiteres. $\frac{1}{4}$ mal 3 bedeutet: $\frac{1}{4}$ ist dreimal als Summand zu setzen, also $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Ebenso ist $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$, denn in der Aufgabe $\frac{1}{2} : 2$ wird ja diejenige Zahl gesucht, die mit 2 multipliziert $\frac{1}{2}$ gibt. Auch wenn ich die Brüche als benannte Zahlen auffasse, entstehen hier keine Schwierigkeiten, wenn man nur gegebenenfalls das Kürzen und das Erweitern der Brüche zur Hilfe nimmt.

---

[1] Den Gymnasiasten wird die folgende Stelle aus den Episteln des Horaz die Bruchrechnung der Römer nahe bringen

Dicat
Filius Albani: si de quincunce remotas
Uncia, quid superat? Poteras dixisse? ‚Triens'. Eu!
Rem poteris servare tuam. Redit unica, quid fit?
‚Semis'.

Es handelt sich um $\frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$ und $\frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$.

Schon beim nächsten Schritt aber wird es anders. Wenn die Aufgabe 7 mal $\frac{3}{4}$ vorliegt, so würde das nach unserer alten Auffassung der Multiplikation sagen, die Zahl 7 ist $\frac{3}{4}$ mal als Summand zu setzen. Das geht aber nicht, das ist zunächst barer Unsinn! Genau so, wie ich mich zwar 3mal, niemals aber $\frac{3}{4}$ mal auf meinen Stuhl setzen kann, genau so kann ich nicht $\frac{3}{4}$ mal die Zahl 7 als Summand setzen. Hole ich meine Auffassung der Brüche als benannte Zahlen zu Hilfe, so ist auch nichts auszurichten. Den Fall, daß der Multiplikator eine benannte Zahl ist, hatten wir früher ausdrücklich als unzulässig erkannt. Noch ein Ausweg winkt hier freilich: das kommutative Gesetz. Wir werden jedenfalls, wenn wir überhaupt die Multiplikation mit Brüchen definieren wollen, sie so definieren, daß dieses Gesetz erhalten bleibt. Hier kommt zum ersten Male das Permanenzprinzip in voller Deutlichkeit zum Vorschein, jenes von der Ästhetik und der Ökonomie im Leben diktierte Gesetz, das die zunächst unbeschränkte Freiheit unserer Definitionen in enge Schranken bringt.

7 mal $\frac{3}{4}$ ist also dasselbe wie $\frac{3}{4}$ mal 7, und das ist nach Früherem $\frac{21}{4}$. Man wird sich nun nicht mit diesem Ergebnis begnügen, vielmehr systematisch untersuchen: was geschieht also mit einer Zahl, wenn wir sie mit $\frac{3}{4}$ multiplizieren: Dasselbe, als wenn wir sie mit 3 multiplizieren und dann das Ergebnis durch 4 dividieren. Es ist anzuraten, an einfachen eingekleideten Aufgaben die Übereinstimmung mit den Gewohnheiten des täglichen Lebens zu zeigen. Man wird an den Schluß von der Einheit auf die Vielheit anknüpfen. Wieviel kostet $\frac{3}{4}$ m Stoff, wenn 1 m 240 ℳ kostet? — Nicht wenige ziehen es vor, von solchen praktischen Aufgaben auszugehen und von da aus die Multiplikation zu erklären. Sie sollten es dann aber nach meiner Meinung nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, wie die neue Begriffserklärung die alte Auffassung der Multiplikation sprengt. Übrigens stützt man sich auch hier auf das Permanenzprinzip, nur knüpft man nicht an das kommutative Gesetz, sondern an den Regeldetrischluß an.

Das Ergebnis der Multiplikation einer ganzen und einer gebrochenen Zahl gibt uns nun auch einen Wegweiser dafür, wie wir die Multiplikation eines Bruches mit einem anderen zu definieren haben. Auch bei einer Aufgabe $\frac{2}{3}$ mal $\frac{4}{5}$ werden wir sagen: $\frac{2}{3}$ ist erst mit 4 zu multiplizieren, dann ist das Ergebnis durch 5 zu dividieren. Man erhält also $\frac{8}{15}$. Wieder können vorher oder nachher Schlüsse von der Einheit auf einen Bruch zeigen, daß eine solche Abmachung praktisch ist.

Nun zur Division. Hier kommt man vollständig zum Ziel, wenn man die Division als Umkehrung der eben definierten Multiplikation von Brüchen auffaßt. Man findet dann in leichter Überlegung, daß man durch einen Bruch dividiert, indem man durch den Zähler dividiert und mit dem Nenner multipliziert. Diese Regel kann man dann in eine andere Form bringen, indem man den Ausdruck „reziproker Bruch" verwendet. Ich rate sehr, diesen präzisen Ausdruck schon früh zu benutzen, die Redewendung „umgekehrter Bruch" ist unklar und unschön. Eine andere, häufig gegebene Herleitung der Divisionsregel geht von der Auffassung des Bruches als benannte Zahl aus. $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ bedeutet, wie oft sind $\frac{3}{4}$ oder $\frac{9}{12}$ in $\frac{2}{3}$ oder $\frac{8}{12}$ enthalten. Das Ergebnis ist $\frac{8}{9}$.

Vielleicht wird dem Schüler das Zwingende, das im Permanenzgesetz liegt — man wird natürlich dem Quintaner nicht mit diesem schweren Worte kommen oder gar

das Gesetz formulieren — noch besser als in der Ausdehnung abstrakter Rechengesetze an konkreten Beispielen der folgenden Art klar: Wenn ich Multiplikation und Division bei Brüchen definiert habe, so müssen die Operationen jedenfalls so definiert sein, daß sie auch dann zum richtigen Ziel führen, wenn die Brüche nur scheinbar als Brüche auftreten, wenn sie in Wirklichkeit ganze Zahlen sind. Statt 3 mal 4 zu bilden, kann ich ja auch schreiben $\frac{6}{2}$ mal $\frac{12}{3}$. Das Ergebnis der Bruchmultiplikation ist $\frac{72}{6}$; das ist in der Tat das richtige Ergebnis 12. Ganz ähnliche Beispiele wären für die Division zu bilden.

Ich weiß sehr wohl, daß viele Rechenpraktiker mit dem, was bei uns Schlußergebnis langer Überlegungen ist, den schließlichen Rechenregeln für Multiplikation und Division, fast unmittelbar beginnen. Auch wer einen Versuch zur Erklärung macht, wird vielleicht zu der Ansicht kommen, es sei verlorene Liebesmüh. Wenn ich z. B. Aufgaben wie $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ erst so rechnen lasse, daß ich $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = x$ in $\frac{1}{4} \cdot x = \frac{1}{2}$ umsetze und daraus $x = 2$ schließen lasse, wenn ich dann einen allgemeinen Ausdruck für x suche, weil er durch Raten bei schwierigeren Aufgaben nicht gefunden werden kann, wenn ich so zu dem Ergebnis komme, durch einen Bruch dividieren heißt, durch den Zähler dividieren und das Ergebnis mit dem Nenner multiplizieren und erst jetzt die endgültige Rechenregel ableite, dann werden auf diesem langen Wege selbst die Besten der Klasse viele Mühe haben. Sobald aber die Rechenregel da ist, dann atmet alles erleichtert auf, und auch die schlechtesten Schüler schreiben nun ihre Extemporalien mit genügend und gut. Lohnender für den äußeren Schein ist es also, einfach die Rechenregel gleich herauszusagen; man hat gute Klassenergebnisse und noch dazu ohne große Anstrengung. Wer so urteilt, könnte es auch gleich so machen wie Apian, der einfach das folgende Schema (Fig. 13) gibt und sagt: „Item durch dise nachgesetzte Character magst du alle Speties der brüch leichtlich lerne vnd so du sie mit fleiss merkest / magst du die species schwerlich vergessen.“ Wer aber den Rechenunterricht als Vorbereitung des mathematischen ansehen muß, begeht eine Unterlassungssünde, die nur deshalb sich nicht sofort rächt, weil sie sich erst später bemerkbar macht.

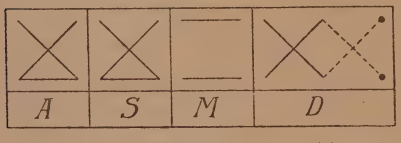


Fig. 13.

Ich habe die Einführung in die Operationen mit Brüchen deswegen ausführlich besprochen, weil die Rechenbücher, ja sogar gute methodische Anleitungen, in diesen Dingen vielfach versagen. Daß hier eine Erweiterung der Bedeutung der Rechenoperationen vorgenommen werden muß, wird durchaus nicht überall klar gesagt. Die Erweiterung wird vielmehr meist erschlichen durch die unbewußte Benutzung der benannten Zahlen. Bei der Addition und Subtraktion kommt man damit aus, ebenso bei der Division; man macht beide Brüche gleichnamig und kommt auf eine Enthaltenseinsaufgabe, da Divisor und Dividend benannte Zahlen sind. Sie versagt bei der Multiplikation. Da wird dann irgendwie drumherum geredet, ohne daß der Kern getroffen wird. „Eigentlich“ könne man mit Brüchen nicht multiplizieren; uneigentlich tut man es aber nachher doch.

Nicht selten trifft man eine Definition der Multiplikation, die etwa so lautet: „Eine Zahl mit einer anderen multiplizieren, heißt mit dem Multiplikanden die gleiche

Rechnung vornehmen, durch welche der Multiplikator aus 1 entstanden ist.“ Ich halte diese Erklärung, die wohl dasselbe besagen will, wie das, was wir oben ausführten, für unzweckmäßig, weil sie unexakt ist. 8 entsteht aus der 1, indem ich 1 verdoppele und das Ergebnis in die dritte Potenz erhebe. Also bedeutet nach der Erklärung $3 \cdot 8$, daß man 3 verdoppeln und das Ergebnis in die dritte Potenz erheben soll. Gewiß, so war's nicht gemeint; aber ein böser Mensch könnte doch die Definition so auslegen, und Definitionen müssen auch bösen Menschen standhalten.

Die Schreibweise der Brüche ist jetzt in den höheren Schulen wohl fast durchweg die, daß man den trennenden Strich wagerecht wählt, nicht, wie es früher oft geschah, schräg. In der Tat kann man 171/2 sehr leicht mit **17½** verwechseln. Für die Beibehaltung des schrägen Bruchstriches sprechen freilich mancherlei Gründe. Der Drucker verteidigt den schrägen Strich damit, daß man bei seiner Verwendung bei gleicher Schriftart die Lettern größer wählen könne; er denkt aber wohl auch daran, daß das Setzen ohne die bei wagerechtem Strich nötig werdenden Zeilendurchschüsse einfacher ist. Auch meiner Schreibmaschine ist der schräge Strich bequemer als der wagerechte. Die Physiker bevorzugen in ihren Büchern den schrägen Bruchstrich, der eine gewisse amtliche Sanktion schließlich auch dadurch gefunden hat, daß er auf dem alten 50-Pfennigstück stand.

Man kann vielleicht folgenden, vom Deutschen Ausschuß vorgeschlagenen Kompromiß zulassen: Bei Brüchen mit je einer Ziffer oder je einem Buchstaben im Zähler und im Nenner ist der schräge Strich gestattet, sonst ist immer der wagerechte Strich anzuwenden.

Eine Frage der Rechenpraxis ebenso wie der — Ästhetik ist es, wie man beim Kürzen von Brüchen zu verfahren hat. Das Übliche ist das Durchstreichen der betreffenden Ziffern. Man muß aber zugeben, daß $\frac{\overset{3}{\not{x}\not{5}}}{\underset{4}{\not{2}\not{8}}}$ weder schön aussieht, noch übersichtlich ist. Bochow, dessen Vorschläge für Rechenschemata[1] durchweg sehr erwägenswert sind, schlägt die Schreibweise $\frac{15}{20} \overset{5}{=} \frac{3}{4}$ vor, wobei der gemeinschaftliche Faktor angegeben ist. Das ist ästhetischer als jenes „Gemetzel“, man gerät auch nicht in Gefahr, mit den oben sich auftürmenden Zahlen in die darüber stehenden Zeilen zu kommen. Schließlich kann man die Rechnung weit besser verfolgen; freilich braucht man etwas mehr Zeit und Platz, besonders bei längeren Ausdrücken. Vielleicht ist dann auch einmal ein „Gemetzel“ erlaubt.

Wir haben uns bisher vornehmlich mit der theoretischen Seite der Bruchrechnung beschäftigt. Ich halte es in der Tat für eine der wichtigsten didaktischen Forderungen des Rechenunterrichtes an höheren Schulen, daß die Bruchregeln nicht nur vollständig beherrscht, sondern auch von Grund aus verstanden werden. Es fehlt diesem Kapitel gar zu oft an durchsichtiger Klarheit und wissenschaftlicher Ehrlichkeit. Manche dieser Regeln, z. B. diejenigen über die Multiplikation und Division zweier Brüche, wird man recht gut in Buchstabenform aussprechen lassen. Auch hier wieder sieht der Schüler, wie bequem die Formel an Stelle der langen Regel ist, die mit „Zähler“, „Nenner“, „reziprokem Wert“ usw. arbeitet.

---

[1] Ich verweise nachdrücklich auf K. Bochow, Grundsätze und Schemata für den Rechenunterricht an höheren Schulen, 2. Aufl., Berlin (Salle) 1912.

Die Erfassung der Bruchregeln durch den Schüler wird nun aber erst recht vollständig sein, wenn auch die nötigen Übungen in großer Zahl folgen. Dabei haben sich Kopfrechnen und schriftliches Rechnen in die Hände zu arbeiten. Man wird auch bei der Bruchrechnung eine Häufung der Schwierigkeiten vermeiden können. Lange Reihen von Brüchen zu addieren, zumal wenn der Hauptnenner sehr groß ist, ist unnötig. Die aufgewandte Zeit steht in keinem Verhältnis zum Nutzen. Freilich darf dieser Verzicht auf Schwierigkeiten nun nicht so weit gehen, daß der Schüler bei jeder größeren Zahl stockt, daß er schon vor einer Addition von drei Brüchen zurückschreckt. Es darf nicht so gehen, wie es manchmal in der mathematischen Wissenschaft der Fall zu sein scheint, daß man zwar wohl die Möglichkeit sieht, eine etwas umfangreiche Operation auszuführen, aber nicht imstande ist, die Möglichkeit in Wirklichkeit umzusetzen.

Das praktische Leben kommt freilich mit sehr wenigen Brüchen aus. Wenn man die Maße zweckmäßig anwendet, kann man sich im täglichen Leben mit einstelligen Nennern, dazu vielleicht noch den Nennern 12, 24 und 25 begnügen, wenn sonst immer konsequent die bequemeren Dezimalbrüche angewandt werden. Divisionen durch Brüche u. dgl. kommen im gewöhnlichen Leben auch recht selten vor. Aus dieser Tatsache darf aber wie gesagt nur die Volksschule, nicht die höhere Schule die Folgerung ziehen, daß die gemeinen Brüche recht knapp zu behandeln sind.

Wie weit ist die Bruchrechnung in früheren Klassen vorzubereiten? Man vertritt neuerdings fast durchweg den Standpunkt, daß spätere Kapitel, wenn das ungezwungen möglich ist, in geeigneter Weise schon früher vorbereitet werden. Auf unseren besonderen Fall angewandt heißt das: Die Brüche sollen den Quintanern nicht als ein gänzliches Novum erscheinen; man soll sie schon in Sexta, vielleicht auch früher gelegentlich erwähnen und benutzen. Was recht gut vorbereitet werden kann, ist der eigentliche Begriff des Bruches und die Schreibweise. Der Zusammenhang mit der Division kann schon in früheren Klassen dadurch zum Ausdruck gebracht werden, daß man an Stelle der Divisionsaufgabe 12 : 4 oder „der vierte Teil von 12" gelegentlich sagen und auch schreiben läßt: $\frac{1}{4}$ von 12. Auch das Rechnen mit benannten Zahlen gibt ungezwungene Beispiele zur vorbereitenden Einübung des Begriffes des Bruches. Schon kleine Kinder wissen sehr wohl, was eine halbe Semmel, eine Viertelstunde ist.

Einige Rechenmethodiker gehen nun aber weit darüber hinaus. Sie nehmen auch Rechenoperationen mit Brüchen, wie Additionen, Subtraktionen, sogar einfache Multiplikationen und Divisionen vorweg. Ein solches Verfahren ist verfehlt. Die beste Vorbereitung der Bruchrechnung ist schließlich das Rechnen mit ganzen Zahlen. Wenn der Lehrer Gefahr läuft, vor lauter Vorbereitungen späterer Stoffe die eigentlichen Stoffe der Klasse zu vernachlässigen, dann ist es schließlich besser, die Vorbereitungen unterbleiben ganz. Man darf sie keinesfalls so in den Vordergrund rücken, daß die anderen Dinge darunter leiden. In die schriftlichen Haus- und Klassenarbeiten, erst recht in Versetzungsarbeiten u. dgl. gehören sie nicht hinein. Übertreibung ist da schädlicher als gänzliche Unterlassung.

Noch ein Wort zu den Anwendungen. Aus den bereits angeführten Gründen sind Beispiele aus dem wirklichen praktischen Leben nur sehr spärlich gesät. Wir helfen uns in den Rechenbüchern damit, daß wir mit halben, viertel, zehntel Mark,

Kilogramm, Liter rechnen. Im praktischen Leben haben derartige Bruchrechnungen aber geringe Bedeutung.

Die Form, in der die angewandten Aufgaben in der Bruchrechnung auftreten, gibt Anlaß, der späteren Schlußrechnung vorzuarbeiten. Man sollte sich bei dem Schluß von der Einheit auf die Vielheit (Multiplikation) und bei dem von der Vielheit auf die Einheit (Division) gleich an ein Schema gewöhnen, das nachher bei der Regeldetri brauchbar ist.

9. Die Dezimalbrüche.

Man wird schon aus der Reihenfolge unserer Abschnitte herauslesen, wie wir uns zu der viel erörterten Frage stellen, ob erst die gemeinen Brüche oder erst die Dezimalbrüche zu behandeln sind. Lassen wir ganz dahingestellt, wie die Volksschule sich entscheidet. Hier, wo es sich um die höheren Schulen handelt, müssen wir die Beantwortung der Frage wesentlich von der Definition der Dezimalbrüche und von der Erklärung der Rechenoperationen mit ihnen abhängig machen, denn diese Dinge sind für die höhere Schule von grundlegender Bedeutung.

Der Dezimalbruch wird auf zweierlei Weise definiert.[1] Einmal als ein Bruch mit einer Zehnerpotenz als Nenner: 7,025 ist $7\frac{25}{1000}$; das andere Mal in Fortsetzung des dekadischen Stellenwertsystems durch Einführung von Einheiten niederer Ordnung: 7,025 in $7 + 0 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$. Mit der ersten Definition kommt man nicht vollständig aus; man würde schon bei periodischen Brüchen auf unendlich große Zähler und Nenner stoßen. Die Schreibweise $\frac{333333\ldots}{999999\ldots}$, die Holzmüller gelegentlich braucht, ist ganz unzulässig. Die zweite Definition enthält aber, gerade wenn man sie auch auf unendliche Dezimalbrüche anwendet, solche Schwierigkeiten, daß man gut tut, von diesen Fällen überhaupt in Quinta abzusehen und also es ebenso zu machen, wie später mit den inkommensurablen Größen in der Flächenlehre und der Ähnlichkeitslehre; man nähert sie durch endliche Dezimalbrüche an.

Der springende Punkt ist nun der: Ist es überhaupt möglich, die Dezimalbruchrechnung zu erklären, ohne die Rechnung mit gemeinen Brüchen vorauszusetzen? Wenn man die erste Definition wählt, so ist das natürlich ausgeschlossen. Wie aber, wenn man die zweite Definition wählt? Das experimentum crucis ist die Multiplikation. Bei der Erklärung der Multiplikation zweier Dezimalbrüche greift man ebenso wie bei der Multiplikation ganzer im dekadischen System geschriebener Zahlen auf die Multiplikation von Summen zurück. Dabei braucht man aber, auch wenn man die ponderierten Dezimalbrüche (s. S. 11) als mehrfach benannte Zahlen — die Benennungen sind die Systemeinheiten — auffaßt, Regeln wie: Zehntel mal Zehntel geben Hundertstel, Zehntel mal Hundertstel geben Tausendstel usf. Zum Verständnis dieser Regeln ist aber meiner Ansicht nach alles das nötig, was ich auch zum Verständnis der Multiplikation von zwei gemeinen Stammbrüchen brauche. Sieht man weiter zu, so ergibt sich, daß bei der Division der Dezimalbrüche not-

[1] Eine nicht unwesentliche Bemerkung über Lesen und Schreiben von Dezimalbrüchen. Es ist unbedingt zu empfehlen, 3,14159... zu lesen: 3 Komma 1, 4, 1, 5, 9, ..., nicht etwa Ziffern zusammenfassen zu lassen, auch nicht bei Dezimalbrüchen mit sehr wenig Stellen. In den periodischen Dezimalbrüchen wird die Periode durch einen darübergesetzten Strich bezeichnet. Also $2{,}1\overline{43}$ bedeutet 2,1434343...

wendig das Erweitern und das Dividieren der gemeinen Brüche vorausgesetzt wird. So wird also das Rechnen mit gemeinen Brüchen bei der Ableitung der Dezimalbruchregeln ständig benutzt. Es wird kaum jemand auf den Gedanken kommen, diese Regeln erst für den Fall von Nennern zu entwickeln, die Zehnerpotenzen sind, und später für beliebige Nenner. Es kommt — um es etwas sehr kraß zu umschreiben — auch niemand auf den Gedanken, den binomischen Lehrsatz erst für die Exponenten 10, 100, 1000 und dann erst für die anderen ganzen Zahlen zu entwickeln. Ich ziehe daraus den Schluß, daß für eine verstandesmäßige Aneignung die Folge: erst gemeine Bruchrechnung, dann Dezimalbruchrechnung einzig richtig ist.

Nun wird aber von vielen Lehrplänen auch höherer Schulen scheinbar der umgekehrte Weg eingeschlagen; dabei wird aber zumeist nicht von Dezimalbrüchen, sondern von Dezimalzahlen gesprochen. Es handelt sich dabei um Überlegungen, die an das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen anknüpfen. Bei Gelegenheit der dezimalen Benennungen ergibt es sich von selbst, daß Ausdrücke wie 7,35 ℳ addiert, subtrahiert oder mit reinen Zahlen multipliziert bzw. durch solche Zahlen dividiert werden. Das ist Sortenrechnen in vereinfachter Schreibweise; 7,35 ℳ bedeutet hier 7 Mark 35 Pfennige, nicht den Dezimalbruch 7,35 mit der Benennung Mark. Natürlich ist das Sortenrechnen mit dieser abgekürzten Schreibweise die beste und wohl auch eine unentbehrliche Vorübung für das spätere Dezimalbruchrechnen. Aber die Grenzen zwischen dieser Vorarbeit und der eigentlichen Dezimalbruchrechnung sind sicher gezogen. Es kommen keine unbenannten Dezimalbrüche und deshalb auch keine Multiplikationen und Divisionen mit Dezimalbrüchen als Multiplikatoren oder Divisoren vor.

Ist die gemeine Bruchrechnung vorausgegangen, so begegnet die Ableitung der Rechenregeln für Dezimalbrüche keinen besonderen Schwierigkeiten, solange man sich auf endliche Dezimalbrüche beschränkt. Bei der Multiplikation wird man die leicht rein mechanisch gehandhabte Regel über die Stellung des Kommas im Ergebnis recht oft wiederholen müssen, auch das Verfahren bei der Division wird besser zu wiederholten Malen besprochen und begründet.

Nichts ist bei der Rechnung mit Dezimalbrüchen — bis hin in die Oberklassen — häufiger als Kommafehler. Was läßt sich dagegen Wirksames ausrichten? Nach meiner Meinung hilft nicht so sehr die mechanische Einprägung von Regeln, als vielmehr eine immer und immer wieder angestellte Überlegung der Gründe des Verfahrens. Dann aber ist eins von allergrößter Wichtigkeit: Ein Überschlag über die Rechnung mit vereinfachten Zahlen. Die Schüler müssen schon in den unteren Klassen systematisch an solches Überschlagen der Ergebnisse gewöhnt werden. Der Überschlag geht am besten der eigentlichen Rechnung voraus. Er wird zunächst mit der Feder ausgeführt, später wird es genügen, ihn jeweilig im Kopfe zu machen. Dann werden die Schüler auch eine Ahnung von der Wichtigkeit des Begriffes der Größenordnung einer Zahl bekommen. Die Schüler neigen allzu sehr dazu, in der richtigen Ziffernfolge, nicht in der allgemeinen Größenordnung das Kriterium für die größere oder geringere Richtigkeit einer Rechnung zu sehen. Das ist auch der Grund, warum sie nicht selten später dem abgekürzten Rechnen ein wenig skeptisch gegenüber stehen, weil nämlich die Ziffern am Schlusse nicht genau stimmen.

Ich spreche mich durchaus dafür aus, daß man sich in Quinta oder Quarta auf endliche und periodische Dezimalbrüche beschränkt. Für alle weiterführenden Überlegungen ist Gelegenheit in späteren Klassen.

Etwas Zeit ist auf die Umwandlung von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche und umgekehrt von Dezimalbrüchen in gemeine zu verwenden. Erfahrungsgemäß stocken hierbei die Schüler noch in späteren Klassen. Dem kann nur dadurch vorgebeugt werden, daß das Verfahren nicht bloß gelegentlich einmal gestreift, sondern mit den Schülern sorgfältig entwickelt und erklärt wird. Schwierigkeiten für das Verständnis liegen ja nicht vor, obwohl solche in theoretischer Hinsicht durch das Eingreifen unendlicher geometrischer Reihen eigentlich genug vorhanden sind. Wenn man in dem schwierigeren Fall der Umwandlung eines gemischt-periodischen Dezimalbruches in einen gemeinen Bruch die x-Bezeichnung benutzt, so baut man in zweckmäßiger Weise der späteren Gleichungslehre vor. Etwa

$$\begin{aligned} 1000x &= 2403{,}7037037\ldots \\ x &= \quad 2{,}4037037\ldots \\ \hline 999x &= 2401{,}3 \\ x &= \frac{24013}{9990} = \frac{649}{270} \end{aligned}$$

Man ist sich wohl jetzt in der höheren Schule allgemein darüber klar, daß man das genaue Rechnen in vielen Fällen durch ein angenähertes Rechnen ersetzen muß. Immer wenn man die Anwendungen der reinen Mathematik aus der Wirklichkeit nimmt, muß man mit gemessenen Größen rechnen. Die aber sind nur angenähert richtig, so nämlich, wie Meßinstrument oder Beobachter es bedingen. Oft auch könnte man mehr aus seinen gemessenen Zahlen herausholen, will es aber aus irgendwelchen Gründen nicht, weil es einem nur auf einen ungefähren Überschlag ankommt, nur auf die Größenverhältnisse.

Auch in der reinen Mathematik sind wir auf Schritt und Tritt, wenn wir wirklich rechnen wollen, auf Näherungswerte angewiesen, die wir zwar nach Bedarf verbessern können, die wir aber immer aus praktischen Gründen nicht bis zu allzu großer Genauigkeit verbessern wollen. Darüber, daß der Bearbeiter eines Geographiebuches die Näherungswerte 1000, 1500 Fuß der Berghöhen genau in Meter, Zentimeter und Millimeter umrechnete, hat man nur ein Lächeln. Aber ist das schlimmer, als wenn jemand in dem Ausdruck $2\pi r$ für π den Näherungswert 3,14 nimmt und für r einen vielstelligen Wert und dann das Ergebnis auf 6 Dezimalen angibt?

Wir werden bei späterer Gelegenheit dazu Stellung zu nehmen haben, wievielstellig man in der Schule rechnen soll. Bei der abgekürzten Dezimalbruchrechnung wird man die Schüler nicht auf eine ganz bestimmte Stellenzahl einarbeiten wollen, man wird es vorziehen, gelegentlich zu wechseln. Aber schon hier gilt, was beim späteren numerischen Rechnen erneut zu beachten ist, daß eine allzu hohe Stellenzahl auf jeden Fall vom Übel ist. 7stellig zu rechnen ist für die Schule überflüssig.

Wenn Hertz in einer Doktorthese sagt: „Ein Fehler von $\frac{1}{100}$ des wahren Wertes bildet die Grenze für die wünschenswerte Genauigkeit, ein Fehler von $\frac{1}{1000}$ des wahren Wertes die Grenze für die mögliche Genauigkeit in der Bestimmung einer physikalischen Konstanten; genauer als bis auf $\frac{1}{10000}$ ihres Wertes läßt sich kaum eine physikalische Konstante auch nur definieren", so sollte das doch auch dem Rechenmethodiker zu denken geben.

Die Frage, auf welcher Stufe denn nun die abgekürzte Dezimalbruchrechnung in der höheren Schule durchzunehmen ist, erfährt sehr verschiedene Beantwortung. Die eine Ansicht ist, man soll damit im Anschluß an die Durchnahme der Dezimalbrüche, also etwa in Quarta beginnen. Im arithmetischen Unterricht findet sich dann immer wieder Gelegenheit, die eingeübten Methoden nicht ungenützt zu lassen.

Die davon am weitesten entfernte Meinung geht dahin, daß ein Einüben besonderer Rechenmethoden überhaupt nicht notwendig ist. Wenn die Schüler später mit angenäherten Dezimalbrüchen rechnen, z. B. bei den Logarithmen, dann entwickeln sie sich schon von selbst die etwa von dem Rechnen mit genauen Zahlen abweichenden Rechenregeln. Die einzige Regel, die man ihnen ausdrücklich sagt — freilich meist schon in früheren Klassen — ist die über das Abkürzen von Zahlen: Man läßt die letzte Ziffer einfach weg, wenn es eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 ist, man erhöht die vorletzte Ziffer, wenn die letzte Ziffer 5, 6, 7, 8 oder 9 ist.

Bei einem solchen Verfahren wird man bemerken, daß die Schüler Multiplikationen vierstelliger oder fünfstelliger Näherungswerte auf 8 bzw. 10 Stellen durchführen, um dann nachher das Ergebnis abzurunden oder gar ungekürzt stehen zu lassen. Das bedeutet im ersten Falle eine außerordentliche Zeitverschwendung, im zweiten obendrein eine Selbsttäuschung. Die Schüler der Oberklassen pflegen dieses Verfahren auch dann vorzuziehen, wenn sie in die Mysterien des abgekürzten Rechnens erst in Obersekunda oder Prima, meist mehr gelegentlich und ohne die rechte Übung, eingeführt werden. Sie fühlen sich in der alten Rechenweise sicherer als in der noch nicht mechanisierten, abgekürzten Methode. Daraus folgt, daß es bei diesen abgekürzten Methoden nicht bloß auf ihr Verständnis ankommt, sondern darauf, daß sie bis zur mechanischen Ausführung geübt werden. Die „unmoralischen" Stellen, wie sie Perry einmal genannt hat, sind nicht nur Luxus, sondern Schwindel.

Eine dritte Gruppe, die zwischen den beiden eben genannten steht, will die abgekürzten Methoden noch nicht in Quarta bringen: Sie hält für den geeigneten Zeitpunkt zur Einführung das Quadratwurzelziehen, wo ja in der Tat der Vorteil abgekürzter Methoden recht in die Augen springt, also etwa Obertertia. Natürlich soll dann nicht bloß das abgekürzte Quadratwurzelziehen, sondern auch die abgekürzte Multiplikation und Division geübt werden.

Unsere Anschauungen von der Bedeutung des angenäherten Rechnens lassen von den drei Ansichten nur die erste und letzte zu. Die Entscheidung zwischen ihnen möchte ich davon abhängig machen, ob in Quarta genügend Zeit für die Einübung der Methoden vorhanden ist. Ohne gründliche Übung ist die ganze Sache überflüssig. Ist aber Zeit vorhanden, dann ist die Durchnahme schon in Quarta vorzuziehen.

Zur Sache selbst ist nur wenig zu bemerken. Die Rechenoperationen erster Stufe für angenäherte Dezimalbrüche geben zu Bemerkungen keinen Anlaß. Bei der Mul-

2,7543 · 17,134	oder	2,7543 · 17,134
2 7543		27 543
1 9280		19 280
275		275
83		83
11		11
47,192		47,192

tiplikation läßt das Schema alles Nötige erkennen; die Erklärung wird keinen Schwierigkeiten begegnen, wenn man bei der Ableitung des Verfahrens die ausführliche Multiplikation daneben hält. Bei der Division erfordert gegebenenfalls die Feststellung eine Untersuchung, wo man mit dem Abkürzen beim Dividieren beginnt.

Über die Frage der abgekürzten Dezimalbruchrechnung liegt eine ausgedehnte Literatur vor; man hat noch weitergehende Abkürzungen in der Schreibweise in Vorschlag gebracht u. dgl. mehr. Die beste Orientierung über die Angelegenheit gibt eine Programmabhandlung von Kullrich.[1]

Darf man, wenn mit Näherungswerten gerechnet wird — und das ist ja schließlich fast immer der Fall, wenn es sich um der Wirklichkeit entlehnte, durch Beobachtung und Messung gefundene Größen handelt — das Gleichheitszeichen = anwenden? Ich habe schon auf eine Diskussion über diesen Punkt hingewiesen (s. S. 18, Anm. 1). Nach meiner Meinung ist gegen die Verwendung des =-Zeichens nichts einzuwenden, wenn aus der ganzen Anlage der Rechnung hervorgeht, daß es sich um Näherungswerte handelt, die bis zu einer ganz bestimmten Stelle (seien es drei, vier oder fünf) genau sind. Wo freilich in strenge Rechnungen Näherungswerte eingeschaltet werden, ist die Näherungsgleichheit anzudeuten. Ich werde also, wenn es sich um fünfstellige Rechnung handelt, schreiben $\log 2 = 0{,}30103$ oder $\pi = 3{,}1416$. Wenn es sich aber beispielsweise in der Lehre von den unendlichen Reihen um eine wirkliche Berechnung des dekadischen Logarithmus von 2 oder in der Planimetrie um eine Auswertung des eben definierten Wertes π handelt, dann werde ich schreiben $\log 2 \approx 0{,}30103$ und $\pi \approx 3{,}14$ oder $\pi \approx \frac{22}{7}$.

10. Die Regeldetri.

Vom arithmetischen Standpunkte aus ist die Regeldetri die wichtigste Verknüpfung von Rechenoperationen zweiter Stufe, von Multiplikation und Division. In methodischer Hinsicht kommt ihr aber eine noch weit größere Bedeutung zu. Sie ist mit ihren einfachen Schlüssen eine ausgezeichnete Vorstufe für das logische Denken. Man würde sich eines bedeutsamen Mittels begeben, wenn man diese Seite der Regeldetri gerade an den höheren Schulen nicht voll ausnutzen wollte. Auch hier wieder ist es weit wichtiger, der Schüler kommt überlegend zum Ziel, als er operiert mechanisch nach eingeübten Regeln.

Es sei die Aufgabe vorgelegt: „Wieviel Kilogramm erhält man für 20 ℳ, wenn 6 kg 15 ℳ kosten?“ Drei Werte sind gegeben, 20 ℳ, 6 kg, 15 ℳ; aus ihnen ist ein vierter zu finden. Zunächst entsteht die Frage: welche Benennung hat dieser

[1] E. Kullrich, Die abgekürzte Dezimalbruchrechnung. Programm Realschule Schöneberg, 1898. — Im übrigen verweise ich auf A. Witting, Abgekürzte Rechnung (MPhB 47) Leipzig, Teubner, 1922.

gesuchte Wert? Die „Fragebenennung" ist hier, wie aus der Form der Aufgabe sofort hervorgeht, Kilogramm. Wir können jetzt den „Fragesatz" formulieren; er heißt, wenn wir die Fragebenennung an den Schluß setzen:

Für 20 ℳ erhält man x kg.

Ich habe für die unbekannte Größe den Buchstaben x geschrieben; ich ziehe das dem oft benutzten Zeichen ? vor. Auch die Lesart: „Für 20 ℳ erhält man wieviel kg?" ist nicht gerade gutes Deutsch. Selbstverständlich wird jeder, der schon früher in algebraischen Aufgaben mit x gerechnet hat, es auch hier benutzen. Aber auch demjenigen, der in den vorhergehenden Klassen bei algebraischen Aufgaben von der Benutzung des Buchstabens x absah, empfehle ich, hier bei der Regeldetri einen Anfang mit der Buchstabenbezeichnung zu machen.

Der Fragesatz wäre nicht zu beantworten, wenn nicht von der Aufgabe eine Bedingung gegeben wäre. Diese bringt man in die Form des „Bedingungssatzes", in dem die gleiche Benennungsfolge wie im Fragesatz notwendig ist. Hier also würde der Bedingungssatz lauten:

Für 15 ℳ erhält man 6 kg.

Man unterschätze nicht die Schwierigkeit und bei ihrer selbständigen Überwindung die logische Schulung, die der Schüler zur Umstellung des Bedingungssatzes nötig hat, wenn die Aufgabe davon spricht, daß 6 kg 15 ℳ kosten.

In welcher Reihenfolge man Frage- und Bedingungssatz schreibt, ist an sich ohne besondere Bedeutung. Das Natürliche scheint die Folge: Bedingungssatz, Fragesatz zu sein. Nun muß man aber bei der Niederschrift des Bedingungssatzes schon genau überlegt haben, welches die Fragebenennung ist. Außerordentlich häufig erwischen die Schüler im Bedingungssatz, den sie ohne Besinnen nach dem Wortlaut der Aufgabe hinschreiben, die falsche Reihenfolge und sitzen dann nachher fest. Aus diesem Grunde verdient die umgekehrte Reihenfolge der beiden Sätze den Vorzug. Bei der Niederschrift des Fragesatzes kann ein Zweifel über die Aufeinanderfolge der Benennungen nicht entstehen.

Ich rate dringend, die Sätze ausführlich, wenn auch unter gelegentlicher Zulassung verständlicher Abkürzungen, niederzuschreiben. Man sieht manchmal den verbindenden Text lediglich durch einen Strich angedeutet; also in unserem Beispiel:

20 ℳ — x kg
15 ℳ — 6 kg.

Das hat seine großen Bedenken. Der Schüler weiß so nicht, wie er die Sätze lesen soll, welches die richtige Bedeutung ist.

Nun zur Lösung der Aufgabe. Man ersetzt die Aufgabe durch zwei; statt gleich von einer Mehrheit auf eine andere, schließt man erst von einer Mehrheit auf die Einheit, dann von der Einheit auf die Mehrheit. Man sagt also — und schreibt das am besten zunächst auch ausführlich hin:

Für 1 ℳ erhält man 6 kg : 15 = 0,400 kg,
Für 20 ℳ erhält man 0,400 kg · 20 = 8 kg.

Dieses Verfahren nennt man „Schlußrechnung". Es wird ergänzt und vereinfacht durch eine andere Methode, den sog. „Bruchansatz". Eben haben wir

die Rechenoperationen, die jeder Schluß forderte, jeweilig durchgeführt. Das ist nicht nötig, meist auch unpraktisch, weil man sich dadurch vieler Möglichkeiten, die Rechnung zu vereinfachen, begibt. Wir können auch schließen, ohne die Rechnung durchzuführen:

Für 1 ℳ erhält man den 15. Teil,
Für 20 ℳ erhält man das 20fache,

wobei jedesmal zu ergänzen ist: von dem, was als Ergebnis des vorhergehenden Schlusses anzusehen ist. Die eigentliche Rechnung wird dann am Bruchstrich ausgeführt; man schreibt[1], kürzt und errechnet:

$$x = \frac{\overset{2}{\cancel{6}} \cdot \overset{4}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{15}}} = 8 \quad \text{oder besser (vgl. S. 43):} \quad x = \frac{6 \cdot 20}{15} \overset{5}{=} \frac{6 \cdot 4}{3} \overset{3}{=} 8$$

Natürlich kann von dem Bruchansatz erst nach der Lehre von den gemeinen Brüchen die Rede sein. Wenn man also in Sexta vor der Bruchrechnung Regeldetriaufgaben rechnet, so wird man bei der Schlußrechnung Halt machen müssen.

Gelegentlich können gedankliche Schwierigkeiten beim Schüler hindernd eingreifen, an denen der Lehrer achtlos vorbeigeht. Jemand kauft 25 Pferde, darunter sind 4 Schimmel. Wieviel Prozent sind das, m. a. W. auf wieviel Schimmel wird er bei 100 Pferden zu rechnen haben? Wenn jetzt der erste Schluß lautet: Auf ein Pferd kommen $\frac{4}{25}$ Schimmel, so möchte sich mancher Schüler daran stoßen.

Noch eine mehr formale Bemerkung zu dem eben behandelten Rechenschema. Ist es erlaubt, dem im Bruchansatz erhaltenen Ergebnis die Fragebenennung anzuhängen? Darf man also schreiben

$$x = \frac{6 \cdot 20}{15} = 8 \text{ kg}?$$

Nein! Denn links steht eine unbenannte, rechts eine benannte Zahl; dazwischen ein Gleichheitszeichen zu setzen, ist falsch. Entweder man setzt auch überall hinter die Bruchstriche die Benennung, oder aber man läßt sie auch im Ergebnis weg. Das letztere halte ich für praktischer. Nur ist dann nötig, was bei allen eingekleideten Aufgaben gilt, die Antwort auf die Aufgabe noch einmal in einem vollständigen, wenn auch kurzen Satze zusammenzufassen. Da erhält dann die Zahl ihre Benennung.

Das Schlußverfahren ist bei der direkten ebenso wie bei der indirekten Proportionalität anwendbar. Nur muß der Schüler dabei sehr achtsam sein. Aber gerade in der Prüfung, ob direkte oder indirekte Proportionalität vorliegt, liegt ein für die Verstandesbildung sehr förderliches Moment. Ein ganz einfacher Überschlag über die Größe von x vor der Niederschrift des ersten Schlusses ist sehr zu empfehlen. Wenn der Schüler sich im Falle unseres Beispiels fragt, ob er für 20 ℳ mehr erhält als für 15 ℳ, so ist schon viel gewonnen; oft wird er auch schon ungefähr die Summe angeben können.

[1] Eine äußerliche, aber nicht unwichtige Regel: Man schreibe erst den Bruchstrich, und zwar in Höhe des Gleichheitszeichens, dann erst Zähler und Nenner!

Einige Schwierigkeiten machen erfahrungsgemäß dem Schüler die Schlüsse, bei denen zur vorn stehenden Benennung ein echter Bruch gehört. Der Grund ist der, daß bei der Multiplikation mit einem echten Bruch das Ergebnis kleiner ausfällt, als der Multiplikandus, im Gegensatz zur Multiplikation mit einer ganzen Zahl, und ähnlich bei der Division. Heißt die Aufgabe etwa

Für $\frac{3}{4}$ ℳ erhält man x kg
Für 15 ℳ erhält man 6 kg
Für 1 ℳ erhält man den 15. Teil
Für $\frac{3}{4}$ ℳ erhält man .....,

so wird der Schüler nur zu leicht geneigt sein, statt: das $\frac{3}{4}$fache, zu schreiben: den $\frac{3}{4}$. Teil. Da hilft nur der gute Rat, zunächst erst einmal statt der echten Brüche ganze Zahlen zu nehmen und an ihnen zu entscheiden, ob man zu multiplizieren oder zu dividieren hat.

Es erhebt sich angesichts solcher Überlegungen die Frage: Soll man zur näheren Kennzeichnung der Sachlage schon hier im Rechnen auf die Proportionen eingehen, also die Regeldetri als Anwendung der Proportionenlehre behandeln? In unserem Beispiel wird man von dem Satze ausgehen, daß die Stoffmengen dem Preise direkt proportional sind, und wird dann die Proportion haben:

$$15 : 20 = 6 : x.$$

In der Tat ist von Rechenmethodikern der Volksschule ein solches Vorgehen empfohlen worden. Man ist aber heute in der Volksschule wieder fast ganz davon abgekommen. Wo der Begriff des Verhältnisses auf Volksschulen eine Rolle spielt, da wird er vornehmlich bei der Mischungs- und Gesellschaftsrechnung, wohl auch in der Raumlehre benutzt. Es bleibt zu erwägen, ob nicht vielleicht die Proportionsmethode auf den höheren Schulen den Vorzug vor anderen verdient, weil sie eine gute Vorbereitung für spätere Teile des arithmetischen Lehrstoffes bildet. Ich bin nicht dieser Ansicht. Einmal glaube ich, daß man überhaupt in unserem arithmetischen Unterricht einer aus dem Zusammenhange mit der Bruchrechnung herausgerissenen Proportionenlehre viel zu viel Gewicht beilegt; ein Nachklang der starken Betonung der Lehre bei Euklid. Dann aber sehe ich im Schlußverfahren ein weit stärkeres, verstandesbildendes Moment als im Proportionsschluß. Schließlich muß der Schüler ja auch beim Schlußverfahren sich Rechenschaft darüber geben, ob die Größen direkt oder indirekt proportional sind, wenn er auch diese Ausdrücke noch nicht anwendet. Die Form aber, die dem Inhalt beim Schlußverfahren gegeben wird, scheint mir dem kindlichen Verstande angemessener als beim Proportionssatz.

Man darf die Methode des Schlußverfahrens nicht in der Weise enger als nötig fassen, daß man bei dem Schluß auf eins nun auch immer die bei der vorhandenen Benennung gegebene Einheit benutzt. So wird man in unserem Beispiel, statt von 15 auf 20 über 1 zu schließen, auch über 5 schließen können. Besonders wenn Brüche auftreten, liegt ein solches Verfahren nahe. Von $\frac{3}{4}$ auf $\frac{7}{8}$ schließt man zweckmäßig nicht über 1, sondern über $\frac{1}{8}$. Eine große Bedeutung kommt freilich dieser Abänderung nicht zu. Sie nimmt einfach Kürzungen und Erweiterungen bei dem Bruchansatz vorweg.

Verwandtschaft mit diesem Verfahren zeigt die welsche Praktik. Hier werden additive und multiplikative Zerlegungen der Zahlen zu Hilfe genommen. Es liege etwa die Aufgabe vor:

45 m kosten x ℳ
100 m kosten 38,50 ℳ.

Dann rechnet man nach der welschen Praktik:

50 m kosten	19,25 ℳ	oder	10 m kosten	3,85 ℳ
5 m kosten	1,925 ℳ		40 m kosten	15,40 ℳ
45 m kosten	17,325 ℳ,		5 m kosten	1,925 ℳ
			45 m kosten	17,325 ℳ.

Diese welsche Praktik sollte man nie als Normalverfahren einführen. Sie erfordert in jedem einzelnen Falle den besonderen Zahlverhältnissen angepaßte Schlußfolgen, und es wird immer Schüler geben, die zwar auf der bequemen Straße des Schlußverfahrens mit Bruchansatz vorwärts kommen, die praktischen und arithmetisch kurzweiligen Nebenwege der welschen Praktik aber nicht bemerken. Im Unterricht wird man das Verfahren gelegentlich erwähnen dürfen und nichts dawider haben, wenn befähigte Schüler es auch in ihren häuslichen Arbeiten anwenden. Besondere Bedeutung hat das Verfahren beim Kopfrechnen.

Bei der einfachen Regeldetri war aus drei Größen eine vierte zu finden. Bei der zusammengesetzten Regeldetri sind in ganz ähnlicher Weise aus fünf Größen die sechste, aus sieben die achte usf. zu bestimmen. Eine solche Aufgabe läßt sich wieder durch eine Schlußreihe und einen Bruchansatz lösen.

Es liege, gleich in Frage- und Bedingungssatz gekleidet, die Aufgabe vor:

8 Arbeiter verdienen in 10 Wochen x ℳ
12 Arbeiter verdienen in 6 Wochen 900 ℳ;

dann schließt man der Reihe nach:

1 Arbeiter verdient in 6 Wochen den 12. Teil,
8 Arbeiter verdienen in 6 Wochen das 8fache,
8 Arbeiter verdienen in 1 Woche den 6. Teil,
8 Arbeiter verdienen in 10 Wochen das 10fache.

$$x = \frac{900 \cdot 8 \cdot 10}{12 \cdot 6} \overset{4 \,:\, 3}{=} \frac{300 \cdot 2 \cdot 10}{3 \cdot 2} \overset{3 \,:\, 2}{=} 1000.$$

Die Reihenfolge der Schlüsse liegt, wie man sieht, nicht eindeutig fest.

Neben dem Schlußverfahren hat bei längeren Regeldetriaufgaben der Kettensatz seine Bedeutung. Es liege die Aufgabe vor: Wieviel Mark kosten 12 m Seidenzeug, wenn 6 Stück zu 45 Ellen mit 798,75 Fr. bezahlt werden, und wenn 3 Ellen zu 2 m, 2½ Fr. zu 2 ℳ gerechnet werden?

Man stellt zum Zweck der Lösung die nebenstehende Kette auf. Es wird der Anfang mit der unbekannten Größe gemacht, dann ist die Kette in der Weise weitergeführt, daß jede Benennung am Schlusse einer Zeile übereinstimmt mit der Benennung am Anfange der nächsten Zeile. Jede Zeile enthält die zwischen zwei Benennungen vorhandene bekannte Bedingung. Die Kette ist geschlossen, wenn das letzte Glied

x ℳ kosten 12 m,
2 m entsprechen 3 Ellen,
45 Ellen sind 1 Stück,
6 Stück kosten 798,75 Fr.,
2,5 Fr. sind 2 ℳ.

wieder die Benennung des ersten hat. Jetzt besagt der Kettensatz einfach: Man hat die Glieder auf der rechten Seite als Faktoren des Zählers, die Glieder auf der linken Seite — von x abgesehen — als Faktoren des Nenners zu schreiben. Man erhält also z. B. im Falle der vorliegenden Aufgabe:

$$x = \frac{12 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 798{,}75 \cdot 2}{2 \cdot 45 \cdot 6 \cdot 2{,}5}.$$

Das Verfahren gibt sich so als eine mechanisch recht bequem ausführbare Rechenanleitung. Die Erklärung der Regel ist freilich nicht so einfach. Am raschesten begründet man sie, wenn man die Reihe der Bedingungssätze vom letzten beginnend in einzelne einfache Regeldetriaufgaben auflöst, also zunächst an der Hand des Bedingungssatzes

2,5 Frank sind 2 ℳ

die Frage nach dem Wert von 798,75 Frank in ℳ beantwortet, dann an der Hand des Bedingungssatzes

6 Stück kosten a ℳ,

wo jetzt a bekannt ist, den Preis von 1 Stück usf. Jede Aufgabe der zusammengesetzten Regeldetri kann man nach dem Kettensatzverfahren rechnen, wenn die entscheidende Vorbedingung erfüllt ist, daß die auftretenden Größen sämtlich in direktem Verhältnis stehen. Darin liegt eine sehr merkliche Einschränkung der Anwendbarkeit. So kommt es, daß die Zahl der Anwendungen, für die der Kettensatz eine wirkliche Bedeutung hat, in höheren Schulen recht gering ist; anders in kaufmännischen Schulen, z. B. bei Umrechnungen in ausländische Maße. Überhaupt sind zusammengesetzte Regeldetriaufgaben im wirklichen Leben recht selten; nur die einfache Regeldetri spielt eine Rolle. Damit entfällt für die höhere Schule die Notwendigkeit, die Kettenregel einzuüben und sich der mühsamen und zeitraubenden Aufgabe zu unterziehen, sie auch zu erklären.

Auch die zusammengesetzte Regeldetri nach dem Schlußverfahren in besonderem Umfange zu berücksichtigen, scheint mir nicht nötig. Ganz auf sie zu verzichten, wie es manche Volksschulmethodiker anraten, halte ich aber nicht für gut. Es steckt doch in der Aneinanderknüpfung mehrerer Schlüsse eine gute logische Schulung, zumal wenn direkte und indirekte Verhältnisse nebeneinander zur Anwendung kommen, zudem braucht man sie in der Zinsrechnung.

Die Stoffe, denen die Regeldetriaufgaben zu entnehmen sind, sollen Wirklichkeitsstoffe sein. Wir werden gleich Gelegenheit nehmen, darauf näher einzugehen. Hier nur einige Bemerkungen, die gerade bei den Regeldetriaufgaben angebracht sind.

Der Wirklichkeit entlehnte Aufgaben müssen sich immer gewisse Idealisierungen gestatten. Nicht immer wird z. B. die Proportionalität so vollkommen zutreffen, wie es die Aufgabe annimmt. Alle Arbeiter arbeiten nicht gleich schnell und gleich gut. Die Leistung ist durchaus nicht immer der Arbeitszeit proportional. Es ist ganz gut, wenn einmal bei einer Aufgabe auf diese in der Lösungsweise steckenden, durchaus nicht immer zutreffenden stillschweigenden Voraussetzungen hingewiesen wird. Auch sonst kann es sich ereignen, daß eine scheinbar ganz vernünftige Auf-

gabe auf eine Unmöglichkeit führt. Die Meggendorfer Blätter haben einmal eine Geschichte erzählt, von der mancher Rechenlehrer lernen kann. Da findet sich folgender Brief eines armen Vaters:

„Mein Sohn hat eine Regeldetriaufgabe von der Schule heimgebracht: Wenn 10 Maurer bei 10stündiger Arbeitszeit in 150 Tagen ein Haus bauen, wieviele Maurer bauen dasselbe Haus bei 1stündiger Arbeitszeit in 30 Tagen? Mein Sohn setzte sich hin und rechnete nach Vorschrift:

$$\frac{10 \cdot 150 \cdot 10}{30 \cdot 1} = 500.$$

‚Vater, ich hab's', rief mein Sohn, ‚500 Maurer können das Haus in 30 Tagen bauen.'

‚Hm', sagte ich zweifelnd, ‚es käme auf einen Versuch an.'

Mein Sohn berichtet diesen Zweifel selbstverständlich seinem Lehrer. Und dieser läßt auf gleichem Wege wieder sagen, ich möchte doch gefälligst sagen, was ich an dem Beispiel auszusetzen hätte.

‚Nichts, Herr Lehrer,' schreibe ich in einem Briefe, ‚ich wollte nur bemerken, daß alsdann an 15000 Maurer dieses Haus in einem Tage bauen, vorausgesetzt, daß sie sich nicht gegenseitig auf ihre Hühneraugen treten. Und wissen Sie, Herr Lehrer, wenn ein Lehrer einen Jungen 7 Jahre unterrichtet, um einen tüchtigen Menschen aus ihm zu machen, wieviele Lehrer diese Arbeit in einem Tage vollbringen können? Nun, etwa 2100 Lehrer, Herr Lehrer ...'

Was geschieht? Der Lehrer will mich wegen Beleidigung verklagen. Und ich kann doch nichts dafür, sondern die Regeldetri. Fritz Müller."

Nicht wenige Rechenbücher verfahren so, daß sie die Aufgaben über direkte Regeldetri von denen über indirekte Regeldetri trennen. Dieses Verfahren ist keineswegs zu billigen. Es ist ganz begreiflich, daß man die Regeldetri zunächst an einigen Aufgaben mit direkter Proportionalität behandelt und daran Schlußverfahren und Bruchansatz entwickelt. Dann wird man an einigen Beispielen zeigen, wie man sich bei indirekter Proportionalität zu verhalten hat. Wenn das Schlußverfahren zu rechtem Verständnis gebracht ist, wird das keine Schwierigkeiten haben. Nun aber sollte man direkte und indirekte Regeldetri abwechselnd bringen. Der Schüler darf keinesfalls schon aus der Überschrift des betreffenden Abschnittes im Rechenbuch erfahren, welche von beiden Möglichkeiten zutrifft. Sonst kommt man wieder in das alte, mechanische Rechnen hinein, wie es zu den Zeiten Adam Rieses Mode war. Es schadet auch nichts, wenn man einmal eine solche lebende Rechenmaschine zur Freude der Mitschüler ganz gehörig aufs Glatteis führt, etwa mit der schönen Aufgabe: Zwei Schüler gehen von Berlin nach Potsdam in 7 Stunden; wie lange gehen drei Schüler?

Auch bei der Regeldetri werden schriftliches und mündliches Rechnen nebeneinander hergehen. Es wird hier zu erwägen sein, ob man nicht von dem üblichen Wege, erst das mündliche Verfahren, dann das schriftliche einzuüben, hier, wo es sich in erster Linie um logische Elemente handelt, abgeht und mit dem schriftlichen Rechnen beginnt, und zwar erst mit ausführlicher Niederschrift aller Schlüsse; später kann gleich am Bruchstrich gerechnet werden.

Während man sich bei dem mündlichen Rechnen notgedrungen auf kleine und aufgehende Zahlen beschränken muß, sollte man beim schriftlichen Rechnen nicht bloß aufgehende Zahlenverhältnisse zulassen. Ist die abgekürzte Dezimalbruchrechnung bekannt, so bietet sich gute und nützliche Gelegenheit, sie hier zu üben.

11. Die bürgerlichen Rechnungsarten.

Der Rechenunterricht darf sich nicht auf das Rechnen mit abstrakten Zahlen beschränken. Er treibt seinem ganzen Charakter nach angewandte Mathematik. Nicht nur, daß die abstrakten Rechenoperationen, von denen wir bisher sprachen, immer auf die Welt der realen Dinge angewandt werden, es sind geradezu sog. bürgerliche „Rechenarten" ausgebildet worden. Diese Rechenarten haben allerdings vielfach bereits wieder die Fühlung mit dem wirklichen Leben verloren; sie spielen sich dann in einem ganz eigenartig begrenzten Leben ab. Es ist der Bereich des Kramladens, den man nur noch in den Winkeln der Stadt findet; es wird mit Eiern, Äpfeln und anderen schönen Sachen gehandelt, Takabsorten werden gemischt, aus n Sorten Wein wird unter Hinzufügung von recht viel Wasser eine $(n+1)$te hergestellt. Dann wieder sehen wir in die Werkstatt des Alchemisten, der allerlei Legierungen herstellt, und so fort.

Dieses Sachallerlei, das doch im Grunde ein ewig wiederkehrendes Sacheinerlei ist, muß der neuen Zeit weichen. Die Welt der Aufgaben, wie sie Adam Riese und die Rechenmeister seiner Zeit erdacht oder übernommen haben, muß verschwinden. Das moderne Leben zieht ein mit seinem Handel, Verkehrswesen, seinem Geldbetrieb. Kursbuch, Eisenbahnkarte, das Preisverzeichnis aus der Zeitung, den Postbetrieb muß man schon in den untersten Klassen heranziehen, damit sie lebenswahre Aufgaben hergeben. Auch für den Gymnasiasten ist das wichtiger, als wenn er antike Aufgaben löst, wie die folgende aus einer Sammlung antiker Rechenaufgaben:

Wie stark war das Schiffsheer, welches Xerxes 480 v. Chr. von Kleinasien nach Griechenland führte, wenn die Besatzung jeder der 1207 Dreiruder aus 230 Mann bestand und außerdem noch 3000 kleinere Schiffe mit durchschnittlich je 80 Mann folgten?

Da sollte doch lieber einmal ein Spötter ausrechnen lassen, wie lange es dauert, bis die 5 Millionen Perser, die Herodot Xerxes zuschreibt, in Reihen zu je fünf durch den Engpaß von Thermopylä marschiert sind.

Alles in allem lehrt ein Blick in die gebräuchlichsten Rechenbücher, besonders in die neueren, daß heute in der Heranziehung des wirklichen Lebens schon Erfreuliches getan wird.[1] Man kann zuweilen sogar ein gewisses Bedenken nicht unterdrücken. Ein Extrem hat das andere zur Folge. Und wenn ehedem die Rechenbücher weltfremd waren, so hat man heutzutage manchmal den Eindruck, als ob das Leben das Rechnen zu überwuchern droht. Vor lauter Sachbelehrung wird manchmal vergessen, daß es letzten Endes doch auf das Rechnen ankommt. Wenn bei einer Aufgabe die Sachbelehrung längere Zeit erfordert als die Rechnung, dann soll man diese Aufgabe getrost streichen.

Es liegt überdies die Gefahr nahe, schon in Sexta Dinge vorweg zu nehmen, für die dieses Alter noch nicht reif ist. Man soll dem Sextaner noch nicht mit Einkommensteuer, Invaliditätsversicherung u. dgl. kommen. Nicht was man allenfalls dem Schüler noch klar machen kann, gehört als Sachunterweisung in den Rechenunterricht, sondern das, was dem Sextanerverstande gerade gemäß, was ihm inhalt-

[1] Ich nenne als Beispiel gern das meinem Unterrichtswerk angegliederte Rechenbuch von P. B. Fischer (Leipzig, Teubner, 1916).

lich selbstverständlich ist. Fernzuhalten ist alles, wofür er noch zu jung ist[1], und auch alles, was allzu spezieller Natur ist, so daß man es auch bei dem durchschnittlich Gebildeten nicht voraussetzt. Dahin gehören Fachausdrücke der einzelnen Handwerker für Gegenstände und Fertigkeiten in ihrem Gewerbe.

Doch nun zu den eigentlichen bürgerlichen Rechenarten. Es gehören hierher die Durchschnittsrechnung, die Gesellschaftsrechnung, die Mischungsrechnung, die Prozentrechnung; daran schließen dann in stetigem Übergange die kaufmännischen Rechenarten an.[2]

Was von der Durchschnittsrechnung wichtig erscheint, ist lediglich die Feststellung des arithmetischen Mittels von mehreren Größen. Es handelt sich also, wenn ich das durch eine Formel ausdrücke, die im Rechenunterricht ja nicht gegeben wird, um den Ausdruck:

$$m = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Unbekannt sein kann zunächst die Größe m. Von geringer praktischer Bedeutung sind die Fälle, daß n oder eine der Größen a gesucht wird.

Eine Weiterführung der Durchschnittsrechnung ist die Mischungsrechnung. Es handelt sich um die Mischung mehrerer Stoffe; man kennt die Preise $p_1, p_2, \ldots$ der Teilmengen $m_1, m_2, \ldots$ und sucht nun den Preis der Mischung, das heißt die Größe

$$p = \frac{m_1 p_1 + m_2 p_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}.$$

Statt nach p kann auch nach einem der $p_1, p_2, \ldots$ oder nach dem Mischungsverhältnis gefragt werden (im letzteren Falle dürfen nur zwei Mengen vorhanden sein, sonst wird, falls nicht andere Bedingungen gegeben sind, die Lösung unbestimmt).

Bei der Gesellschaftsrechnung wird eine Menge m entweder in gegebenem Verhältnis geteilt, so daß sich also die Teilmengen $m_1, m_2, \ldots$ in der Proportion

$$m_1 : m_2 : \ldots = a_1 : a_2 : \ldots$$

darstellen. Dann ist

$$m_1 = \frac{a_1 m}{a_1 + a_2 + \ldots}, \quad m_2 = \frac{a_2 m}{a_1 + a_2 + \ldots}, \quad \ldots$$

Man nennt eine solche Verteilung geometrisch. Gefragt wird in der Regel nach $m_1, m_2, \ldots$ Bei der arithmetischen Verteilung werden die Differenzen zwischen den einzelnen Teilmengen angegeben. Es ist also:

$$m_2 = m_1 + b_2, \; m_3 = m_1 + b_3, \; \ldots$$

wobei dann wieder $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots = m$ gegeben ist.

---

[1] Einige gehen so weit, zu behaupten, sogar die Zinsrechnung sei dem Quartaner zu hoch. „Was weiß er von Kapital, von Zinsen, der im günstigsten Falle an der Grenze angelangt ist, wo das Wort ‚Taschengeld' aus dem Reiche der Träume in die Wirklichkeit herabsteigt?" sagt M. Cantor einmal.

[2] Vgl. H. E. Timerding, Die kaufmännischen Aufgaben im mathematischen Unterricht der höheren Schulen (Deutsche IMUK-Abhandlungen, Bd. III, Heft 5), Leipzig (Teubner) 1911. — Eine gute Zusammenstellung aller hierhergehörigen Fragen gibt F. Unger, Der Rechenunterricht auf allen Stufen, Leipzig (Klinkhardt) 1912.

Schließlich kann die Verteilung im arithmetisch-geometrischen Verhältnis vor sich gehen: Die Teilmengen von der Form

$$m_2 = a_2 m_1 + b_2,\ m_3 = a_3 m_1 + b_3,\ \ldots,$$

wo $a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots$ Konstanten sind.

Bei der Prozentrechnung handelt es sich um den Vergleich zweier Größen a und b. Gilt die Gleichung $a = \frac{p}{100} b$, dann sagt man, a ist p% von b. Im gegebenen Falle kann nach a, b oder p gefragt sein, wenn die beiden anderen Größen jeweilig bekannt sind.

An die Prozentrechnung schließen sich eng Rabattrechnung, Gewinn- und Verlustrechnung, Tararechnung; es handelt sich hier um Anwendungsformen der Prozentrechnung.

Weitergehend ist die einfache Zinsrechnung, bei der man die Zinsen der Zeit proportional setzt. Man hat also für die Beziehung zwischen einfachen Zinsen z, Kapital k, Zeit (in Jahren) i und Prozentsatz p die sog. „kip-Regel" $z = \frac{k\,i\,p}{100}$. Darin können Unbekannte sein z, k, i und p.

Ich hielt es für angebracht, erst einmal den rein mathematischen Gehalt dieser ja allgemein bekannten bürgerlichen Rechenarten herauszuschälen. Ich habe damit zugleich angedeutet, wie weit ich zunächst den Bereich der bürgerlichen Rechnungsarten stofflich ausdehnen möchte.

Wie soll sich nun der Rechenunterricht zu diesem Stoffe stellen? Während der Regeldetri eine sehr bedeutende praktische und gleichzeitig formale Wichtigkeit zukommt, ist das nicht in gleichem Maße von allen diesen bürgerlichen Rechnungsarten zu sagen. Manchen Gebieten würde besser eine Stelle bei der Durchnahme der Gleichungen ersten Grades angewiesen. In der Tat empfehlen z. B. die preußischen Lehrpläne für Lyzeen, weil dort der Rechenunterricht in den unteren Klassen sehr unter Zeitmangel leidet, bei Gelegenheit der Gleichungen ersten Grades auf diese bürgerlichen Rechenarten ausführlich zurückzukommen. Insbesondere ist ein solches Hinausschieben bei der Gesellschaftsrechnung erwünscht. Einmal tritt bei den Verteilungen nach geometrischem Verhältnis der Proportionsbegriff auf, dann aber rechnet man in der Gesellschaftsrechnung überhaupt, wie wir gleich sehen werden, am besten mit einem x-Ansatz, wie es später in der Gleichungslehre geschieht.

Die Bedeutung der bürgerlichen Rechenarten wird von den Lehrplänen darin gesehen, daß sie im praktischen Leben gebräuchliche Anwendungen der Regeldetri oder doch der dabei üblichen Schlüsse bringen. Das trifft gewiß von der Prozentrechnung mit allen ihren besonderen Formen und von der Zinsrechnung zu. Anders steht es aber mit der Mischungs- und der Gesellschaftsrechnung. Tatsächlich werden diese ganz und gar auf die alten Cossisten zurückgehenden Rechnungsarten im täglichen ebenso wie im geschäftlichen Leben äußerst selten gebraucht. Daraus ist der Schluß zu ziehen, daß ihnen auch im Unterrichte möglichst wenig Zeit einzuräumen ist. Es hat doch wirklich keinen Zweck, die üblichen Testamentsverteilungen, Weinpantschereien, Tabaksmischungen u. dgl. der Aufgabensammlungen durchzurechnen,

wenn heute niemand mehr so kalkuliert. Eine praktische Bedeutung spreche ich dagegen der Durchschnittsrechnung zu. Es kommt recht oft vor, daß aus mehreren gegebenen Werten ein Durchschnittswert zu finden ist, und deshalb soll man auch in der Schule nicht an solchen Aufgaben vorübergehen. Sehr viel Zeit werden sie ja ohnedies nicht in Anspruch nehmen.

Zu der methodischen Behandlung der Rechenarten genügen einige wenige Bemerkungen. Bei der praktischen Ausrechnung des Durchschnittswertes aus einer größeren Anzahl von Einzelwerten empfiehlt es sich, zunächst einen ungefähren Durchschnittswert zu wählen, dann die Differenzen gegen den vorläufigen Wert zu bilden und danach den wirklichen Durchschnittswert zu bestimmen. Übrigens verfährt man in ähnlicher Weise zweckmäßig auch bei anderen Rechnungen, z. B. wenn man die „Klassennummer" von Schülern feststellt, d. h. die Summe der Produkte aus Wochenstundenzahl und Zensur der einzelnen wissenschaftlichen Unterrichtsfächer.

Ich nehme hier als Beispiel die in Preußen alljährlich zum 1. Februar auszuführende Bestimmung des Durchschnittsalters in den einzelnen Klassen der Schulen.

Es genügt, eine Klasse von wenigen Schülern anzunehmen, obwohl der Vorteil recht deutlich erst bei einer größeren Zahl in die Augen springt. Man erhält von den einzelnen Schülern, vielleicht in alphabetischer Folge, die folgenden Angaben:

Schüler	Alter	Abweichung vom vorläufigen Durchschnitt		
A	12,7	— 0,3		
B	13,2	+ 0,2	+ 0,2	
C	11,9	— 1,1		— 1,1
D	14,0	+ 1,0		
E	13,3	+ 0,3		
F	12,0	— 1,0		
G	13,0	—		
H	12,5	— 0,5		— 0,5
I	13,6	+ 0,6	+ 0,6	
K	12,1	— 0,9		— 0,9
				— 1,7

Man nimmt als vorläufigen Durchschnittswert schätzungsweise 13 Jahre an und erhält dann die in der dritten Spalte wiedergegebene Differenzenreihe. Durch Vergleich fallen mehrere Abweichungen fort, z. B. — 0,3 gegen + 0,3 usf. Es bleibt schließlich eine Abweichung — 1,7 übrig, die zum vorläufigen Näherungswert eine Korrektur 0,17 (es sind im ganzen 10 Werte gegeben) bringt, so daß also der wirkliche Durchschnittswert 12,8 (abgekürzt) ist.

Vielleicht ist es nicht ganz leicht, dem Quartaner diese Methode, bei der der Wert negativer Zahlen in die Augen springt, verständlich zu machen; erscheint es zu schwer, so verspare man es für später. Hat man aber mit längeren Wertereihen zu tun, so führt diese abkürzende Methode ungleich schneller zum Ziel als die gewohnte, bei der man erst alle Werte addieren und dann die Summe durch die Anzahl der Werte dividieren muß.

Schließlich noch eine Bemerkung: Gerade bei der Durchschnittsrechnung läßt sich die Bedeutung der abgekürzten Rechnung ins rechte Licht stellen, insbesondere die Tatsache, daß man nicht durch möglichst vielstellige Divisionen mehr aus den Zahlen herausholen kann, als in ihnen steckt.

Wenn man die Gesellschaftsrechnung in Quarta behandelt, so empfehle ich

die Einführung einer mit x bezeichneten Unbekannten. Es liege eine Aufgabe vor, bei der das Teilungsverhältnis geometrisch-arithmetisch ist, etwa

500 ℳ sind so zu verteilen, daß B das Doppelte erhält wie A, noch vermehrt um 20 ℳ, daß C das Sechsfache erhält von dem Anteil des A, noch vermehrt um 30 ℳ.

A erhalte x ℳ, dann erhält B insgesamt $(2x + 20)$ ℳ, C erhält $(6x + 30)$ ℳ. Man bekommt also die Gleichung:

$$x + 2x + 20 + 6x + 30 = 500.$$

Daraus folgt

$$x = 50.$$

Es erhält also A 50 ℳ, B 120 ℳ, C 330 ℳ.

Vielfach wird nicht wie hier mit x gerechnet, sondern an dessen Stelle „1 Teil" gesetzt. Ich kann nicht einsehen, daß das x schwieriger für das Verständnis sein sollte. Wird das aber zugegeben, dann sollte man sich nicht scheuen, wie schon mehrfach hervorgehoben, vor dem eigentlichen arithmetischen Unterricht gelegentlich Bestimmungsgleichungen zuzulassen, die außer x nur ziffernmäßig gegebene Größen enthalten.

Das Neue bei der Prozentrechnung ist lediglich der Begriff Prozent. Der bedarf nun aber einer gewissenhaften Klärung. Es liegt eine Menge m vor; dann versteht man unter p % von dieser Menge $\frac{p}{100}\,m$. Ein häufiger Fehler, der vom Schüler namentlich dann gemacht wird, wenn der Prozentbegriff später in Zinsaufgaben auftritt, ist der, daß Prozent als eine Benennung, ebenso wie ℳ, kg, angesehen wird. Der Hinweis ist nicht unwichtig, daß in einer Prozentangabe immer drei benannte Zahlen stecken. 5% Gewinn bedeutet: auf 100 ℳ Einkauf kommen 5 ℳ Gewinn, also 105 ℳ Verkauf. 5% Verlust bedeutet: auf 100 ℳ kommen 5 ℳ Verlust, also 95 ℳ Verkauf. Ähnlich so bei Tara, Brutto und Netto, bei Rabatt usf.

Wir haben bisher nur Prozente von 100 erwähnt. Im praktischen Leben wird zuweilen auch mit Prozenten auf Hundert gerechnet. Der Kaufmann, der seine Ware mit 10 ℳ eingekauft hat, sagt nicht, wenn er sie mit 20 ℳ verkauft, er habe 100% verdient; er hat nach seiner Meinung nur 50% verdient. Daß er 100% verdient, kann bei ihm nur vorkommen, wenn er Dinge verkauft, die ihm selbst gar nichts gekostet haben. Über 100% kann er nach seiner Rechnung überhaupt nicht hinauskommen. Für eine Klärung der Begriffe Prozente von, auf und in Hundert ist noch immer ein Aufsatz von Prandtl[1] empfehlenswert. — Ich sollte meinen, man käme in den allgemeinbildenden Schulen ganz und gar ohne das Vielerlei aus; man sollte sich auf Prozente von 100 beschränken. Alle Schwierigkeiten lösen sich, wenn in zweifelhaften Fällen dem Symbol % hinzugefügt wird, wovon die Prozente zu nehmen sind: Der Kaufmann meinte eben, er habe 50% vom Verkaufspreis verdient, während wir seinen Verdienst auf 100% vom Einkaufspreis einschätzten. Das Nebeneinander der verschiedenen Prozentarten „von — auf — in" verwirrt den Schüler nur. Die Fachschule mag dann ihrerseits, wenn sie es für nötig hält, die notwendigen Ergänzungen geben.

[1] Prandtl, Prozente auf, in und von 100. ZmnU 9 (1878), S. 119ff. — Eine Klärung der Begriffe ist besonders deswegen notwendig, weil verschiedene Autoren in der Wahl der Ausdrücke „auf" und „in" nicht einig sind.

Vielleicht kann auch gelegentlich im späteren arithmetischen Unterricht der Unterschied arithmetisch festgelegt werden:

Ist c die Differenz (etwa der Gewinn) der beiden Größen b (etwa Verkauf, also der größeren) und a (Einkauf), dann kommt es darauf an, ob man definiert

$$c = \frac{p}{100} b \text{ oder } c = \frac{p}{100} a.$$

Wählt man die erste Definition, rechnet also die Prozente vom Verkaufspreis, wie eben der Kaufmann, dann folgt aus $c : b = p : 100$, weil $a = b - c$ ist, nach dem Gesetz von der korrespondierenden Subtraktion der Proportionen:

$$c : a = p : (100 - p).$$

Ebenso ergibt sich im Falle der zweiten Definition, bei der die Prozente auf den Einkaufspreis bezogen werden, aus $c : a = p : 100$ und $b = a + c$

$$c : b = p : (100 + p).$$

Neben den Prozenten wird man auch die Promille, die ja bei Versicherungen und auch in manchen Statistiken eine Rolle spielen, berücksichtigen. Viele Worte sind da nicht zu verlieren; die Hauptsache sind einige Übungen in der Verwendung des Begriffes.

Ausführlich ist dann die Zinsrechnung zu behandeln. Es ist nötig, daß bei den Zinsaufgaben zunächst immer wieder auf die Folge der Schlüsse zurückgegriffen wird, die zum Bruchansatz führen. Erst später wird man eine mehr mechanische Anwendung der „Kipregel" zulassen dürfen, um schließlich, wenn die Zeit es gestattet, bis zur Einführung der Zinszahlen bei täglicher Verzinsung vorzudringen.

Praktisch ist die Anwendung der einfachen Zinsrechnung auf kleine Zeiten beschränkt. Über 2 oder 3 Jahre wird man schlecht hinausgehen können, sollen die Ergebnisse nicht allzu sehr von der Wirklichkeit abweichen, in der an Stelle der einfachen Zinsen meist Zinseszinsen treten.[1]

Von Bedeutung im praktischen Leben ist eigentlich nur die Frage nach den Zinsen. Nach dem Kapital wird schon seltener gefragt — etwa dann, wenn es sich um eine ewige Rente für irgendeinen Zweck handelt. Fragen nach dem Prozentsatz haben Wichtigkeit eigentlich nur bei der Nachprüfung wucherischer Zuschläge, die für die Beschaffung des Kapitals erhoben werden. Nach der Zeit wird kaum je gefragt werden. Deshalb nun aber ganz auf die Berechnung von Zeit, womöglich auch von Prozentsatz und Kapital zu verzichten, wie von manchen Volksschulmethodikern vorgeschlagen wird, möchte ich nicht empfehlen. Es kann auch schon in Quarta einen gewissen Reiz haben, die Gesamtheit aller möglichen Fragen auszuschöpfen. Außerdem aber wird man später in der Arithmetik aus der zuerst abgeleiteten Formel für z die Werte von k, i und p rechnerisch finden lassen.

12. Das kaufmännische Rechnen.

Über die bisher genannten bürgerlichen Rechnungsarten führen einige Rechenmethoden hinaus, die man wohl als „kaufmännische Rechenarten" bezeichnet, ohne daß ein scharfer Unterschied zwischen beiden Gattungen besteht, weder hinsichtlich

[1] Freilich ist durch das Bürgerliche Gesetzbuch im Privatverkehr Zinseszins verboten. — Aber jedermann wird dann eben die Zinsen an den Fälligkeitsterminen erheben und sie etwa auf der Sparkasse weiter Zinsen tragen lassen.

des Stoffes noch in der Methode. Nur ganz allgemein kann man sagen, daß die gleich zu besprechenden Verfahren sich schon mehr der spezifisch kaufmännischen Praxis nähern. — Ich nenne hier drei Rechenarten: die Diskontrechnung, die Terminrechnung und die Kontokorrentrechnung.

Die Diskontrechnung ist eine Art Rabattrechnung unter Berücksichtigung der Zeit. Nicht selten werden deshalb auch die Begriffe Diskont und Rabatt in Rechenbüchern durcheinander gebraucht, wahrscheinlich, weil der Kaufmann für Rabatt auch Skonto sagt und dieses Wort dann mit Diskont verwechselt wird. Ich möchte empfehlen, auch wenn es die Praxis nicht immer so macht, den Ausdruck Rabatt auf den Fall zu beschränken, bei dem die Zeit außer Betracht bleibt. Ist a eine Summe, etwa der Wert einer Rechnung, und wird bei der Bezahlung ein Diskont von $p\%$ eingeräumt, so ist die zu leistende Barzahlung, wenn sie schon i Jahre vor dem Fälligkeitstermin erfolgt,

$$b = a\left(1 - \frac{pi}{100}\right).$$

Man kann die Aufgabe auch anders anfassen. Die Zahlung b, die gesucht wird, soll so groß sein, daß sie mit den p-prozentigen Zinsen zusammen den Wert der Rechnung a ergibt. Es ist also

$$a = b\left(1 + \frac{pi}{100}\right), \qquad b = \frac{a}{1 + \frac{pi}{100}}.$$

Man sieht, die beiden Formeln stimmen keineswegs überein. Welche ist nun richtig? Antwort: Keine! An und für sich verdient die Diskontierung „auf Hundert", wie man die zweite Methode nennt, den Vorrang vor der Diskontierung „von Hundert", die freilich rechnerisch leichter zu bewältigen ist. Richtig sind aber beide nur insofern, als die Zinsen proportional der Zeit angesetzt sind; das gilt angenähert nur für kleine Zeiten, etwa bis zu 2 Jahren.

Bei der Terminrechnung handelt es sich um die Aufgabe, mehrere, zu verschiedenen Zeiten fällige Zahlungen $a_1, a_2, \ldots$ durch eine einzige, a, zu ersetzen. Gefragt ist dann meist nach dem Zeitpunkt dieser Zahlung, der so gewählt werden soll, daß ein Zinsverlust auf keiner Seite entsteht. Wird für das ganze Geldgeschäft der Prozentsatz p vorausgesetzt, so hat man also

$$a_1 \cdot i_1 \cdot \frac{p}{100} + a_2 \cdot i_2 \cdot \frac{p}{100} + \ldots = (a_1 + a_2 + \ldots)\, i \cdot \frac{p}{100}.$$

Daraus ergibt sich als Wert für den gesuchten Termin

$$i = \frac{a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots}{a_1 + a_2 + \ldots}.$$

Auch diese Formel steht unter der Annahme, daß die Zinsen der Zeit proportional sind; sie gleicht in ihrem Aufbau der grundlegenden Formel in der Mischungsrechnung.

Die Kontokorrentrechnung ist eine Anwendung der einfachen Zinsrechnung, bei der mit Hilfe von Zinszahlen, die der täglichen Verzinsung folgen, eine gegenseitige Geldabrechnung auf dem Laufenden gehalten wird. Man unterscheidet meh-

rere Methoden, die progressive, die retrograde und die staffelförmige Kontokorrentrechnung, die sich durch die Art, wie die Buchungen erfolgen, unterscheiden. Ausführlicher wird darauf im 3. Bande eingegangen.

An diese Rechenarten schließen sich nun diejenigen an, die sich nicht mit einfachen Zinsen begnügen, die Zinseszinsen berücksichtigen. Wenn man es auch der Volksschule nicht verargen kann, daß sie mit Hilfe von Tabellen die Schüler auch an diese Rechenarten heranführt, so wird man doch in den höheren Schulen ganz davon absehen müssen, hierauf im Rechenunterricht einzugehen. Die hier gegebenen sehr wichtigen Stoffe werden vielmehr erst dann in ausführlicher Weise behandelt werden, wenn die zu ihrem Verständnis und zu ihrer rechnerischen Beherrschung notwendigen Hilfsmittel vorliegen, d. h. nach der Lehre von den geometrischen Reihen und nach den Logarithmen.

Nun zu der wichtigen Frage: was soll von den genannten Gebieten des kaufmännischen Rechnens im Unterricht der höheren Schulen behandelt werden, und in welchem Umfange soll das geschehen? Da muß eines zunächst gesagt werden: Wenn der Rechenunterricht in Quarta abschließt, wie es ja in vielen höheren Schulen der Fall ist, dann mag er auf alle diese Dinge lieber ganz verzichten und dafür die übrigen in Quarta fälligen Aufgaben gründlich treiben. Damit gibt er die beste Grundlage für eine später im Leben oder auch schon in oberen Klassen zu gebende Einführung in das kaufmännische Rechnen.

Aber nehmen wir an, es ist in der Schule Zeit vorhanden. Was soll man da treiben? Es kommt dabei sehr in Frage, wann die Stunden angesetzt sind; ob bloß in Untertertia, wie an den preußischen Oberrealschulen, oder auch in Obertertia und Untersekunda, wie beispielsweise in Sachsen. Um es kurz zu sagen: Für wichtig halte ich die Kontokorrenten, für weniger wichtig, aber doch behandelnswert die Diskontrechnung, für sehr unwichtig die Terminrechnung.

Ich möchte zu diesem Entscheid nun aber hinzufügen, daß ich den Nachdruck überhaupt nicht so sehr auf die Rechenarten selbst als auf den Stoffkreis lege, dem sie angehören. Die Volksschule beginnt jetzt damit — die Ansätze dazu gehen auf Herbart, aber auch auf noch frühere Zeiten zurück —, in der letzten Klasse den Rechenstoff nicht nach den Rechnungsmethoden, sondern nach den sachlichen Stoffen zu gliedern. Man behandelt nacheinander etwa Hauswirtschaft, Gemeindewirtschaft und Staatswirtschaft, Weltwirtschaft. Diesen Sachkreisen läßt sich alles das, was in den bürgerlichen Rechenarten zu Worte kommt, eingliedern, daneben aber noch viel mehr, was früher unbeachtet blieb. Gerade die Fähigkeit, aus der Welt der Sachen das Rechenexempel herauszulesen und umgekehrt in den Dingen der Erfahrungswelt das Ergebnis der Rechnung wieder unterzubringen, gerade dieses Kernstück der praktischen Bedeutung des Rechnens wird bei einer solchen Unterrichtsweise wirksam gefördert. Während die Volksschule ein solches Vorgehen damit begründet, daß sie ihren Zöglingen eine für das Leben in gewissem Sinne abschließende Bildung mitgeben will, können die Fachschulen, wenn sie ebenso, unter Betonung der ihrem Fache nahestehenden Elemente, vorgehen, sich ganz auf den ihnen — im Gegensatz zu anderen Schulen — allgemein zugestandenen Utilitätsstandpunkt stellen. Wie hat sich in dieser Hinsicht die höhere Schule zu verhalten?

Das Zwingende fällt hier weg: in Quarta sollen die Schüler noch keine für das Leben bestimmte, abschließende Bildung erhalten. Für viele Dinge, die zur Sprache kommen müssen, für Steuern, Versicherungen, Zölle, Geldwirtschaft sind die Schüler noch zu jung, als daß ein lebendes Interesse sie fesseln könnte, man sollte sich, wie dies die preußischen Lehrpläne ausdrücklich aussprechen, auf die einfachsten Fälle beschränken. Etwas weiter kann man gehen, wenn Rechenunterricht noch in Tertia und Untersekunda erteilt wird. Wo der vorhanden ist, sollte man einer schrittweisen Durchnahme der einzelnen bürgerlichen und kaufmännischen Rechenarten eine mit dem Leben in inniger Berührung stehende, nach Sachgebieten geordnete Einführung in das wirtschaftliche Leben vorziehen.

Freilich, eine große Gefahr muß hier noch einmal genannt werden. Gerade eine um einen vielseitigen Lehrer gescharte interessierte Schülerschar kann es dahin bringen, daß das Rechnen im Sachunterricht ertrinkt. Die Erklärungen überfluten das Rechnen, das sich noch in einigen schnell gelösten Beispielen zeigt, an anderen Stellen ganz verschwindet. Den Rechenbüchern, in denen drei Seiten langen Sacherklärungen über allerlei Steuern zwei kurze Aufgaben angehängt sind, entsprechen Unterrichtsstunden, in denen der Lehrer ohne Unterbrechung vorgetragen hat, ohne daß eine Rechenaufgabe den Redefluß unterbrach.

Über den Anteil des Rechen- und Mathematikunterrichtes an der staatsbürgerlichen Unterweisung der Schüler wird im dritten Bande der Methodik ausführlich und im Zusammenhang zu handeln sein.

ZWEITES KAPITEL.

Der propädeutische geometrische Unterricht.

1. Allgemeine Fragen des propädeutischen Unterrichts.

Der erste Teilband beschäftigte sich ausführlich mit der Frage, warum ein propädeutischer Unterricht wünschenswert, ja notwendig ist. Hier liegt es uns nun ob, zu sagen, was man in diesem Unterricht treiben soll, und anzudeuten, wie man es treiben soll. Das Was wird ganz wesentlich davon abhängen, wieviel Zeit dem propädeutischen Unterricht lehrplanmäßig eingeräumt ist. Es hätte gar keinen Zweck, wenn wir hier selbstherrlich diktierten: Soundsoviel Zeit ist notwendig, alles andere paßt nicht mit unseren Anschauungen zusammen. Der Lehrplan ist eine höhere Gewalt, mit der zu rechnen ist. Und, auch das haben wir früher schon gesehen, tatsächlich ist die der Propädeutik vorbehaltene Zeit in den verschiedenen deutschen Lehrplänen ganz verschieden. So können also unsere Ausführungen nur die Grundzüge angeben, der Lehrer muß selbst wählen, was er daraus aufnimmt und wie er es aufnimmt.

Und das ist auch in anderer Hinsicht gut so. Kaum ein Gebiet des mathematischen Unterrichts hat einen so individuellen Charakter, wie die Propädeutik der Geometrie. Dem Lehrer muß hier jede mögliche Freiheit bleiben, was er an Stoffen aus dem besonderen Gesichtskreis seiner Schüler heranzieht und auswertet, wie er seinen Gang durch diesen Stoff am besten disponiert. Aus diesem Grunde wollen wir nicht einen ganz bestimmten Lehrgang gleichsam als Schema hinstellen.

So ist denn das, was über den propädeutischen Unterricht hier zu sagen ist, in der Weise gegliedert, daß nacheinander die Dinge besprochen werden, die als Aufgaben dieses Unterrichtes herausspringen. An welchen besonderen Stoffen diese Aufgaben durchgearbeitet werden, ist zwar angedeutet, nicht aber als feste Norm gegeben. Im propädeutischen Unterricht soll der Schüler in psychologisch einwandfreier Weise mit den der Geometrie zugrunde liegenden Begriffen bekannt gemacht werden. Die Mittel, diese Begriffe kennen zu lernen, sind Anschauung, Beschreibung, Darstellung, Messung. Die Leitidee ist der Fortschritt vom einzelnen Beispiel zum allgemeinen Begriff. Wenn man dabei noch dafür sorgt, daß die Schüler, wie Christian Wolff in der Vorrede zu seinem „Auszug" sagt, „von der Gründlichkeit einigen Geschmack bekommen", so hat der propädeutische Unterricht seine Schuldigkeit getan.

Frei steht die Wahl der Beispiele, mit denen man arbeitet, frei auch, in welcher Weise man die Arbeitsmittel anwendet. Nur das mag ausdrücklich gesagt werden: Die verschiedenen Aufgaben müssen sich aller Orten gegenseitig stützen. Es geht

nicht an, erst die ganze Reihe der geometrischen Gebilde, die man an die Schüler heranbringt, erschöpfend zu betrachten, dann sie noch einmal zu durchlaufen, um sie erschöpfend beschreiben zu lassen, und so weiter.

Einen Leitgedanken für die Auswahl der Stoffe muß ich aber doch noch äußern. Der geometrische Unterricht beginnt mit der Planimetrie; es liegt nahe, sich nun in der propädeutischen Geometrie auf die ebenen Grundgebilde zu beschränken, eine Propädeutik der Planimetrie, nicht der Geometrie zu geben. Das ist falsch. Der Schüler lebt im Raum; seine Erfahrungswelt ist der Raum. Also muß er aus ihm seine ebenen Grundbegriffe abstrahieren. Das geht nur, wenn man die Beziehung zu den räumlichen Begriffen mit heranzieht. Die propädeutische Geometrie muß also von Körpern ausgehen; die ebenen Gebilde, die sie betrachtet, muß sie an den Körpern aufsuchen. Für die Propädeutik ist die Forderung der Fusion von räumlicher und ebener Geometrie unbedingt durchzuführen.

Man stimmt dem jetzt auch wohl allgemein zu. Aber doch sind recht beträchtliche Unterschiede vorhanden. Nicht wenige glauben, dem Bedürfnis nach dem räumlichen Ursprung der Begriffe Rechnung getragen zu haben, wenn sie zu Anfang von dem Würfel reden, dann aber nie wieder einen anderen räumlichen Körper heranbringen. Das ist zu bekämpfen. Wie kann bei einem solchen Verfahren etwa der allgemeine Begriff Fläche, im Gegensatz zu dem engeren Begriff Ebene, in seiner Vielseitigkeit erkannt werden?

Nun noch ein Wort über die Literatur zur geometrischen Propädeutik. Sie ist recht umfangreich. Wir haben zunächst eine mustergültige, auf Grund vierzigjähriger Erfahrung geschriebene Methodik des geometrischen Anschauungsunterrichtes von Treutlein[1], die auch die gesamte Literatur zu der Frage erschöpfend aufzählt. Meine Ausführungen an dieser Stelle berühren sich zum Teil mit dem, was ich bereits in einer als Literaturbericht sich gebenden IMUK-Abhandlung ausgeführt habe[2]; freilich bezog sich diese Abhandlung auch auf die Volksschulen. Der Raumlehreunterricht der Volksschulen hat in der Tat viel Gemeinsames mit dem propädeutischen Unterricht der höheren Schulen, wenngleich man sich bei der Lektüre volksschulmethodischer Schriften immer der Unterschiede bewußt bleiben muß.

Es seien aus der reichen Volksschulliteratur hier einige ganz charakteristische Erscheinungen herausgegriffen. Ein viel gebrauchtes und an Anregungen reiches Buch, dessen Blick auf die Praxis gerichtet ist, hat C. Kehr[3] geschrieben. Martin und Schmidt[4] haben die sog. Methode der Formengemeinschaften ausgebildet: Die geometrischen Figuren werden nach sachlichen, durch ihre Verwendung im Leben gegebenen Gesichtspunkten, nicht nach systematischen, angeordnet. Stark ver-

[1] P. Treutlein, Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichts an unseren höheren Schulen, Leipzig (Teubner) 1911.
[2] W. Lietzmann, Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland (Deutsche IMUK-Abh. V, 2), Leipzig (Teubner) 1912.
[3] C. Kehr, Praktische Geometrie, ein Hilfsbuch für Lehrer an Volks- und Fortbildungsschulen. 10. Aufl. von Saro. Gotha, Thienemann, 1910.
[4] P. Martin und O. Schmidt, Raumlehre. Zwei Ausgaben in je drei Heften. Berlin, Gerdes und Hödel.

breitet sind die methodisch gut durchgearbeiteten Lehrbücher von E. Wilk[1], der die früheren Pickelschen Bücher jetzt herausgibt. Einen eigenartigen Einschlag haben die methodischen Schriften von E. Zeissig[2], der die Herstellung und die Verwendung der geometrischen Formen, z. B. als Zier- oder Gebrauchsgegenstände, stark betont. Neu ist eine Raumlehre von Engel[3], der in sehr interessanter Weise den Bewegungsbegriff für den systematischen Aufbau des Stoffes heranzieht. Schließlich seien noch von den sehr vielen methodischen Schriften, die nicht selten den Büchern über den Rechenunterricht angehängt sind, zwei eigene Methodiken des Raumlehreunterrichtes an Volksschulen genannt, von Lichtblau und Knotta die eine, von Räther die andere[4].

Man muß sich bei allen diesen Büchern immer vor Augen halten, daß sie für Volksschulen geschrieben sind. In der Volksschule folgt dem Raumlehreunterricht nicht wie in der höheren Schule ein systematischer geometrischer Lehrgang. Der Gesichtspunkt, der für die Propädeutik einzig wesentlich ist, Vorarbeit für später zu leisten, fällt also in der Volksschule ganz weg. Die Volksschule will mit ihrem Raumlehreunterricht den Schülern das mit auf den Weg geben, was sie im Leben an geometrischer Anschauungskraft und an geometrischen Einzelkenntnissen brauchen. In der höheren Schule fällt diese Aufgabe dem gesamten geometrischen Unterricht zu.

Schätzenswertes Material bringen zwei nicht auf die Volksschulen zugeschnittene, aber auch nicht unmittelbar dem propädeutischen Unterricht der höheren Schulen dienstbar zu machende Bücher von Timerding und den beiden Young[5]. Das Werk von Timerding gibt zahlreiche Anregungen und viele Vorlagen, die der Unterricht zumal in denjenigen Teilen, wo es sich um die zeichnerische Darstellung der geometrischen Gebilde handelt, unmittelbar mit Vorteil benutzen kann. Auch das von dem Ehepaar Young geschriebene, aus der häuslichen Unterweisung ihrer Kinder erwachsene Buch enthält manche Anregungen für den propädeutischen Unterricht. Wertvoll sind die Beispiele für Faltübungen. Es muß aber einmal gesagt werden, daß das Buch im allgemeinen einen für den Anfangsunterricht allzu abstrakt-wissenschaftlichen Charakter besitzt.

Schließlich ist noch etwas über die Lehrbuchfrage zu sagen. Ob man ein Lehrbuch

---

[1] Ich nenne die Lehrerausgaben: E. Wilk, Formenkunde für Volks- und Mittelschulen. Anleitung für Lehrer und zum Gebrauch in Seminarien. 2. Aufl. Dresden-Blasewitz, Bleyl und Kämmerer, 1906; ders., Geometrie der Volksschule (Formenlehre). Neubearbeitung von A. Pickels Geometrie. Ausg. I: Anweisung für Lehrer und zum Gebrauch in Seminarien. 10. Aufl. Ebenda. Ohne Jahreszahl.

[2] Vgl. besonders E. Zeissig, Präparationen für Formenkunde als Fach an Volksschulen, I. Teil, 3. Aufl., 1916, II. Teil, 1900, Langensalza, Beyer und Söhne.

[3] E. Engel, Raumlehre. Eine Anleitung zur Erteilung des Unterrichts in der Raumlehre, Langensalza, Greßler, 1916.

[4] Lichtblau und A. Knotta, Methodik des Raumlehreunterrichts. Leipzig, Hirt, 1910. H. Räther, Die Raumlehre in der Volksschule, Breslau (Morgenstern) 1922.

[5] H. E. Timerding, Die Erziehung der Anschauung, Leipzig, Teubner, 1912. G. C. Young und W. H. Young, Der kleine Geometer. Deutsch von S. und F. Bernstein, Leipzig, Teubner, 1908.

im geometrischen Anfangsunterricht der höheren Schulen benutzen soll, ist eine sehr strittige Frage. Es liegt eine große Anzahl von Versuchen vor.[1]

Die Praxis scheint gegen ein Lehrbuch zu sprechen. Keines von den unten genannten hat eine zweite Auflage erlebt; es ist wohl auch z. B. in Preußen kein einziges dieser Bücher amtlich eingeführt. Einzelne Bücher sind schon insofern in ihrer ganzen Anlage verfehlt, als sie einfach den späteren Stoff vorweg nehmen. Das geht bei dem Holzmüllerschen Buch so weit, daß pythagoreische Zahlen, Kreisberechnung, Ikosaeder und andere Körper behandelt, daß die Fragen des Unendlichkleinen und Unendlichgroßen angeschnitten werden usf.

Die allgemeinen Lehrbücher für den geometrischen Unterricht pflegen auch die Propädeutik zu berücksichtigen, meist nur in der Form, daß sie die erhaltenen Ergebnisse zusammenstellen; das liest sich dann in der Regel sehr trocken, man darf aber, was zuweilen geschehen, von solchen Zusammenstellungen nicht auf den Unterricht selbst schließen. In meiner „Geometrischen Aufgabensammlung" ist im ersten Kapitel der Versuch gemacht worden, dem propädeutischen Unterricht eine große Fülle von Aufgaben zur Verfügung zu stellen.[2]

2. Beschreibung der geometrischen Gebilde.

Die erste Tätigkeit, um die es sich im propädeutischen Geometrieunterricht handelt, ist die Betrachtung und Beschreibung der Raumformen. In der höheren Schule werden wir uns dabei auf verhältnismäßig wenige Formen beschränken können. Als Körper kommen etwa diejenigen in Betracht, die viele Lehrpläne ihrer Gestalt wegen die regelmäßigen nennen und die nicht zu verwechseln sind mit den regulären, sog. platonischen Körpern. Es sind dies: Würfel, Quader, Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel, Kugel. Schon Zylinderstumpf und Pyramidenstumpf dürften für den propädeutischen Unterricht in höheren Schulen entbehrlich sein. Gar noch weiter zu gehen, etwa bis zu regulären Körpern, wie Dodekaeder und Ikosaeder, zu Obelisken und Fässern, wie es die Volksschule — und mit Recht — zuweilen tut, liegt kein Grund vor. Im übrigen wird auch von den genannten Körpern der eine oder andere zu streichen sein, wenn die dem propädeutischen Unterricht eingeräumte Zeit nur knapp ist. Nur das möchte ich auf keinen Fall gut heißen, daß der Würfel der einzige Körper bleibt, den der Unterricht heranzieht. — Die Reihenfolge, in der die Körper auftreten, ist fast immer die eben angegebene. Eine inter-

[1] Als wichtigste Beispiele nenne ich: H. Börner, Lehrbuch zur Einführung in die Geometrie. Leipzig, Teubner, 1879. J. Diekmann, Übungen und Aufgaben für propädeutischen Unterricht in Geometrie. I. Teil. Breslau, Hirt, 1886. G. Holzmüller, Vorbereitende Einführung in die Raumlehre. Leipzig, Teubner, 1904. O. Lesser, Einführung in den geometrischen Unterricht. Dortmund, Köppen, 1898. C. Musmacher, Leitfaden und Aufgabensammlung für den propädeutischen geometrischen Unterricht. Leipzig, Renger, 1903. Th. Wimmenauer, Leitfaden für den vorbereitenden geometrischen Anfangsunterricht der Quinta der Oberrealschule und Realschule. Dresden, Ehlermann, 1912. G. Müth, Leitfaden für den geometrischen Anfangsunterricht. Berlin, Weidmann, 1913.

[2] W. Lietzmann, Geometrische Aufgabensammlung. Unterstufe: Ausgabe A für Gymnasien 1916, B für Realanstalten 2. Aufl. 1921. Leipzig (B. G. Teubner).

essante Ausnahme macht eine lettische Raumlehre[1], die mit der Kugel beginnt, dann Zylinder und Kegel folgen läßt und erst dann zu Polyedern kommt.

An den Körpern sollen auch alle die ebenen Gebilde auftreten, mit denen sich die Propädeutik näher zu befassen hat. Bei den begrenzten ebenen Gebilden wird man im allgemeinen mit Vielecken, vor allem dem Viereck und dem Dreieck, und mit dem Kreise auskommen. Ellipse und Oval können wohl erwähnt werden, damit die Schüler nicht zu einer einseitigen Auffassung krummer Linien kommen; aber man braucht sich nicht ausführlich mit ihnen zu beschäftigen. Das gilt um so mehr, wenn dafür gesorgt ist, daß nicht erst der Oberprimaner erfährt, daß es außer dem Kreise auch noch andere Kurven

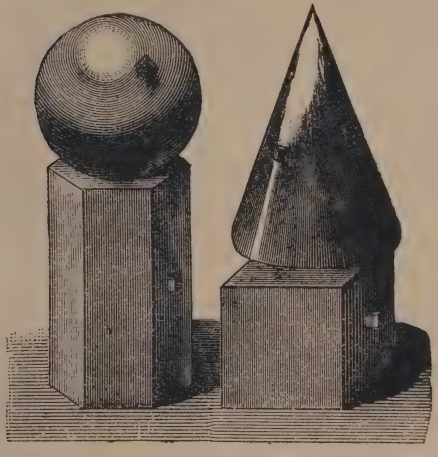


Fig. 14.
Die fünf wichtigsten Körper (dazu noch der Zylinder in Fig. 15). Ausführung des Polytechnischen Arbeits-Institutes (J. Schröder) Darmstadt.

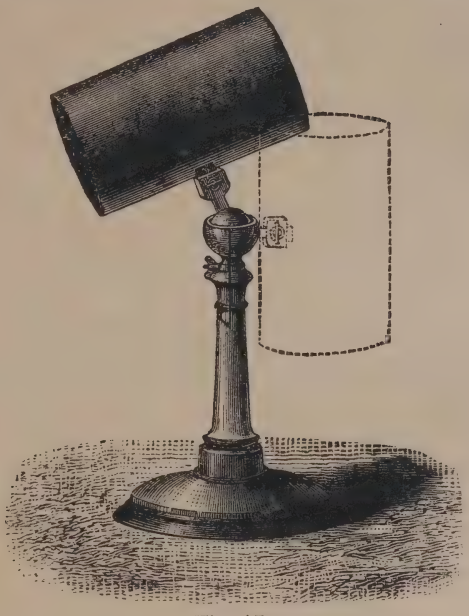


Fig. 15.
Stativ zu der in Fig. 14 dargestellten Sammlung von Körpern. Die Schüler sollen die Körper in den verschiedensten Lagen sehen. Ausführung des Polytechnischen Arbeits-Institutes (J. Schröder) Darmstadt.

gibt. Wo man graphische Darstellungen benutzt, wird einer solchen Unterlassungssünde ja ausreichend vorgebeugt.

Wenn die geometrischen Formen betrachtet werden sollen, so müssen sie natürlich den Schülern vorgezeigt werden. Wir brauchen Modelle. Es gibt Methodiker, die den Schülern nicht gleich die Modelle vorführen wollen, die erst die Schüler aus den Gegenständen des praktischen Lebens die geometrischen Formen ablesen und dann idealisieren lassen. Ich glaube, man traut dabei den Schülern zuviel zu. Es ist gar nicht so leicht für einen Schüler, aus der Kirchturmspitze mit allem ihrem Drum und Dran die Pyramide herauszufinden, oder aus dem Zimmerraum durch eine Art Umkrempelung den Quader. Ich halte es für praktischer, umgekehrt zu verfahren,

[1] A. Leimanis, Geometrija, 4 Hefte, Riga, Valtera un Rapas, 1921.

erst die geometrische Form im Unterricht zu zeigen, dann die Kinder anzuhalten, diese Formen auch in ihrer Umwelt aufzusuchen.

Die Modelle sind nun nicht nur den Schülern auf dem Katheder in 8 m Abstand zum Anstaunen vorzuführen, sie sollen vielmehr von allen wirklich in die Hand genommen werden, neben dem Gesichtsorgan soll auch das Tastgefühl Bekanntschaft mit den Formen machen.

Bis jetzt sieht der Schüler ein ganz bestimmtes Modell vor sich; es hat eine bestimmte Größe, eine gewisse Farbe, es ist aus einem bestimmten Material hergestellt. Nun aber soll die Abstraktion beginnen. Für den Begriff Würfel ist es nebensächlich, ob er aus Holz, Papier oder Blech, ob er grau oder gelb, ob er so oder so groß ist. Schließlich ist es für den Begriff auch gleichgültig, welche Art der Darstellung man gewählt hat: Ob der Würfel massiv ist, ob es ein Flächenmodell oder ein Kantenmodell ist. Immer ist es ein Würfel. Es gilt also, die wesentlichen Eigenschaften von den unwesentlichen zu trennen. Dazu sind Modelle in mannigfachster Ausführung, in mannigfachsten Größenverhältnissen nötig. Es ist durchaus nicht selbstverständlich, daß der Schüler in einer Postkarte den Quader, in einer flachen Dose ebenso die Zylinderform erkennt wie in einem langen Draht. Es ist gar nicht selten, daß Leute unter einem Viereck nur ausgerechnet ein Quadrat oder ein Rechteck verstehen. Und wenn später eine Unzahl von Sätzen anfängt: „In jedem Dreieck ....“ oder auch, was dasselbe besagt, „Im Dreieck ...“, so gehört eine ganz gewaltige Abstraktion dazu, nicht bloß gerade das als Beweisfigur gedachte Dreieck, sondern jedes beliebige, spitz- oder stumpfwinklige oder sonst irgendwie gestaltete Dreieck zuzulassen. Noch sehr viel später wird es nötig sein, mehrere verschiedene Lageverhältnisse bei den Figuren zugrunde zu legen.

Ich sagte, das Modell soll von den Schülern in die Hand genommen werden. Das gilt nicht nur von den räumlichen, sondern auch von den ebenen Gebilden. Man lasse die Figuren auf geeignetes Papier zeichnen, ausschneiden und sie nun hin und her bewegen. Viele Leute sind gewöhnt, Körper nur an ihrer Unterlage klebend zu sehen. Daher hat bei ihnen ein Quader vier und nicht acht Ecken.—DasWahlgesetz schreibt „eine viereckige Urne“ vor. Ein Wahlvorsteher, der ein Mathematiker und ein Schelm zugleich war, gab infolgedessen vor der Wahl zu Protokoll, er verlange eine Urne in Gestalt eines Tetraeders. — Wenn ein dreiseitiges Prisma auf eine Seitenfläche gelegt wird, so erscheint vielen der Keil, den sie dann vor sich sehen, als ganz neuer Körper.

Wichtig ist schließlich, daß die Schüler die Körper nicht nur als ein Ganzes und Fertiges vorgesetzt bekommen, wenn das sich auch beim Beginn der Betrachtung eines neuen Körpers empfiehlt, sondern daß sie sehen und wenn irgend möglich auch selbst untersuchen, wie er entsteht, wie er zerlegt werden kann, wie er sich umformen läßt usf. Wenn das schon vom räumlichen Gebilde gilt, so erst recht vom ebenen. Hier ist zeichnerisch ja alles sehr leicht vom Schüler auszuführen. Doch darauf kommen wir gleich noch einmal zurück.

Nun wird vielleicht jemand sagen: was ist denn an den vorzulegenden Raumformen groß zu betrachten? Einen Maßstab dafür, ob die Schüler auch wirklich die Augen aufmachen, ob sie tatsächlich alles Wichtige und nicht nur dies und das sehen, was sie gerade fesselt, wird man darin haben, ob sie die Figur beschreiben

können. Wer das zuerst macht, kann sein Wunder erleben. Die Frage, wieviel Kanten eine Streichholzschachtel hat, wurde mir einmal in einer großen Quinta in verschiedenster Weise beantwortet — die richtige Antwort aber war nicht darunter. Diesen Beschreibungen kommt eine weitere Bedeutung zu. Einmal müssen sie, wie schon bei Euklid, hier im propädeutischen Unterricht die Definitionen der Gebilde ersetzen. Dann aber sind sie Anlaß zu den ersten Übungen in der mathematischen Ausdrucksweise.

Die Betrachtung der Raumformen im propädeutischen Unterricht geschieht nicht so sehr deswegen, daß der Schüler diese Raumformen selbst in- und auswendig kennen lernt, sondern damit er durch sie mit den grundlegenden Begriffen der Geometrie vertraut wird. Er soll erfahren, was Punkt, Linie, Fläche, Körper, Gerade, Strecke, Strahl, Ebene, Winkel, dann aber auch Parallelität, Symmetrie, Deckungsgleichheit, Dimension usf. bedeuten, schließlich, wenn man will, auch jene als selbstverständlich angesehenen Begriffe wie z. B. „Zwischen".

Im Gegensatz zur Euklidischen Geometrie kommt es bei der Beschreibung auch auf die Lage der Gebilde im Raume an; die Begriffe oben und unten, rechts und links, hinten und vorn müssen in ihrer Verwendung geübt werden. Man wende nicht ein, das wisse nun doch wirklich jeder Sextaner. Gewiß! Aber stelle vor ihn einen Würfel und sage ihm, er soll den Verlauf aller Kanten genau und vollständig beschreiben. „Diese Kante geht von der Ecke links oben hinten nach der Ecke rechts oben hinten" usf. Und du wirst sehen, daß da doch noch etwas zu lernen ist.

Das ist die eine Seite des propädeutischen Unterrichtes: Vertrautheit mit den Grundbegriffen, nicht in abstrakter Form, sondern an der Hand möglichst mannigfaltiger Beispiele. Nebenbei: Davon, daß der Würfel „eigentlich" kein mathematischer Würfel sei, daß es „eigentlich" keine Punkte, keine Geraden gäbe, darf hier natürlich kein Wort fallen. Die physischen Äquivalente decken sich vorläufig noch mit den mathematischen Begriffen. Ich habe nie bemerkt, daß ein Schüler in Quinta oder Quarta in dieser Hinsicht Einwendungen gemacht hätte.

Weiter soll der Schüler in der Propädeutik mit der mathematischen Ausdrucksweise bekannt werden. Das ergibt sich beim Beschreiben der betrachteten Formen von selbst. Auf eins ist aber dabei vom Lehrer zu achten. Jeder Mensch hat einen aktiven und einen passiven Wortschatz; der aktive umfaßt die Worte, die er selbst verwendet, der passive die, die er in Sprache und Schrift versteht. Der aktive Wortschatz ist weit kleiner als der passive. Es ist nun eine falsche Annahme, daß der Übergang aus dem passiven in den aktiven sich ohne weiteres vollziehe. Der Lehrer muß den Schüler ausdrücklich auf die Bereicherung des Wortschatzes hinweisen. Das gilt wie von jedem auch vom mathematischen Unterricht, wie von jeder auch von der mathematischen Ausdrucksweise.

Was wird mit dem Beschreiben für die Mathematik selbst gewonnen? Zunächst wird der Schüler gewisse Dinge, die ihm nicht selbstverständlich sind — zu den selbstverständlichen Dingen soll man ruhig auch Gerade, Ebene, Punkt usw. rechnen — erklären lernen. Solche Erklärungen werden sich wesentlich von einer logisch einwandfreien Definition unterscheiden. Es ist auf dieser Stufe durchaus nicht nötig, daß die Defnition fein säuberlich das genus proximum angibt und dann die unterscheidenden Merkmale. Man wird den Körper, die Figur, um die es sich handelt,

einfach mit den schon bekannten Begriffen beschreiben. Es wird also heißen: „Ein Würfel hat ...", nicht „Ein Würfel ist ein Körper, der ..." Daß die Definition überbestimmt ist, braucht in Quarta wenig Sorge zu machen. Häufig wird man die Entstehung der Gebilde aus anderen bekannten als Erklärung benutzen. Eine Linie „entsteht" durch Bewegung eines Punktes, ein Winkel durch Drehung eines Strahles um seinen Endpunkt. Dann wird man häufig auf die Herstellung der Gebilde im praktischen Leben hinweisen: Wie wird eine Kugel geformt (Schneeball, Pille, Schrotkugel), wie eine Walze? usf. Das berührt sich mit dem, was uns später noch beschäftigen muß, mit der Darstellung der geometrischen Formen.

Man wird bei der Darbietung im Unterricht natürlich das Frage- und Antwortspiel zwischen Schüler und Lehrer bevorzugen. Es verdient aber doch ausdrückliche Betonung, daß es damit nicht sein Bewenden haben darf. Die Schüler müssen dahin gebracht werden, längere Beschreibungen im Zusammenhange ohne richtunggebende Zwischenfragen des Lehrers vorzutragen, und zwar, worauf besonders zu achten, ohne daß sie das auswendig gelernt haben.

Gelegentlich wird auch eine kleine, nicht zu umfangreiche Niederschrift anzufertigen sein. Wie groß der Abstand zwischen einer vom Lehrer durch Fragen geleiteten Beschreibung und einer ohne solches Hilfsmittel zu gebenden selbständigen Leistung ist, kann man erkennen, wenn man einmal in der Quinta oder Quarta von einem Stoff, der im Frage- und Antwortspiel „glatt sitzt", unvorbereitet eine schriftliche Darstellung verlangt. Der Lehrer wird kaum seinen Augen trauen. Niederschriften ganz einfacher Beschreibungen, die vielleicht in einem Satz sich erledigen lassen, sind deshalb hin und wieder unerläßlich. Noch besser, als sie ins Schülerheft schreiben zu lassen, wäre es, die Wände unserer Schulstuben wie in Amerika mit Wandtafeln auszutapezieren; dann könnten viele Schüler ihren Satz gleichzeitig an die Tafel schreiben. Man würde so die Kritik mit Unterstützung des visuellen Bildes weit wirkungsvoller durchführen, als wenn die Sätze bloß akustisch aufgenommen sind.

3. Das Darstellen geometrischer Gebilde.

Mit dem Ansehen und Betasten der Körper und Flächen ist es im propädeutischen Unterricht nicht getan. Die Schüler sollen die Gebilde auch selbst herstellen.[1] Immerhin ist hier doch von vornherein eine Warnung am Platze. Es ist nicht nötig, daß die Schüler nun von allen im Unterricht vorkommenden Körpern in sorgfältigster Weise Schaumodelle bauen; man wird sich vielmehr in der Auswahl besonders der räumlichen Gebilde eine weise Beschränkung auferlegen müssen (bei den ebenen Gebilden ist das nicht ganz so wichtig). Es gibt nämlich Knaben, die mit großer Lust an solche Papparbeiten herangehen und darüber alles andere, vor allem auch die

[1] Eine ausgezeichnete Sammlung selbsterdachter und selbstgefertigter Modelle besaß der 1919 verstorbene J. E. Böttcher, Leipzig, die 1898 in Leipzig bei der Sitzung des „Förderungsvereins" vorgeführt wurden. Damals soll noch einer der Zuhörer gesagt haben: „Wir Lehrer der Mathematik haben doch nicht Buchbinder bzw. Galanteriearbeiter heranzubilden." Heute wird ein solches Wort des Unverständnisses wohl nicht mehr fallen. Die Böttcherschen Modelle sind auch auf der Bugra, der Ausstellung für Buchgewerbe und Graphik in Leipzig 1914, gezeigt worden.

Hausarbeiten für die anderen Fächer, vergessen. Da muß man eher abbremsen als anfeuern.

Man kann von den Körpern entweder massive, also körperliche Modelle herstellen, oder Flächenmodelle (etwa aus Pappe, Glas, Blech) oder Kantenmodelle. Die Herstellung von massiven Modellen durch die Schüler scheidet fast gänzlich aus. Aus Holz kann man sie nicht herstellen lassen, da die Schüler nicht sämtlich in Holzarbeiten erfahren sein werden, selbst wenn Handfertigkeitsunterricht eingerichtet sein sollte. Auch die Herstellung aus Plastilina wird meist an der Menge des notwendig werdenden Stoffes scheitern. Schließlich kann man ja einmal einen Körper in rübenreichen Gegenden aus einer Zuckerrübe schneiden lassen.

Die üblichste Art der Modelle ist die der Flächenmodelle. Zu ihrer Herstellung gehört aber bereits eine recht weitgehende Vertrautheit mit dem Körper, muß man doch davon ausgehen, daß zunächst das Netz gezeichnet wird, an das noch dann an geeigneten Stellen Klebfalze angesetzt werden. Den Klebstoff kann zur Not auch eine Naht ersetzen. Auch lediglich durch Falten kann man Flächenmodelle der Körper erhalten, doch erscheinen mir solche Verfahren, wie sie sich z. B. bei den beiden Young finden, für die Quintaner oder Quartaner zu schwer. Flächenmodelle gehören mehr an den Schluß der Betrachtung eines Körpers, weil bei ihrer Herstellung eine umfassende Kenntnis der Beziehungen zwischen den Kanten, Flächen u. dgl. vorausgesetzt wird.

Selbstverständlich wäre es verfehlt, wollte man in diesem Stadium der Schülererfahrung Vorlagen für die Herstellung von Modellen geben, wie es vielfach in Büchern oder auch in der mathematischen Experimentiermappe von Noodt[1] geschehen ist. Die Schüler sollen nicht kopieren, sondern mit der Herstellung zeigen, daß sie den Zusammenhang der Flächen und Kanten beherrschen. Eine sehr lehrreiche Übung besteht z. B. darin, daß man die Grenzflächen in verschiedener Weise als Netz zusammenfügen kann.[2] Ist das Modell fertig, so bietet es Gelegenheit zu weiteren Studien. Man kann Linien auf den Begrenzungsflächen zeichnen — leider nicht auch durch das Innere des Körpers — man kann am Schlusse auch Schnitte durch den Körper legen, wenn er seine anderen Dienste getan hat.

Weit weniger Kenntnisse werden von dem Schüler verlangt, wenn er von seinem Körper ein Kantenmodell herstellen soll. Das kann schon in einem sehr frühen Stadium der Besprechung geschehen. Ein weiterer Vorzug solcher Kantenmodelle ist, daß man durch eingespannte Fäden, wenn nötig in verschiedenen Farben, Geraden im Innern und auf den Begrenzungsflächen andeuten kann.

Man kann zur Herstellung von Kantenmodellen primitivster Form aufgeweichte Erbsen und Zahnstocher oder angespitzte Streichhölzer, noch besser Wurstspeiler benutzen. Andere benutzen Plastilinkügelchen und Drahtstücke, wie man sie etwa durch Zerschneiden alter Schirmstangen bekommen kann. Freilich eignen sich für die Kantendarstellung eigentlich nur von Ebenen begrenzte Körper.

---

[1] Bei B. G. Teubner in Leipzig erschienen.

[2] Ein damit zusammenhängendes, allerdings erst für eine spätere Klassenstufe geeignetes Problem behandelt B. Kerst, Über Polyeder, deren Netze durch konvexe Polygone gebildet werden, ZmnU 47 (1916) S. 11ff.

Für die Herstellung ebener Gebilde zieht man zunächst natürlich die Zeichnung heran. Gezeichnet wird mit Zirkel, Lineal und Zeichendreieck, nur in selteneren Fällen mit freier Hand. Das Lineal wird der Schüler sich zunächst selbst durch Falten eines Papierbogens herstellen können, um erst später zum gekauften Holzlineal zu greifen. Es ist notwendig, daß man ihm Anweisungen gibt, wie man mit dem Lineal zu zeichnen, wie man den Bleistift anzulegen hat. Auch das Anspitzen des Bleistiftes ist keine ganz unwichtige Sache. Jedenfalls kann man bei der Durchsicht von Zeichnungen und bei nachfolgender Kontrolle der Bleistifte überaus häufig konstatieren, daß der Anlaß unerfreulicher Arbeiten ein schlecht angespitzter Bleistift ist, daß es Schüler gibt, die nicht davon abzubringen sind, mit einem „Besenstiel" zu zeichnen. Es gibt in England mathematische Schulbücher, in denen das Bleistiftanspitzen als eine sehr wichtige Kunst ausführlich mit figürlicher Darstellung gelehrt wird. Das geht natürlich zu weit. Nicht Sache des Lehrbuches, sondern des Lehrers sind solche Dinge; aber einer muß jedenfalls die nötige Unterweisung geben. Noch mehr als vom Zeichnen mit dem Bleistift gilt das Gesagte vom Zeichnen mit der Reißfeder. Ich halte es für sehr wohl angängig, den Schüler von Anfang an mit dem Gebrauch der Reißfeder vertraut zu machen. Auf keinen Fall sollte man ihn mit der Schreibfeder zeichnen lassen. — Wenn es möglich ist, sollte man auch Geraden im Gelände abstecken. Eine gute Vorübung für die Arbeit mit den Fluchtstäben ist das Einvisieren von Stecknadeln auf einem Brett.

Einige Methodiker empfehlen, als einen Zirkel einfachster Art eine Schnur zu nehmen, deren eines Ende festgehalten wird, während mit dem anderen Ende, an das man den Bleistift oder an der Wandtafel die Kreide hält, der Kreisbogen beschrieben wird. Gewiß tritt hier die Eigenschaft des Radius im Kreise, immer unveränderlich zu bleiben, am deutlichsten in die Erscheinung. Aber doch ziehe ich die Benutzung eines regelrechten Zirkels schon in der Quarta vor, gibt er doch, zumal bei größeren Bogenlängen, unbedingt bessere und genauere Zeichnungen. Auch seine Handhabung ist einfacher. Übrigens muß der Schüler ebenso wie den mit Bleistift und Reißfeder versehenen Zirkel auch den Stechzirkel zu handhaben lernen.

Schließlich sollten auch die Schüler gleich hier lernen, mit dem Dreieck umzugehen; es genügt die eine oder andere Form, da es nur auf den rechten Winkel ankommt. Das ist in der Propädeutik ein Zeichenwerkzeug, das Zirkel und Lineal durchaus ebenbürtig ist. Von dem Begriff einer geometrischen Konstruktion im Sinne von Euklid braucht in der Propädeutik noch nicht die Rede zu sein.

Zu den ständigen Hilfsmitteln des Schülers und des Lehrers sollte auch die Schere zählen. Sehr häufig wird es sich empfehlen, gezeichnete Figuren auszuschneiden, sie zur Deckung zu bringen, sie zu falten u. dgl. mehr. Auf das Falten der Figuren ist von Anbeginn Wert zu legen (Herstellung eines rechten Winkels, eines Parallelenpaares, eines Quadrates durch Falten). Man wird die Eigenschaft der Symmetrie schon sehr früh behandeln können; die Frage nach der Existenz und Lage der Symmetrieachsen bekannter Figuren, etwa der Ziffern oder der großen lateinischen Buchstaben, wird die Schüler zu wichtigen und reizvollen Untersuchungen führen.

In allen diesen Dingen wird der propädeutische Geometrieunterricht durch einen zweckmäßig erteilten Zeichenunterricht wirksam unterstützt werden. Haben beide

auch nicht die gleichen Ziele, so begegnen sie sich doch in der Aufgabe, die Raumanschauung zu wecken und zu fördern.[1]

Es entsteht nun die Frage, was ist durch ebene Figuren darzustellen? Da möchte ich vorweg sagen, daß man meiner Ansicht nach von der Darstellung der Körper durch ebene Zeichnungen in Quarta ganz absehen sollte. In der Ebene werden vorläufig nur ebene Gebilde gezeichnet. Auf die ebene Darstellung räumlicher Dinge wird erst viel später einzugehen sein, da es hier doch nur in ganz primitiver Weise geschehen könnte.[2]

Von geschlossenen geradlinig begrenzten Figuren steht im Vordergrund das Quadrat und das Rechteck. Bei der Zeichnung wird zunächst der rechte Winkel nicht zu konstruieren, sondern mit dem Dreieck zu zeichnen sein. Dann folgt der Rhombus, vielleicht auch das Parallelogramm, schließlich das Dreieck. Von krummlinigen Figuren ist der Kreis vor allen anderen zu bevorzugen. Alle diese Figuren sind gewissermaßen von den Körpern, an denen sie beobachtet werden, abzulesen und abzulösen und dann in die Zeichenebene zu bringen.

Eine nicht zu unterschätzende Vorarbeit für den Geometrieunterricht ist es, die Schüler mit der üblichen Bezeichnungsweise (Punkte: große lateinische Buchstaben, Strecken: kleine lateinische Buchstaben, Winkel: kleine griechische Buchstaben) bekannt zu machen und sie in deren Gebrauch durch ständige Benutzung bei Beschreibungen und Aufgaben zu üben. Man darf auch vor regelrechten Schreibübungen bei den griechischen Buchstaben nicht zurückschrecken.

Eine wichtige Übung besteht darin, die Elementarfiguren aus vorgelegten Ornamentmustern u. dgl. herauszukennen und umgekehrt, aus ihnen Zierfiguren zu bilden. Treutlein hat solche Figuren in großer Zahl zusammengestellt. Vor einem Zuviel ist zu warnen, zumal wenn die zur Verfügung stehende Zeit gering ist.

Aus der Betrachtung und Zeichnung der ebenen Figuren sind nun wieder die Elemente herauszuschälen, aus denen sie aufgebaut sind, die Strecken, Geraden, Strahlen, Punkte, Winkel. Am meisten Schwierigkeit macht nicht die beiderseits unendliche Gerade — daran wird sich der Quartaner oder Quintaner kaum stoßen — wohl aber der Winkel. Die Unabhängigkeit der Größe eines Winkels von der Schenkellänge — genauer: davon, wie lang die Schenkel in der Figur ausgezogen sind — will ihm meist nicht recht in den Kopf. Es ist deshalb empfehlenswert, vorher genau die Unterscheidung Gerade, Strahl, Strecke zu behandeln und dann erst zu dem aus zwei Strahlen mit gemeinsamem Endpunkt gebildeten Winkel überzugehen. Von den Winkeln ist wieder der wichtigste und zuerst zu behandelnde der rechte. Man kann sehr lange Zeit mit dem rechten Winkel allein auskommen, ohne die anderen ausdrücklich zu benutzen. So hat es schon 1877 Kretschmer in seiner Propädeutik gemacht.[3]

---

[1] Als eine anschauliche Darstellung von Stoff und Methode des Zeichenunterrichts empfehle ich: K. Elßner, Aufgaben für Zeichnen und Werktätigkeit. 2 Teile. Dresden-Wien (A. Müller) 1907 u. 1910.

[2] In jüngster Zeit haben einige Methodiker praktische Versuche mit der schrägen Parallelperspektive schon in Quarta gemacht, wie sie mir schrieben, mit gutem Erfolg. Weitere Versuche sind abzuwarten.

[3] E. Kretschmer, Geometrische Anschauungslehre, Posen (Jolowicz) 1877.

Die geometrische Propädeutik hat zunächst die Aufgabe, in qualitativer Hinsicht die der Geometrie zugrunde liegenden Begriffe zu klären; in quantitativer Hinsicht findet das Betrachten und Darstellen seine Ergänzung durch das Messen und Berechnen der Größen, von dem wir gleich sprechen werden. Der Fehler, der beim Schüler trotz aller Propädeutik immer wieder zu konstatieren ist, ist der, daß er die Begriffe noch nicht in ihrer vollen Allgemeinheit erfaßt, daß er, im Gedanken an einige Beispiele, die ihm einfallen, sie zu eng nimmt. Dieser Fehler spielt ja überall auch in der mathematischen Wissenschaft eine Rolle. Man faßte den analytisch fundamentierten Kurvenbegriff zu eng, und es entging einem, weil man sich an das sichtbare Kurvenbild anlehnte, die Weierstraßkurve, es entgingen einem die stetigen, aber nicht differenzierbaren Funktionen. Man faßte den Flächenbegriff zu eng, und es entgingen einem die einseitigen Flächen usf. Auch in der Schulmathematik hat man immer mit diesem Fehler zu kämpfen, der, wie jeder ernsthafte Fehler, eine Quelle neuer Belehrung wird. Die Tangente wird so definiert, wie man es am Kreis gewöhnt ist: „Eine Gerade, die nur einen Punkt mit der Kurve gemeinsam hat", und was dergleichen Beispiele mehr sind. Da gibt es ein sicheres, schnell wirkendes Mittel, um solche Fehler aufzudecken. Der Lehrer zeichnet wortlos ein Gegenbeispiel an die Tafel.

Auch hier in der Propädeutik möge man recht oft so verfahren. Meint der Schüler, im Viereck seien die Diagonalen gleich, so zeichne man ihm ein Parallelogramm an die Tafel, hält er alle Flächen nach dem Muster von Kegel und Zylinder für abwickelbar, so lasse man ihn den Versuch machen, die Kugelfläche abzuwickeln usf.

Hierher gehören auch die Fragen, in denen dem Schüler Aufgaben gestellt werden, die er beim besten Willen nicht lösen kann, und die auch der Erwachsene meist nicht herausbekommt, weil er nicht daran denkt, daß es außer der Ebene noch den Raum gibt. Wie kann man aus 6 Streichhölzern vier gleichseitige Dreiecke bilden? — Man ordnet sie in Form eines Tetraeders an. Wie kann man aus drei, aus zwei Münzen ein Kreuz bilden? Nun, der Leser versuche es einmal!

Wie weit soll man beim Schüler die Anschauung entwickeln? Treutlein geht so weit, zu verlangen, daß man dahin kommen muß, ganz auf Modelle zu verzichten. Das deckt sich mit seinem bekannten Ausspruch: Modelle sind dazu da, daß sie sich selbst entbehrlich machen. Und wie mit den Modellen natürlich auch mit ihren ebenen Brüdern, den Zeichnungen. Kann man wirklich dieses Ziel erreichen? Treutlein läßt nach einiger Zeit, wenn die Schüler genug mit materiellen Würfeln gearbeitet haben, mit Luftwürfeln operieren. Dann fallen auch die fort; der Schüler soll den Würfel vor seinem geistigen Auge sehen. Er soll sich den Würfel „vorstellen" können.

Gleiches gilt von den ebenen Gebilden. Wir werden später noch über die Kopfgeometrie zu sprechen haben. In der Propädeutik möchte ich raten, nicht darauf zu bestehen. Ganz gewiß nicht dann, wenn nicht so viel Zeit zur Verfügung ist, wie sie Treutlein voraussetzt. Bei dieser Forderung spielt nämlich die psychische Veranlagung der einzelnen Schüler eine große Rolle. Mag sie auch beim einzelnen Individuum keine starre, bei der Erziehung unveränderliche Größe sein, jedenfalls gibt es hier große individuelle Verschiedenheiten, unter den Lehrern wie unter den Schülern. Man mutet den motorisch oder akustisch veranlagten Schülern zuviel zu,

wenn man den visuell veranlagten Typ als Norm nimmt. Hier ist also Vorsicht dringend geboten, zumal die Kontrolle, ob denn nun wirklich der Schüler eine Vorstellung von der Sache hat und nicht sein akustisch gerichtetes Gedächtnis zu Hilfe nimmt, nicht ganz leicht ist, jedenfalls nicht in einer Klasse von 50 Schülern. Eine eigenartige Beleuchtung erfahren diese Dinge durch die Entdeckung, daß die Zahl der Jugendlichen — ganz im Gegensatz zu den Erwachsenen — die ein regelrechtes, subjektives Anschauungsbild erzeugen können, außerordentlich groß ist.[1]

4. Messen und Schätzen.

Beim Messen wird die Kenntnis der Maße vorausgesetzt. Man darf annehmen, daß der Rechenunterricht bereits in der Sexta dafür gesorgt hat, daß der Schüler mit den Längen-, Flächen- und Raummaßen vertraut ist. Es wird aber doch in der Propädeutik nötig sein, auf alle Fälle noch einmal auf die Erklärung dieser Größen zurückzugreifen. Die Forderungen, die wir für den Sextaunterricht erhoben hatten, sind hier noch einmal zu wiederholen. Der Schüler muß Eichmaße recht häufig vor die Augen gestellt bekommen: 1 cm und 1 dcm in seinem Heft, 1 dcm und 1 m an der Tafel oder an der Wand des Schulzimmers, 1 cm^2 und 1 dcm^2 im Heft, 1 dcm^2 und 1 m^2 an der Wand, 1 a und 1 ha auf dem Schulhof, 100 m im Gelände, 1 dm^3 und 1 m^3 in einem geeigneten Modell.

Zum Messen gehört aber mehr als eine Einheit; man braucht einen möglichst brauchbaren Maßstab. Wir behandeln zunächst die Längenmaße, und da muß man voraussetzen, daß jeder Schüler einen in Zentimeter und wenigstens teilweise in Millimeter unterteilten Maßstab — am Lineal — zur Hand hat. An der Tafel operieren wir mit einem größeren, etwa bis 1 m reichenden Maßstab. Bei Messungen draußen kommt dazu Meßlatte oder Meßband. Es werden zunächst mit dem Maßstab mannigfache Strecken zu messen sein, erst vielleicht an den Gegenständen des Schulzimmers (für Hausaufgaben eignen sich Gegenstände von vorgeschriebener Größe, z. B. Länge und Breite eines Quartheftes, einer Postkarte, einer Marke, Durchmesser eines Zehnpfennigstückes u. dgl.), dann an Strecken, die der Schüler selbst gezeichnet hat. Wenn die Verhältnisse günstig liegen, versäume man nicht, auch auf den Schulhof, auf die Plattform, die auf keiner Schule fehlen sollte, oder ins Gelände zu gehen und dort Messungen vor-

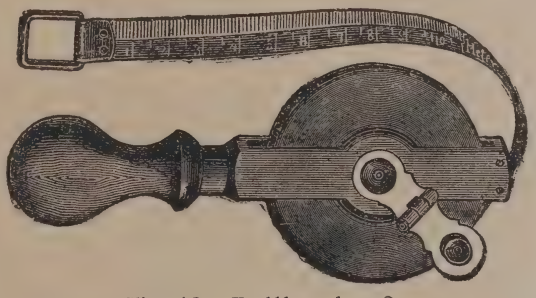


Fig. 16. Rollbandmaß.
Ausführung der Firma Georg Butenschön in Bahrenfeld bei Hamburg.

[1] Über die „Eidetiker" vgl. O. Kroh, Subjektive Anschauungsbilder bei Jugendlichen, Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1922.

zunehmen. Besondere Bedeutung für später haben Messungen an Körpern, etwa Würfeln, Quadern usf.[1]

Hat der Schüler in Messungen von Strecken einige Übung, dann ist vor der eigentlichen Messung eine Schätzung vorzunehmen.[2] Es empfiehlt sich, um Schätzung und Messung in das rechte Licht zu stellen, beide Werte notieren und den Fehler vermerken zu lassen. Man hebt damit den Eifer. Wetten zwischen den Schülern zu veranstalten, wie es J. C. V. Hoffmann einmal vorgeschlagen hat, halte ich für verfehlt. Zuweilen lasse man auch einmal Strecken nach der Erinnerung schätzen. Auch Erwachsene hauen dabei ganz beträchtlich vorbei. Wie hoch ist ein Zylinderhut, wie hoch ein Tisch? Schwieriger noch ist es, die Höhe eines Bauwerkes, die Entfernung eines Punktes im Gelände vom Beobachter zu schätzen.[3] An solche Fragen, die man auf einem mathematischen Spaziergange mit seiner Klasse aufwerfen kann, möge aber nur derjenige Lehrer herangehen, der selbst eine gute Übung im Schätzen hat. Er schätzt sonst womöglich gewaltig daneben, wie er bei einem Blick auf seine Karte sieht. Oder aber, wenn er ein vorsichtiger Mann ist, es geht ihm wie jenem Oberst, der sich über seinen Leutnant wundert, daß er die genaue Antwort herunterschnarrt: „Die Eisenbahnbrücke ist $113\frac{1}{2}$ m lang." „Woher wissen Sie das so genau?" „Ich habe auch den Brückenwärter gefragt." — Es bedarf nicht langer Ausführungen, wie sich hier die Heimatkunde im erdkundlichen Unterricht und der propädeutische Unterricht in der Geometrie gegenseitig in die Hände arbeiten können.

Vielleicht wird der eine oder andere auch schon hier der Fehler gedenken, die beim Schätzen aus psychologischen Gründen auftreten und als geometrisch-optische

---

[1] Vgl. hierzu Schmiedeberg, Die Verschmelzung von Planimetrie und Stereometrie im geometrischen Anfangsunterricht und im Lehrgang der Mittelklassen, Ubl 23 (1912) S. 100ff.

[2] Aus einer kleinen Schrift: E. Piltz, Über Naturbeobachtung des Schülers, 6. Aufl., Weimar (Böhlau) 1913, setze ich in Auswahl eine Liste von Gegenständen, die sich zur Schätzung eignen, hierher, weil sie besser als lange Ausführungen zeigen, wie eng an dieser Stelle Mathematik, Biologie und Heimatkunde zusammenhängen.

Strecken: Die Höhe eines Bienensaugexemplars, einer Fichte, eines Apfels; der Durchmesser einer geöffneten Asterbüte, der Umfang eines Baumstammes; die Rückenhöhe einer Hauskatze, eines Pferdes, die Höhe von Sperling und Gans, die Höhe eines Weinbergschneckenhauses, die Flügelspannweite von Vögeln und Schmetterlingen; der Abstand zweier Bäume, zweier Telegraphenstangen; ein großes überschaubares Stück einer Landstraße.

Winkel: Der Mittagshöhenwinkel der Sonne, von drei Sternen gebildete Winkel, Böschungswinkel an Eisenbahndämmen, Steigungswinkel von Landstraßen und Fußwegen, Winkel zwischen Ast und Stamm.

Flächengrößen: Der Flächeninhalt eines Baumstammquerschnittes, eines Rindsfelles, einer Fensteröffnung, des Hausgrundes, eines Gartens, eines Teiches.

Körpergrößen: Der Kubikinhalt von Kästen, Zimmern, Baumstämmen, Früchten, Steinen.

Zahlengrößen: Wieviel Bäume stehen auf dem Platz? Wieviel Vögel sind jetzt vorübergeflogen? Wieviel Randblüten hat dieses Wucherblumenexemplar?

[3] Schwierig sind Schätzungen von Höhenunterschieden im Gelände. Der Lehrer, der sich an solche Dinge heranwagt — und das ist gewiß sehr zu empfehlen —, muß eine genaue Kenntnis der Höhen der Heimat und gewisse Vergleichswerte zur Verfügung haben. In Jena konnten wir eine kleine Schrift: E. Piltz, Die Höhe der Stadt Jena und ihrer weiteren Umgebung, Jena (Vopelius) 1909, für diese Zwecke benutzen.

Täuschungen zusammengefaßt werden, also z. B. der Tatsache, daß vertikale und horizontale Strecken von gleicher Länge nicht gleichlang erscheinen, daß man parallele Geraden durch Schraffierung scheinbar konvergent machen kann u. dgl.[1]

Dem Messen von gegebenen Strecken tritt die andere Aufgabe zur Seite, Strecken von vorgeschriebener Länge zu zeichnen. Auch da wird man die Strecke zunächst schätzungsweise und erst dann mit dem Maßstab zeichnen lassen. Nun schließen sich Aufgaben an, in denen Strecken „nach Augenmaß" und mit dem Maßstab addiert, subtrahiert, vervielfältigt, geteilt werden.

Schwieriger als bei den Längen steht es mit dem Messen und Schätzen bei Winkeln. Das hängt zuerst damit zusammen, daß der Winkel den Schülern zunächst etwas fremd ist, und dann, daß auch das Winkelmaß nicht ganz so einfacher Art ist als das der Strecke. Um so größeres Gewicht muß auf Übungen mannigfaltigster Art gelegt werden. Auch hier wird es sich empfehlen, Schätzung und Messung am gleichen Objekt nacheinander vornehmen und dann den Fehler feststellen zu lassen. Sehr schwierig gestalten sich Schätzungen im freien Felde oder von der Plattform der Schule aus, etwa Neigungen von Bergabhängen, Stern- und Sonnenhöhen, Winkelabstände zweier Marken am Horizont u. dgl. Für die erste Übung ist ein Uhrmodell mit verstellbaren Zeigern sehr praktisch, bei dem man den wahren Winkel leicht durch Überlegung findet. Bei Winkelschätzungen im Felde und am Himmel ist recht zweckmäßig der Faustwinkel. Streckt man die Faust vor sich aus, so entspricht ihr ein Gesichtswinkel von etwa 10^0. Spreizt man die Hand, so ist der Gesichtswinkel zwischen Daumen- und kleiner Fingerspitze etwa das Doppelte.

Auch beim Winkelbegriff werden Additionen und Subtraktionen von gezeichneten Winkeln, einfache Vervielfältigungen und Teilungen einmal nach Augenmaß, dann unter Verwendung des Winkelmessers, vielleicht auch schon ohne Winkelmesser mit dem Stechzirkel auszuführen sein.

Die Genauigkeit der Messungen soll man so weit treiben, als die Maßwerkzeuge sie ohne Not hergeben, also bei Zeichnungen im Buche auf Millimeter und Grad, an der Tafel auf Zentimeter und Grad. Der Nonius gehört nicht in die Propädeutik.

Die ebenen Figuren, an denen sich Messungen und Schätzungen in erster Linie zu versuchen haben, sind Quadrat und Rechteck. Diese Figuren leiten dann zum Flächenmaß über. Bei der Angabe von Flächen- und Volumengrößen handelt es sich fast niemals um ein unmittelbares Messen, zumeist um ein Berechnen. Wir gehen darauf erst im nächsten Abschnitt ein. Aber beim Schätzen ist eine Art instinktiver Messung auszuführen, wenn anders die Schätzung nicht auf einer Überschlagsrechnung beruht. Die Fehler sind hier größer als bei Längen- und Winkelschätzungen, erst recht ein Grund dafür, häufige Übungen vorzunehmen. Allerdings wird man diese Übungen zum Teil in höhere Klassen verlegen. Zumal wenn die Raumgrößen mit dem Gewicht der Körper in Beziehung gesetzt werden, begegnet man Unterschätzungen, die geradezu grotesk sind. Das Gewicht der Luft in einem Zimmer, einer Korkkugel von einem Meter Radius, einer Goldkugel von Globusgröße hat

[1] Über optische Täuschungen vom mathematischen Standpunkte aus vgl. F. Schilling, Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über Photogrammetrie, Leipzig (Teubner) 1904. — Im Linearzeichenunterricht ist später Gelegenheit, darauf zurückzukommen (vgl. Teilband 3).

ganz unerwartet hohe Werte. Es gibt eine beliebte Lotterie bei Wohlfahrtsveranstaltungen, die Zahl der Erbsen in einem Glas erraten zu lassen. Die höchste Schätzung des Unkundigen bleibt immer weit unter der wirklichen Zahl — sogar wenn der Schätzende ein Mathematiker ist! Wie wichtig solche Schätzungen gleichartiger Gegenstände z. B. für die militärische Erziehung sind, ist genugsam bekannt.

Auch die Analogie zwischen räumlichen und ebenen Figuren spielt hier zuweilen eine verhängnisvolle Rolle. Daß die Pyramide die Hälfte des entsprechenden Prismainhaltes hat, kann man nicht selten hören. Man lege einem Schüler der höheren Klasse die Frage vor: Wie groß ist der Restkörper, der entsteht, wenn man von einem Würfel die Ecken so abschneidet, daß die Schnittflächen durch die Kantenmitten gehen? Die Antwort wird nach Analogie mit der Ebene lauten: Halb so groß wie der Würfel, nicht, wie es richtig ist, $\frac{5}{6}$.

Wie weit sollen nun in der Propädeutik die Übungen im Zeichnen mit vorgegebenen Größen gehen? Wenn ich es einmal etwas unbestimmt, aber doch vielleicht verständlich ausdrücken darf: Man soll noch nichts konstruieren, sondern nur Zeichnungen ausführen. Solche Zeichnungen, für die, wie schon gesagt, neben Zirkel und Lineal auch Winkelmesser und Dreieck benutzt werden, führen an Quadrat, Rechteck und Parallelogramm, an Dreieck, Kreis, reguläres Sechseck u. dgl., ohne daß es sich um Konstruktionen im euklidischen Sinne handelt. Im Gegenteil werden Handgriffe, die in der strengen Geometrie der Alten verboten sind, wie etwa das Halbieren, Dritteln usw. von Winkeln und Strecken mit dem Stechzirkel, vor den bei Euklid üblichen Konstruktionen oft den Vorzug verdienen.[1] Manche der Übungen und Tatsachen, um die es sich nachher im eigentlichen Geometrieunterricht handelt, werden nachher an solche Zeichnungen im propädeutischen Unterricht anknüpfen.

Wagt sich der Rechenunterricht an die Darstellung einfacher Größen durch Strecken oder Rechtecke, zieht der arithmetische Unterricht schon von den mittleren Klassen an die graphischen Darstellungen heran, dann sollte hier in der Propädeutik die Zeichnung des Achsenkreuzes und die Festlegung eines Punktes durch zwei Koordinaten nicht fehlen. Es handelt sich dabei in der Tat um Streckenmessungen und Konstruktionen einfachster Art. Aber man stelle nur einzelne Punkte und Punktfolgen, keinesfalls schon Kurvenzüge dar, höchstens daß man z. B. bei der Wiedergabe von Temperaturbeobachtungen u. dgl. die Punkte durch gebrochene Streckenzüge verbindet. Benutzt man quadriertes Papier — es braucht nicht Millimeterpapier zu sein, das in Rechenheften gebräuchliche Papier tut die gleichen Dienste —, so sind die Werte in zweckmäßiger Weise abzukürzen und die letzten Stellen schätzungsweise zu berücksichtigen, eine zweckmäßige Übung früher erwähnter Aufgaben.

Soll man schon in der Quarta von vorgelegten Größen Zeichnungen in verkleinertem Maßstabe herstellen lassen? Ich glaube, daß dagegen im allgemeinen nichts einzuwenden ist. Daß die in Dezimeter an der Wandtafel gezeichnete Figur in allem

[1] Was hier gesagt ist, gilt nicht nur für die Vorstufe der Geometrie. Wenn man z. B. ein regelmäßiges Zehneck konstruiert und nachher mit dem Stechzirkel die Probe macht, wird man beobachten, daß das Arbeiten mit dem Stechzirkel schneller zum Ziel führt und genauer ist. Über die rein mathematische Seite solcher Konstruktionsverfahren vgl. J. Hjelmslev, Geometrische Experimente (5. Beiheft zur ZmnU), Leipzig (Teubner) 1915.

ähnlich ist der in Zentimeter gezeichneten Figur im Schülerheft, erscheint dem Schüler selbstverständlich; daß in ähnlichen Figuren die Winkel gleich, die Strecken in gleichem Maßstab verändert sind, faßt er auf, ohne sich Rechenschaft von der Besonderheit dieser Tatsache zu geben. Immerhin werden etwas strenger veranlagte Mathematiker solche Zeichnungen in verändertem Maßstabe vermeiden. Wohl mit Unrecht. Man begibt sich damit eines anschaulichen Hilfsmittels zum Festhalten der Ergebnisse von Messungen im Freien wie im Zimmer. Also lasse man Fenster, Türen, Wandtafel, Pultdeckel, beim Parallelenbegriff die Spurweite der Eisenbahnschienen und anderes mehr, wenn es in natürlicher Größe sich nicht wiedergeben läßt, in verkleinertem und genau angegebenem Maßstabe zeichnen unter Zugrundelegen der vorher durch Messung oder Schätzung gefundenen Maße. Der strenge Mathematiker mag sein Gewissen damit beruhigen, daß der Geograph schon in Sexta im ersten Anfangsunterricht dieselbe Sünde begangen hat.

Schließlich noch eins. Schon hier in der Propädeutik liegt, wenn man sich dem Zeichnen und Messen zuwendet, die Gefahr einer Vernachlässigung der dritten Dimension vor, selbst wenn man darauf bedacht ist, die darzustellenden Größen an Raumgebilden — im Zimmer, im Gebäude, im Freien — aufzusuchen. Man lasse deshalb nicht nur Grenzflächen messen und zeichnerisch wiedergeben, sondern lege hin und wieder auch einmal einen Schnitt durch diesen oder jenen als Gebrauchsgegenstand verwandten Körper, den man messend und zeichnend verfolgt.

5. Zeichnerische und rechnerische Bestimmung geometrischer Größen.

Ist der für die propädeutische Geometrie bereitgestellte Zeitraum nicht sehr groß, treibt man z. B. Propädeutik nur im ersten Drittel oder in der ersten Hälfte des Jahres, in dem außerdem noch mit dem eigentlichen Geometrieunterricht begonnen werden soll, so wird man zur Not mit dem auskommen, was bisher besprochen ist, mit dem Betrachten und Beschreiben, dem Darstellen, Schätzen und Messen der geometrischen Gebilde. Man wird darauf verzichten können, nun daran auch Berechnungen von solchen Gebilden zu knüpfen, die der Messung nicht unmittelbar zugänglich sind, und weiter noch die zeichnerische Bestimmung von Größen aus anderen gegebenen Stücken, von denen sie abhängen. Diese Aufgaben übernimmt vielmehr der nachfolgende Geometrieunterricht selbst.

Hat man mehr Zeit zur Verfügung, dann kommen zunächst Flächen- und Inhaltsberechnungen in Betracht. Ausgehend von der Flächenberechnung bei einem Quadrat und einem Rechteck kann man, ohne logische Beweisführung, rein anschaulich die Regeln für die Berechnung von Parallelogrammen, Trapezen, Dreiecken entwickeln. Ebenso kann man ohne Schwierigkeit, wenn auch unter einer etwas größeren Inanspruchnahme der Anschauungskraft, die Inhaltsbestimmung des Quaders vornehmen. Darüber hinauszugehen, würde ich nicht raten.

Die Berechnung von Strecken und Winkeln setzt, abgesehen von trivialen Fällen und einfachen planimetrischen Sätzen, entweder die hier ganz ausscheidende Trigonometrie voraus, oder aber sie operiert mit dem pythagoreischen Lehrsatz und der Ähnlichkeitslehre. Obwohl es nun leicht möglich ist, der Ähnlichkeitslehre eine sehr einfache Fassung zu geben, indem man ihr mit den in der Regeldetri üblichen Schlüssen, die proportionale Größen voraussetzen, beikommt, rate ich doch dringend

davon ab, im propädeutischen Unterricht der höheren Schulen diese Dinge vorweg zu nehmen; ganz etwas anderes ist es in der Volksschule, weil da die Gelegenheit, auf die Fragen später zurückzukommen, fehlt.

Weniger ängstlich braucht man bei der Abgrenzung des propädeutischen Unterrichts gegen den eigentlichen Geometrieunterricht hinsichtlich der Konstruktion zu sein. Hier läßt sich, wenn Zeit vorhanden, tüchtig vorarbeiten, so daß nachher die den Kongruenzfällen zugrunde liegenden Dreieckskonstruktionen, vor allem aber die Fundamentalkonstruktionen: Antragen einer Strecke, eines Winkels, Halbieren einer Strecke, eines Winkels, Fällen und Errichten einer Senkrechten, den Schülern bereits bekannt sind. Man muß sich aber dabei immer bewußt bleiben, daß damit eine Behandlung der Konstruktionen im späteren Geometrieunterricht durchaus nicht überflüssig wird. Ich sagte oben, man wird im propädeutischen Unterricht gewissermaßen nur das Zeichnen geben, noch nicht die eigentliche mathematische „Konstruktion". Die auf logische Schlußfolgen gestützte Einsicht in die Richtigkeit der Konstruktion, also das, was in der Darstellung einer Konstruktionsaufgabe der Beweis liefert, wird fehlen, ebenso das Bewußtsein von der bei der Ausführung der Konstruktion geforderten Beschränkung der zeichnerischen Hilfsmittel, schließlich auch die Diskussion der Ein- und Mehrdeutigkeit der Lösungen.

Wenn auch im propädeutischen Unterricht nur wenig berechnet, nur wenig konstruiert werden sollte, so ist es doch nötig, an der Hand einfacher Übungen rechnerischer oder konstruktiver Art mit der Schreibweise der Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen von Strecken, Winkeln, Flächen usw., vielleicht auch mit den Zeichen für „größer als" und „kleiner als" bekannt zu machen. Es ist nicht angängig, daß den Schülern später mit einmal Ausdrücke wie $a + b$, $2R - a$, $a - (b + c)$ u. dgl. ganz unvermittelt gegenübertreten. Dann würde die begriffliche Auffassung an solchen Stellen erschwert werden dadurch, daß die Schreibweise die sachlichen Schwierigkeiten vermehrt. Derlei Übungen erfordern keine lang ausholenden Erläuterungen, wenn, wie wir es geraten, schon der Rechenunterricht gelegentlich vor Buchstabenausdrücken nicht zurückschreckt. Wenn dann außerdem die Bezeichnung zeichnerisch gegebener Strecken und Winkel mit Buchstaben im propädeutischen Unterricht von Anfang an hinzugekommen ist, so ist das Benutzen von Buchstabenausdrücken für den Schüler nur noch ein kleiner Schritt weiter. Das entbindet aber den Lehrer nicht von der Verpflichtung, in zahlreichen Übungen bei allerlei Gelegenheiten dem Schüler Sicherheit in der Auffassung und Verwendung beizubringen.

DRITTES KAPITEL.

Planimetrie.

1. Definitionen im Unterricht.

Ehe wir an die Einzelheiten des geometrischen Lehrstoffes herantreten, müssen wir uns mit einigen prinzipiellen Fragen auseinandersetzen: Wie stellt sich die Schule zu dem mathematischen Rüstzeug, zu Definition, Axiom, Lehrsatz, Beweis?

Eine uralte Tradition hat gerade in der Geometrie ein ganz bestimmtes, festes Schema geschaffen: Grundsätze werden von den Lehrsätzen unterschieden, Grundbegriffe von den durch Definitionen festgelegten abgeleiteten Begriffen. Für die Herleitung eines Lehrsatzes gilt die eherne Disposition: Voraussetzung, Behauptung, Beweis, genau so wie für die geometrische Konstruktionsaufgabe die Folge: Analysis, Konstruktion, Beweis, Determination.

Man hat diese Dispositionen, die den Geist in eine heilsame Zucht nehmen, heute vielfach als etwas Überflüssiges beiseite geschoben. So viel ist ja sicher, es sind äußere Handgriffe, um die es sich handelt: Das Schema ist nicht das Kennzeichen der Mathematik, wie man wohl in einer Zeit wähnte, als man alle Wissenschaften auf diese äußerliche Form zu bringen versuchte. Es mutet uns fast humoristisch an, wenn etwa Christian Wolff in seinen Anfangsgründen die Lehre von der Fortifikation, von der Artillerie, von der Baukunst in das Schema Euklids hineinzwängt, und doch handelt es sich da noch um Gebiete, die damals zur angewandten Mathematik zählten. — Einer radikalen Beseitigung der Schemata ist aber keinesfalls das Wort zu reden. Es sind doch sehr wertvolle Werkzeuge, die man nicht ohne Not und nicht ohne Ersatz zum alten Eisen legen sollte. Doch darüber später mehr.

Das erste, was dem Schüler auffällt, wenn er Mathematik treibt, ist, daß er die Begriffe, mit denen er operiert, nicht als etwas Selbstverständliches hinnehmen darf, sondern daß er sich über sie aussprechen muß, daß er, wir wollen es so nennen, obwohl es streng nicht immer zutrifft, sie definiert. Ein Begriff kann sehr wohl auch da vorhanden sein, wo man nicht in wohlgesetzter Rede über seine Eigenschaften oder gar über genus proximum und spezifische Eigenschaften Auskunft geben kann. Der Schüler weiß sehr wohl, was ein Tisch ist, hat einen sicheren Begriff davon, würde aber doch, wenn wir ihm eine Definition abverlangten, ein höchst verdutztes Gesicht machen. Ich kann den Begriff Lippenblüter recht gut kennen, d. h. von jeder mir vorgelegten blühenden Pflanze aus der heimischen Flora auf den bloßen Anblick hin sagen, ob sie zu dieser Familie gehört oder nicht, einfach weil ich mit der Mehrzahl der Gattungen und auch Arten meiner Heimat vertraut bin; das be-

deutet gewiß eine recht gute Bekanntschaft mit dem in Frage stehenden Begriff. Und doch würde es mir schwer fallen, diesen Begriff vollständig zu definieren.

Es ist falsch, aus alledem zu schließen: Da sieht man, daß die Definition nichts wert ist, es kommt nur darauf an, daß meine Kenntnis von einem Begriff derart ist, daß ich von irgendeinem mir vorgelegten Ding aussagen kann, ob es unter den Begriff fällt oder nicht. Richtig ist vielmehr, daß wir beides fordern, die Bekanntschaft mit den Dingen und die Fähigkeit, diesen Kenntnissen einen sprachlichen Ausdruck zu geben.

Einen Begriff definieren heißt, ihn aus früheren Begriffen ableiten. Da man irgendwo einmal mit den Begriffen anfangen muß, so brauchen wir also Grundbegriffe, die wir nicht weiter auf frühere zurückführen. Solche Grundbegriffe sind für die Geometrie z. B. Punkt, Ebene, Gerade. Euklid gibt Beschreibungen dieser Gebilde. Daß solche sog. Definitionen aber tatsächlich nur Beschreibungen, nicht wirkliche Definitionen sind, wird noch heute nicht immer erkannt.

Verweilen wir einen Augenblick bei den Definitionen vom Punkt[1]: „Ein Punkt ist, was keine Teile hat", sagt Euklid. Fehlt aber der Oberbegriff, das Substantiv. „Ein Punkt ist, was keine Ausdehnung hat." Wird also der Begriff Dimension vorausgesetzt. „Punkt ist, was einen Ort im Raume bestimmt, ohne selbst ein Teil des Raumes zu sein." Was aber ist ein Ort im Raume, doch wohl ein Punkt im Raum? Oder bei der Geraden: Euklid sagt: Eine Gerade ist eine Linie, die gleich ist zwischen ihren Punkten (oder wie man sonst das ἐξ ἴσου κεῖται übersetzt hat); Aristoteles oder wer sonst meint: die Gerade ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten — das Längenmaß ist aber noch nicht vorher definiert. — Nach Graßmann ist die Gerade eine Linie mit konstanter Richtung — aber was ist Richtung? Leibniz erklärt die Gerade als eine Linie, die invariant bleibt bei Rotation um zwei ihrer Punkte — aber was ist Rotation? Wieder ein anderer meint, die Gerade ist eine Linie, die in sich verschiebbar ist. Aber was heißt hier verschiebbar? Auch der Kreis oder eine räumliche Spirale ist in sich verschiebbar.

Also gestehen wir zunächst einmal ein, daß die Geometrie bei den Grundbegriffen keine Definition gibt, sondern eben nur eine Kennzeichnung.

Im ersten Kapitel des ersten Teilbandes wird dargelegt, wie sich die Wissenschaft geholfen hat. Sie hat ein Beziehungssystem aufgestellt. Sie hat die Begriffe A, B, C ...., stellt in einem Axiomsystem soundsoviel nicht miteinander in Widerspruch stehende, möglichst auch nicht überbestimmte Aussagen über sie zusammen, die lediglich eine Beziehung zwischen den Begriffen A, B, C, ... herstellen, und findet damit die Grundlagen der Geometrie, wobei sie es dem Einzelnen ganz überläßt, was er sich unter den Begriffen A, B, C, ... vorstellt, ja ob er sich überhaupt etwas vorstellt, mehr als ein bloßes Symbol für etwas sonst Unbestimmtes. Im Grunde ist es sogar für den Axiomatiker gefährlich, wenn er besondere Vorstellungen mit den Dingen verbindet; das wird ihm in seinen Untersuchungen der rationalen Geometrie eher schaden als nützen, da er Gefahr läuft, etwas für selbstverständlich anzusehen, was es keineswegs ist. Eine solche Geometrie ist ganz losgelöst von der Anschauung. Ja man muß sich geradezu wundern, daß sie auf das, was der Nicht-

[1] Die Reihe der Definitionen des Punktes entnehme ich J. Kober, Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe, ZmnU 1 (1870), S. 228ff.

axiomatiker unter Punkt, Gerade, Ebene versteht, überhaupt anwendbar ist, daß sie überhaupt mit der Raumlehre des täglichen Lebens in Berührung steht. Daß sie es dennoch tut, liegt natürlich daran, daß jenes Axiomsystem doch nicht nur so beliebig hingeworfen ist, sondern daß es seine Kraft aus der Anschauung gezogen hat. Wie die Beziehungen zwischen diesem „mathematischen" und dem „sinnlichen" Raum sind, darüber gehen die Meinungen je nach der philosophischen Einstellung auseinander.[1]

Es war notwendig, die rationale Geometrie zu kennzeichnen. Das Gesagte wird hinreichen, um zum Schluß zu kommen, daß für die Planimetrie der Schule die rationale Geometrie nicht in Frage kommt. Es ist nicht ausgeschlossen, daß man in Prima auf die grundlegenden Fragen der Axiomatik eingeht, weil eine Verständigung über Raum und Zeit zu den Hauptaufgaben einer Erkenntnistheorie gehört. Ein solcher Exkurs, über den gleich noch etwas zu sagen sein wird, kommt in gleicher Weise den Interessen der Philosophie wie denen der Mathematik entgegen. Der tatsächliche Aufbau der Geometrie in der Schule ist aber in dieser axiomatischen Form unmöglich.

Man beachte, was das für unsere Schulmathematik bedeutet. Sie ist von Anfang an, am Maßstabe der heutigen Mathematik gemessen, unstreng. Und wer das Wesen der Mathematik in der Strenge ihres Aufbaues sieht, der muß bekennen, daß unsere Schulmathematik, wenigstens die Geometrie, keine Mathematik ist. Gott sei Dank hat man aber auch schon vor den modernen Axiomatikern und vor den modernen Analytikern Mathematik getrieben, und damit schon ist unsere Schulmathematik als Mathematik gerettet.

Doch zurück zu den Definitionen. Wie soll man sich in der Schule zu ihnen stellen? Daß wir nicht den vergeblichen Versuch machen werden, Grundbegriffe zu definieren, ist nach dem Gesagten klar. Ja wir werden auch manche Dinge als Grundbegriffe auffassen, auf die man bei vorgeschrittener Wissenschaft zu verzichten gelernt hat. Für uns in der Schule werden z. B. Linie und Fläche Grundbegriffe sein, wenn man ihnen in der Wissenschaft auch von der Geraden und der Ebene her mit dem Grenzbegriff näher kommen kann.

Eine Frage von systematischer Bedeutung ist vielleicht noch die, in welcher Reihenfolge wir die Begriffe einführen, mit denen die Schüler ja schon im propädeutischen Kurs vertraut gemacht worden sind. Euklid geht vom Punkt über die Gerade zur Ebene und zum Raum. Viele Lehrbücher gehen den umgekehrten Weg. Poincaré bemerkt gelegentlich, daß ein solches Verfahren eigentlich sehr empfehlenswert sei, insofern ihm ein tieferer mathematischer Sinn beigelegt werden kann. Natürlich spielt in das alles der Dimensionsbegriff hinein. Wenn man sich aber fragt, wie man die Dimension eines Gebildes untersucht, oder anders ausgesprochen, wie man die Verbindung zwischen Gebilden verschiedener Dimension herstellt, so verfällt man auf jenes in allen Fragen der Analysis situs wertvolle Mittel

[1] Vgl. hierzu W. Lietzmann, Erkenntnislehre im mathematischen Unterricht der Oberklassen (Philosophisch-pädagogische Bibliothek Bd. 9) Charlottenburg, Mundus-Verlag, 1921, und den Vortrag W. Lietzmann, Die Eigenschaften des Raumes in Forschung und Unterricht Ubl 27 (1921) S. 74ff. — Im übrigen wird, soweit die Philosophie in Betracht kommt, hierauf im dritten Teilband zurückzukommen sein.

des Schnittes. Und so ist jene Beschreibung, wonach ein Körper durch Flächen, eine Fläche durch Linien, eine Linie durch Punkte in Teile zerschnitten, oder wie es immer in den Elementarbüchern heißt, begrenzt wird, tatsächlich auch von wissenschaftlicher Bedeutung. Daß es der naiven Betrachtung näher liegt, vom Raume auszugehen als vom Punkt, ist erst recht einleuchtend. Der Begriff der Dimension, der hier von ausschlaggebender Bedeutung ist, erfährt auf späterer Stufe eine wesentliche Klärung durch den Nachweis, daß dem dreidimensionalen Punktraum beispielsweise ein vierdimensionaler Geradenraum entspricht.

Ich sagte schon, es kann von ganz wesentlicher Bedeutung sein, welche Grundbegriffe man einführt. In dieser Hinsicht ist eines von besonderer Bedeutung für die wissenschaftliche Geometrie gewesen. In der Euklidischen Geometrie wird der Begriff der Bewegung oder, wenn man will, der Begriff des starren Körpers nicht gebraucht. Zwar kommt er in den Elementen an einer Stelle vor. Man kann ihn aber durch zweckmäßige Axiome über die Kongruenz, wie sie ja z. B. Hilberts „Grundlagen" geben, ganz eliminieren.[1] Die Frage ist von fundamentaler Bedeutung für die ganze Dreieckslehre. Wenn man nämlich die Bewegungen der Figuren zuläßt, ja wenn man zunächst nur die beiden Untergruppen der starren Bewegung, Rotation und Translation, benutzt, so wird nicht nur das ganze Axiomensystem anders, sondern auch das ganze System der Planimetrie. Man mache sich nur klar, daß wir dann mit dem Richtungsbegriff operieren dürfen, der ja in früheren Elementarbüchern eine große Rolle spielte, dann aber verpönt wurde.[2] Man mache sich weiter klar, daß dann die ganze Parallelenlehre ein anderes Gesicht bekommt. Führen wir die Richtung als primitiven Begriff ein, so fallen damit die nichteuklidischen Geometrien weg.

Bekanntlich verwendet die moderne Schulgeometrie den Begriff der Bewegung in ausgedehntem Maße. Wenn sie den Begriff einführt, so stützt sie das nicht auf besondere Grundsätze. Sie beweist auch nicht das, was sie nachher verwendet. Im Gegenteil, sie will damit ja umständlichen Beweisen aus dem Wege gehen. Sie benutzt also den Bewegungsbegriff als primitiven Begriff. Und nun ist das Merkwürdige, daß man trotzdem es unterlassen hat, die Konsequenzen zu ziehen, daß man an gewissen Stellen in den ersten Grundlagen sich sorgfältig hütet, die Bewegung zu benutzen, z. B. bei der Parallelenlehre, während man sie an anderen Stellen als modernstes, dem funktionellen Denken allein entsprechendes Verfahren preist.

In Frankreich hat man diese Konsequenzen gezogen. 1874 erschienen, zunächst

[1] Im Hilbertschen Axiomensystem sind acht Grundbegriffe als Fundament genommen: Punkt, Gerade, Ebene, Bestimmung einer Geraden durch zwei Punkte, Bestimmung einer Ebene durch drei Punkte, zwischen, Streckenkongruenz, Winkelkongruenz. Der Kongruenzbegriff wird also „stückweise" (Frege) eingeführt. Strecke, Winkel, Dreieckskongruenz sind Beispiele abgeleiteter Begriffe. — Man kann andere Grundbegriffe wählen (z. B. die Strecke und danach die Gerade zum abgeleiteten Begriff machen) und überdies ihre Anzahl wesentlich vermindern.

[2] Wir besitzen eine sehr gründliche Sammlung der in den elementaren Büchern über Geometrie üblichen Definitionen, Grundsätze usw., die leider mit 1890 abschließt und also noch nicht die Früchte der Axiomatik ernten konnte: H. Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts, 2 Bände, Leipzig (Teubner) 1890 u. 1893.

sehr wenig beachtet, die *Nouveaux Eléments de Géométrie* von Méray.[1] Hier ist die Bewegung nicht so wie bei Euklid nur ein gelegentliches Aushilfsmittel, sondern alles beherrschender Grundbegriff. Überall ist von beweglichen Gebilden die Rede. Es wäre aber ganz verfehlt, nun anzunehmen, das Buch von Méray baue sich etwa auf bloßer Anschauung auf. Wir finden ein vollständiges Axiomsystem, aus dem die Lehrsätze gewonnen werden, wenn auch der Schule darin entgegengekommen wird, daß man auf die Forderung der Unabhängigkeit der Axiome verzichtet hat. Darin liegt die Bedeutung dieses wichtigen Buches. Es bringt eine in elementaren Grenzen gehaltene Begründung dessen, was Lie, der wieder in Helmholtz einen Vorgänger hat, mit seiner Gruppentheorie gegeben hat. Damit ist auch gleich angegeben, was man in dem Werk vergeblich sucht; das Buch ist vollständig unbrauchbar für unsere Schulen wie jedes streng axiomatische Buch.[2] Dazu kommt der freilich sehr nahe liegende Fehler, daß es immer den Weg vom Allgemeinen zum Besonderen einschlägt, nicht umgekehrt, so daß z. B. die Dreieckslehre glücklich im zweiten Drittel des Buches zu Worte kommt.[3]

Ein weiterer Einwand gegen Mérays System richtet sich gegen die große Zahl von Axiomen, deren es benötigt. Hier setzt eine andere, mit der von Méray verwandte Behandlung der Grundbegriffe von Carlo Bourlet ein, dem jüngst verstorbenen, als Verfasser von Schulbüchern sehr erfolgreichen Mathematiker.[4] Bourlet knüpft an eines der vielen Axiome Mérays an: „Wenn eine erste Translation eine bewegliche Figur f aus einer Anfangslage F in die Endlage F_1, wenn dann eine zweite sie aus der Lage F_1 in die neue Endlage F_2 gebracht hat, so kann eine einzige Translation f direkt von F in F_2 überführen." Auch wer Bourlets System nicht kennt, wird sich an dieser Stelle sofort fragen, warum Méray nicht den Gruppenbegriff eingeführt hat. Bourlets System charakterisiert sich nun gerade durch die Benutzung des Gruppenbegriffes und geht damit über Méray hinaus. Bourlet führt die Bewegungsgruppe ein, zunächst die Untergruppe der Translation. Das Axiom, das bei ihm an die Stelle des euklidischen Parallelenaxioms tritt, ist das eben zitierte von Méray: „Zwei Translationen können durch eine einzige ersetzt werden." Später wird dann die Untergruppe der Rotation betrachtet usf.

Man sieht schon, daß die Hineinziehung des Begriffes der Bewegung, konsequent durchgeführt, der Schulgeometrie eine ganz veränderte Gestalt gibt. Wissenschaftlich hat man zu diesen Fragen bisher noch nicht recht Stellung genommen, obwohl auf die französischen Verhältnisse mehrfach, insbesondere auch von F. Klein in seiner bekannten Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, hingewiesen worden ist. Es fehlte bis vor kurzem eine elementarwissenschaftliche, die didaktische Seite zunächst ganz aus dem Spiele lassende Geometrie, die die Bewegung syste-

[1] E. Mèray, Nouveaux Eléments de Géométrie, 3. Ed. Dijon (Jobard) 1906.

[2] Vgl. auch W. Lietzmann, Eine französische Rundfrage über den geometrischen Anfangsunterricht, Pädagogisches Archiv **50** (1908).

[3] Es gehört zu den Dingen, die mir unbegreiflich sind, daß das Buch trotzdem in Frankreich als Schulbuch benutzt worden ist.

[4] Von E. Bourlets Lehrbüchern nenne ich Cours abrégé de Géométrie, 1re partie, Géométrie plane, Paris (Hachette). Sehr wichtig ist die Aussprache, die über den Gegenstand in der Société française de Philosophie stattgefunden hat, vgl. darüber Bulletin de la Société française de Philosophie **7**, 6. Übrigens ist die Axiomatik Bourlets nicht einwandfrei.

matisch als Grundbegriff benutzt — ich denke natürlich nicht an die Geometrie der Lage, sondern an ein in den Fußstapfen Euklids wanderndes System. Diese Lücke will eine auf Anregungen in meinen didaktischen Übungen zurückgehende Arbeit von H. Willers[1] ausfüllen. Sie nimmt nicht den allgemeinen Begriff der Bewegung, sondern nur den Sonderfall der Spiegelung als Grundbegriff und entwickelt ein vollständiges Axiomensystem. Damit kommt der in unserer Schulgeometrie stark vorherrschende Begriff der axialen Symmetrie auch in der axiomatischen Grundlegung zur Geltung.

Gehen wir nun von den Grundbegriffen zu den abgeleiteten Begriffen über. Soll man Definitionen abgeleiteter Begriffe überhaupt, soll man sie schon im Anfang des geometrischen Unterrichts verlangen? Ich setze hier und in der Folge immer voraus, daß ein propädeutischer Unterricht vorausgegangen ist. Ich antworte mit einem glatten Ja. Ich halte es für eine heilsame Zucht für das Denken, wenn schon die Quartaner und Tertianer sich über den Inhalt der Begriffe, mit denen sie operieren, klar werden. Ich sehe darin auch eine Förderung der Anschauungskraft, insofern die Schüler gezwungen werden, sich die geometrischen Gebilde genau anzusehen, wenn sie sie definieren sollen. Denn davor kann natürlich nicht dringend genug gewarnt werden, daß man dem Schüler die Definition als etwas Fertiges gibt, daß man womöglich nach dem Text des Lehrbuches auswendig lernen läßt. Ein Beispiel aus dem Unterricht, mit dem nicht gesagt werden soll, welchen Wortlaut man der Definition des Vierecks gibt, sondern nur gezeigt werden soll, wie man irgendeine erträgliche Definition aus den Schülern herausbekommt, mag andeuten, wie ich mir das denke:

Was ist ein Viereck? „Ein Viereck ist eine Figur, die vier Ecken hat." „Ein Viereck ist eine Figur, deren Winkel 360° betragen." — „Ein Viereck hat vier Seiten." — „Ein Viereck ist eine geschlossene Figur, die vier Seiten hat." — Das sind einige Schülerantworten. Nun gilt es, Kritik an diesen vier Versuchen zu üben (ich gebe wirkliche, nicht konstruierte Schülerantworten). Der erste Schüler hat bei seiner Definition vergessen, etwas von der Ebene zu sagen. Der Lehrer, noch besser aber ein findiger und kritischer Schüler, verweist also auf ein Tetraeder, das ja auch vier Ecken hat.[2] Diesen Körper kennen die Schüler aus der Propädeutik. Dem zweiten Schüler wird ein Klassengenosse sofort eine Figur wie etwa zwei sich schneidende Geraden an die Tafel zeichnen, dem dritten ein gebogenes Blatt des Heftes zeigen, dem vierten wird wohl der Lehrer selbst ein räumliches Viereck andeuten müssen.

Jetzt setzt ein neuer Wettstreit ein: „Ein Viereck ist eine geschlossene Figur in der Ebene, die vier Seiten hat." Das Wort „geschlossen" war schon in der letzten der vorhergehenden Antworten plötzlich aufgetaucht, ohne daß es eines Gegen-

[1] H. Willers, Die Spiegelung als primitiver Begriff im Unterricht, ZmnU 53 (1922) S. 77ff. u. S. 109ff.

[2] Dieser Einwurf ist natürlich nur verständlich, wenn man den Begriff Figur im allgemeinen Sinne faßt. Beschränkt man ihn auf ebene, im Endlichen geschlossene Gebilde, dann ist die Definition viel leichter. Ich ziehe den weiteren Umfang von „Figur" vor, weil wir für den engeren Begriff ja die Worte Vieleck, Dreieck usw. zur Verfügung haben und weil andererseits es sehr langweilig ist, im allgemeineren Falle von „geometrischem Gebilde" oder einer „Menge von geometrischen Gebilden" zu sprechen.

beispieles bedurft hätte; die Erinnerung an das Dreieck hat wohl mitgeholfen. Etwas anderes fehlt noch. Man zeichnet eine Figur, die von Kurvenbögen begrenzt ist. „Ein Viereck ist eine geschlossene ebene Figur, die vier Ecken hat, die durch Geraden verbunden sind." Wirklich Geraden? Jemand zeichnet dem letzten Schüler die nebenstehende Figur an die Tafel. „Ein Viereck ist eine geschlossene ebene Figur, die aus vier Punkten und ihren Verbindungsstrecken besteht." In einem so definierten Viereck zählen die Diagonalen mit. Will man sie aus der Definition ausmerzen, so kommen die Schüler sehr bald darauf, daß man die Punkte „der Reihe nach" durch Strecken verbinden muß. Wenn der Lehrer will, kann er nun noch, was zumeist ausdrücklich geschehen muß, darauf hinweisen, daß auch das überschlagene ebenso wie das eingebuchtete Viereck bei dieser Definition mit einbezogen ist. Eines besonderen Gegenbeispieles des Lehrers bedarf es vielleicht noch, um die Möglichkeit, daß irgend drei der gegebenen Punkte in einer Geraden liegen, auszuschalten.

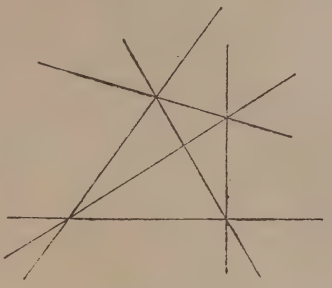


Fig. 17.

Wird eine Definition in dieser Weise in der Quarta herauspräpariert, so hat man erreicht, was nötig ist, daß nämlich die Schüler tatsächlich die wesentlichen Eigenschaften des Vierecks mit offenen Augen gesehen haben und — eine Kunst, die mancher Erwachsene noch nicht zu üben versteht — daß sie in der Beschreibung dessen, was sie gesehen, vollständig sind.

Über die Art und Weise, wie man die Definitionen fassen soll, ist viel verhandelt worden. Ich halte die Entscheidung darüber nicht für so wesentlich als die Zustimmung, daß man überhaupt definieren soll, auch da, wo die Schüler den Begriff schon anschauungsgemäß haben. Selbstverständlich kann man als Eigenschaften, die man für wesentlich hält und aus denen man die anderen ableitet, verschiedene wählen. Ich könnte das Parallelogramm auch als Viereck definieren, in dem die Gegenseiten paarweise gleich sind. Da legt dann schon der Name ein Veto ein. Auch die Form, die man der Definition gibt, kann verschiedenartig sein. Vielfach ist für die sogenannten genetischen Definitionen plädiert worden, bei denen man die Entstehung des betreffenden Gebildes aufzeigt. Oft kann man die Entstehung auf eine Bewegung zurückführen. Solche Definitionen verlieren aber sofort ihre Sonderstellung, wenn man die Bewegung als Grundbegriff bewußt zuläßt. Die Forderung genetischer Definitionen in derartigen Fällen lief also früher darauf hinaus, heimlich den Grundbegriff der Bewegung zu benutzen. Nun gut, also tue man es jetzt offen! Auch die Definitionen, die sich als einfache Beschreibungen geben, weil man nämlich den zugehörigen Oberbegriff, der zumeist selbstverständlich ist, nicht erst ausdrücklich nennt, sind besonders für mittlere Klassen sehr zu empfehlen. „Ein Viereck hat ...", oder „ein Viereck entsteht, wenn man ..." statt, wie wir oben sagten: „Ein Viereck ist eine Figur, welche ..." Komischerweise neigen die Schüler dazu, beides miteinander zu vermengen. „Ein Viereck ist, wenn man ..." Übrigens möchte ich es doch nicht für ganz unwichtig halten, den Oberbegriff gelegentlich ausdrücklich zu nennen.

Eine Frage, die seinerzeit viel Staub aufgewirbelt hat, ist die, ob in einer Definition nur die zur Kennzeichnung des Begriffes notwendigen Eigenschaften enthalten sein dürfen oder auch noch andere. Wer die Beschränkung auf die notwendigen Eigenschaften verlangt — und daß man das in der Wissenschaft tut, ist begreiflich — verzichtet also auf die Angabe aller derjenigen Eigenschaften, die sich aus den anderen von selbst ergeben. Er setzt also genau genommen schon alle im folgenden noch abzuleitenden Beziehungen zwischen den Eigenschaften als bekannt voraus. Wie soll sich die Schule dazu stellen? Drei Beispiele: „Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in dem die Gegenseiten paarweise parallel und gleich sind." „Ein Rechteck ist ein Parallelogramm mit vier rechten Winkeln." „Dreiecke heißen ähnlich, wenn sie in den Winkeln übereinstimmen und wenn entsprechende Seiten in gleichem Verhältnis stehen." Alle diese Definitionen sind überbestimmt. Die erste würde ich strikte ablehnen, die zweite zulassen, aber ebenso gern auch die andere: „... ein Parallelogramm, in dem ein Winkel ein Rechter ist, ...", vom Schüler annehmen; die dritte würde ich für die einzig wahre halten, obwohl sie überbestimmt ist, da ja zwei Dreiecke schon dann ähnlich genannt werden könnten, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen. Ich lehne also die Überbestimmtheit ab, wenn ich die überflüssige Eigenschaft leicht herleiten kann wie im ersten Fall, und wenn sie nicht gar so sehr in die Augen fällt, so daß man darüber fast stolpert, wie im zweiten Fall. Ich lasse mich andererseits aus Rücksichten auf das spätere System bestimmen, im dritten Falle in der Definition Dinge zu verlangen, die mir später in Gestalt eines Lehrsatzes von selbst ohne weiteres in den Schoß fallen.

Wer vorsichtiger sein will, mag auch im einzelnen Fall von Beschreibung statt von Definition sprechen. Ich sagte deshalb oben absichtlich „heißen ähnlich", nicht „sind ähnlich", wie es später in den Ähnlichkeitssätzen heißt.

Die erste Aufgabe des Mathematikers, wenn er eine Definition formuliert hat, ist der Existenzbeweis. Für die Schule ist diese Aufgabe fast immer überflüssig. Der Schüler geht ja von der Anschauung aus, er bringt in eine Definition, was er vor sich sieht, an dessen Vorhandensein er nicht zweifelt. Vielleicht ist aber hin und wieder ein Hinweis auf die Existenzfrage angebracht. Der Schüler wird, sobald er etwas in die Ähnlichkeitslehre eingedrungen ist, verstehen, daß die obengenannte Definition (3) überhaupt nur zulässig ist, wenn der Satz bewiesen ist: Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, dann stehen die Seiten in gleichem Verhältnis. Er begreift, daß eine Definition: „Dreiecke heißen ähnlich, wenn sie in den Winkeln übereinstimmen, und wenn entsprechende Seiten im umgekehrten Verhältnis stehen" sinnlos ist, weil es dann, von einem Sonderfall abgesehen, ähnliche Dreiecke nicht geben würde. — Die Frage nach der Existenz hängt aufs engste mit der Überbestimmtheit der Definition zusammen.

In vielen Fällen darf man sich nicht damit begnügen, etwas zu definieren, man muß auch zeigen, daß das Definierte vernünftig ist, daß man die Freiheit, die die Definition gibt, nicht mißbraucht hat. Bei mancher Definition liegt ihre Begründung lediglich in ihrer Geschichte. Ich definiere die verschiedenen Symbole so und nicht anders, weil es andere vor mir ebenso getan haben — ein Grund, gelegentlich auch im Unterricht darauf einzugehen, wer jene anderen waren, auf wen jene Symbole und Definitionen zurückgehen. — Diese Berufung auf die Autorität, die ge-

schichtliche und die gegenwärtige des Lehrers, braucht aber nicht überall den Ausschlag zu geben. Recht oft sind auch innere Gründe dafür vorhanden, daß die Definition gerade so ist, wie sie ist. Ich brauche nur an das Permanenzprinzip zu erinnern, an solche Definitionen, wo bereits für einen besonderen Fall der Begriff definiert ist, um nun auf allgemeinere Fälle erweitert zu werden. Dann ist es immer eine wichtige Aufgabe, zu zeigen, daß die neue Definition nicht im Widerspruch zur früheren steht, ja daß die alte, besondere Definition durch das Auftreten der allgemeinen entbehrlich wird. Was uns dazu führt, solche Definitionen zu bevorzugen, ist natürlich im Grunde wieder das Ökonomieprinzip.

Schon unsere wenigen Andeutungen genügen, zu zeigen, daß auch die Definitionen wieder allgemeineren Prinzipien gehorchen, die freilich ihre Wurzel nicht mehr ausschließlich in der Mathematik, sondern auch in der Philosophie und der Psychologie haben.

Noch nach einer anderen Seite hin ist eine Diskussion des Inhaltes von Definitionen in der Schule angebracht. Man soll den Schülern hin und wieder die Frage vorlegen, ob denn nun die Definition, auf die man gekommen ist, auch praktisch, ob sie hinreichend einfach ist. Ein solcher Nachweis wird z. B. für die Definition: „Unter dem Winkel zweier Geraden (im Raume) versteht man den Winkel, den zwei durch irgendeinen Punkt des Raumes zu den beiden Geraden gelegte Parallelen miteinander bilden" durch den Nachweis geführt, daß man, wie man auch den beliebigen Punkt im Raume wählt, immer den gleichen Winkel erhält. Daß die Definition im Einklang ist mit der früheren des Winkels in einer Ebene, liegt hier ja auf der Hand.

Nicht selten werden aber doch für eine und dieselbe Sache mehrere Definitionen eingeführt, und je nach der besseren Geeignetheit wird bald die eine, bald die andere benutzt. Ich brauche nur an die Kegelschnitte zu erinnern: Nebeneinander werden im Unterricht gebraucht die Definition als ebener Schnitt durch den geraden Kreiskegel, die Definition — oft auch verschiedene Definitionen — als geometrischer Ort, die Definition durch die zugehörige Funktionsgleichung (so, wenn in Mittelklassen die Parabel $y = x^2$ auftritt). Wer projektive Geometrie treibt, bringt wohl noch eine andere Definition heran. Immer ist es in solchen Fällen notwendig, die Übereinstimmung der in verschiedener Weise definierten Begriffe, die Deckung der Definition nachzuweisen. Für eine systematische Darstellung irgendeines Gebietes der Mathematik ist die zweckmäßigste Gestalt der Definition geradezu der Schlußstein der ganzen Forschung, man denke nur an v. Staudts Darstellung der Geometrie der Lage.

Auch in der Schule kann die Abhängigkeit der Gestaltung eines Gebietes von der Wahl der Definitionen wenigstens in höheren Klassen gelegentlich zum Ausdruck kommen. Es ist das eins der wirksamsten Mittel, um der uralten und scheinbar unausrottbaren Ansicht von der Starrheit der mathematischen Wissenschaft entgegenzutreten. Nicht die mathematischen Definitionen, nicht die ausgesprochenen Lehrsätze sind die Mathematik; sie sind nur die Sprache, in der ich die mathematischen Tatsachen ausdrücke, um sie anderen mitzuteilen. Man kann einen und denselben Gedanken in mannigfaltigster Art zum Ausdruck bringen, in der knappen, alles Überflüssige vermeidenden Sprache des Gelehrten, in der unbeholfenen Sprache des Ungebildeten, in der glänzenden Darstellung des Redners, in der feinen des

Dichters. Genau so kann man auch die mathematischen Gedanken so oder so formulieren.

Zum Schluß ein Wort über die Zahl der Definitionen, die im Unterricht nötig sind. Es gab eine Zeit, in der jede Darstellung eines wissenschaftlichen Gebietes ihren Ehrgeiz darin suchte, möglichst ganz von vorn anzufangen. In geschichtlichen Untersuchungen fing man mit Adam und Eva, in der Mathematik mit dem Begriff der „Mathematik", der „Größe", der „Zahl" und derlei gewiß an sich nicht unwichtigen, aber an dieser Stelle gänzlich überflüssigen Dingen an. Unsere Schulbücher zeigen diese aus älterer Zeit stammenden Züge zum Teil noch heute. Es ist schon oft ausgeführt worden, daß eine solche Definierwut ganz und gar nicht angebracht ist, daß sie ebenso vom methodischen Standpunkt aus zu verurteilen ist, wie sie zu sachlichen Einwendungen tausendfach Anlaß gibt. Also hinaus mit solchen Definitionen aus der Schulstube!

Auf der anderen Seite soll aber auch dafür Sorge getragen werden, daß der Schüler mit den definierten Begriffen umzugehen lernt. Dinge, die er anschaulich schon kennt, wo nur die begriffliche Fassung ihm neu war, braucht man natürlich nicht nachher noch ausführlich einzuüben. An der Stelle, wo man dem Schüler eine Definition des Winkels oder des Dreiecks abverlangt, darf es nicht notwendig sein, nun nach dieser Definition an zahlreichen Zeichnungen den Begriff des Winkels, des Dreiecks zu erläutern. Das soll schon vorher, im propädeutischen Unterricht, geschehen sein. Aber in höheren Klassen dreht sich der Gang der Handlung vielfach um. Man definiert erst Ausdrücke, wie etwa $n!$ oder $\binom{n}{k}$, ehe man sie in den Rechnungen vielfältig gebraucht. Man will ja damit gerade Zeit und Überlegung bei den späteren Rechnungen sparen. Eine sehr wichtige Forderung ist es da, den Schüler erst ganz und gar mit der neuen Definition vertraut zu machen. Jeder erinnert sich vielleicht, wie schwer es ihm gelegentlich in einer Vorlesung gefallen ist, irgendeinen Begriff, ein Symbol od. dgl., eben definiert, im nächsten Augenblick angewendet zu sehen. Man kann nicht so schnell folgen. In verstärktem Maße würde es so dem Schüler gehen, wenn man den Binomialkoeffizienten einführt und nun sofort frisch darauflos rechnet, ohne an zahlreichen Beispielen ihn eingeübt zu haben. So wird ein Buchstaben- und Zeichenwissen großgezogen. Für solche Leute ist das Integral ein Schriftzeichen, nicht ein Symbol für ganz bestimmte mathematische Operationen. Es gibt manchen Mathematikstudenten, der nicht weiß, daß jedes bestimmte Integral eine Konstante ist. Hätte er nur einmal mit Überlegung ein solches Integral ausgewertet, so wüßte er das. Für ihn war aber das Integral nur eben ein Zeichen ohne Inhalt. Ich habe jemanden kennen gelernt, der nicht wußte, was $f(x+h)$ besagen sollte, es war für ihn nur ein Komplex von Buchstaben gewesen, was aber genügte, eine Lehrbefähigung in Mathematik zu erhalten. Alles in allem: Die Definitionen bergen die große Gefahr in sich, daß sie ein Buchstaben- und Zeichenwissen an Stelle eines Sachwissens erzeugen. Da muß der Schulmann immer auf der Wacht stehen!

Natürlich ist es die beste Übung im Gebrauch eines neuen Begriffes, wenn man ihn sofort an allen Stellen, wo es möglich ist, anwendet. Das klingt selbstverständlich, ist es aber doch nicht. Man findet jetzt in fast allen Lehrbüchern Gerade,

Strahl und Strecke reinlich unterschieden, und doch wird nicht selten immer mit dem Begriff Gerade operiert, wo Strahl oder Strecke am Platze sind. Es ist ja überhaupt bedenklich, daß gewisse Begriffe in der Geometrie einmal als Geraden, das andere Mal als Strahl, das dritte Mal als Strecke gemeint sind. Die Winkelhalbierende in einem Dreieck tritt z. B. in allen drei Auffassungen auf, manchmal meint man die Gerade, manchmal auch die Strecke, vom Eckpunkt bis zum Schnitt mit der Gegenseite gemessen, schließlich kommt auch manchmal nur der Strahl in Betracht, der durch das Dreieck geht. Auch die Tangente von einem Punkte an einen Kreis wird bald als Gerade, bald als Strahl (der Winkel zwischen den beiden Tangenten, die man von einem Punkte an einen Kreis legt; wären die Tangenten Geraden, so entständen vier Winkel), bald schließlich als Strecke. Auf solche Dinge ein wenig mehr Sorgfalt zu legen, als es vielfach geschieht, ist wichtiger, als es auf den ersten Blick scheinen möchte. Der Deutsche Ausschuß hat in seinen Vorschlägen zur Vereinheitlichung der mathematischen Bezeichnungsweise einen Unterschied zwischen der Strecke $\overline{A\,B}$ und der Geraden $A\,B$ gemacht. Mir scheint das recht wesentlich. Es ist nichts dagegen einzuwenden, wenn in Fällen, wo Zweifel nicht möglich sind, der Strich weggelassen wird. Aber in anderen Fällen ist die Unterscheidung unumgänglich notwendig. Man sollte unbedingt besonders einführen (1) die zwei Hälften (Strahlen) einer Geraden in bezug auf einen ihrer Punkte (Anfangspunkte), (2) die zwei Hälften einer Ebene (Halbebene) in bezug auf eine ihrer Geraden (Grenzgerade der Halbebene) und (3) die zwei Hälften des Raumes (Halbraum) in bezug auf eine Ebene (Grenzebene des Halbraumes). Es liegen z. B. zwei Punkte P und Q in der gleichen Halbebene, wenn die Strecke $P\,Q$ keinen Punkt mit der Grenzgeraden gemein hat, in verschiedenen Halbebenen aber, wenn es einen Punkt G auf der Grenzgeraden gibt, der auf der Strecke $P\,Q$ liegt.

Ich weise auf diese Dinge ganz besonders mit Rücksicht auf den Begriff des Winkels hin.[1] Wir werden den Winkel definieren können als Figur, die von zwei Strahlen mit gleichem Anfangspunkt gebildet wird. Nun ist aber noch Winkelinneres und Winkeläußeres zu unterscheiden. In der elementaren geometrischen Axiomatik pflegt man als Winkelinneres die Gesamtheit der Punkte zu definieren, die mit jedem Punkte des einen Schenkels auf derselben Seite des andern Schenkels liegen. Damit werden überstumpfe Winkel ausgeschlossen. Später wird man dann vielleicht den Drehungssinn einführen und damit auch überstumpfe Winkel, positive und negative Winkel, Winkel über 360° usf. Mit der gleichen Sorgfalt ist bei der Definition des Ebenenwinkels vorzugehen; in den Schulbüchern ist in dieser Hinsicht vieles zu vermissen.

2. Die Axiome im Unterricht.

Wir geben in der Mathematik einem Satze erst dann Existenzrecht, wenn er bewiesen ist. Beweisen heißt nach logischen Gesetzen aus früheren Sätzen folgern. Der Mathematiker fragt überall nach dem Warum? Das erscheint dem Außenstehen-

[1] Die Definition des Winkels hat in der didaktischen Literatur viel Staub aufgewirbelt. Einen Überblick über die verschiedenen Definitionen des Winkels in den Lehrbüchern gibt Schotten's S. 86 Anm. 2 genannte vergleichende Planimetrie. Vgl. außerdem H. Schotten, Zur Definition des Winkels, ZmnU 20 (1889) S. 481ff.

den so wichtig, daß er gewohnt ist, in diesem „Warum" den ganzen Sinn der Mathematik zu suchen. — Bei dieser Frage nach dem „Warum" geht es nun aber, wie es Wilhelm Busch so schön gesagt hat: „Jedes Warum ... ist nur der Zipfel eines Fadens, der in den dicken Knäuel der Unendlichkeit ausläuft, mit dem keiner recht fertig wird, er mag wickeln und haspeln, soviel er nur will." Es liegt mir fern, dieses Wort den Mengentheoretikern ins Stammbuch zu schreiben, wie es z. B. im Sinne Poincarés wäre. Ich will im Gegenteil sagen, wie der Mathematiker bescheidener ist, als es Wilhelm Busch von ihm denkt, wie er auch beim Rückwärtsverfolgen der Dinge irgendwo Halt machte und die Axiome schuf. Mag auch der eine Axiomatiker den Faden noch ein wenig weiter aus dem Knäuel herauszuhaspeln versuchen als sein Vorgänger, das Ende des Fadens je zu erreichen, wird auch er nicht wähnen.

Die Internationale Mathematische Unterrichtskommission hatte auf einer Versammlung, die in Mailand im September 1911 stattfand[1], als einen Gegenstand der Verhandlungen die Frage nach der Strenge im mathematischen Unterricht gewählt. Es ergab sich im Verlaufe der Diskussion, daß man sich ganz und gar auf die Geometrie beschränkte, und daß auch hier wesentlich nur die Frage nach der Grundlegung erörtert wurde. So nahm das Thema die Form an: Wie stellt sich die höhere Schule zur geometrischen Axiomatik? Man muß sich von vornherein darüber klar sein, daß die Anzahl der Axiome und die Genauigkeit in ihrer Handhabung durchaus nicht der einzige Maßstab für die Strenge im Unterricht ist, ja daß es sogar ein sehr schlechter Maßstab sein kann. Man kann ein sehr mangelhaftes Axiomensystem zugrunde legen oder ganz davon absehen, und doch sehr streng in der Aufstellung der Beweise verfahren, und man kann ein ganz einwandfreies System verwenden und doch in puncto Strenge höchst miserabel bestehen. Es kommt eben ganz auf die Art und Weise an, wie man nachher die Beweise gestaltet, welche Anforderungen man da stellt. Doch von den Beweisen später. Wir fassen das Problem zunächst so, wie es in Mailand gefaßt wurde: Wie stellt sich die höhere Schule in der Grundlegung der Geometrie zur Axiomatik?

Ich hatte damals, um für die Erörterung eine gewisse Grundlage zu geben, eine Kennzeichnung der verschiedenen Möglichkeiten versucht. Aus diesem Schema ist dann in einer Vorbesprechung mit einigen Änderungen die folgende Gliederung erwachsen:

A. Streng logische Methode.[2] Alle Axiome sind angegeben und ihre gegenseitige Unabhängigkeit wird erörtert. An die Axiome schließt sich die weitere Entwicklung streng deduktiv an. Die Anschauung wird nirgends benutzt. Die Grundbegriffe, Punkt, Gerade usf. sind nur der Bedingung unterworfen, daß sie den Axiomen genügen.

B. Empirische Grundlegung, logische Beweismethode. Aus der an den wirklichen Raum anknüpfenden Erfahrung gewinnt man gewisse Grundsätze, auf denen sich die nachfolgende logische Entwicklung aufbaut. Man unterscheidet hier zweckmäßig drei Unterfälle.

---

[1] Vgl. W. Lietzmann, Der Kongreß in Mailand vom 18.—20. September 1911, Heft VII der Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die IMUK, Leipzig (Teubner) 1912. Siehe auch ZmnU 43 (1912), S. 29ff.

[2] Als Beispiel nenne ich: G. B. Halsted, Rational geometry, a textbook for the Science of space, New York 1904 (2. Aufl. 1907).

B_A. Alle notwendigen Axiome sind ausgesprochen.
B_B. Ein Teil der Axiome ist ausgesprochen.
B_C. Nur solche Axiome sind ausgesprochen, die nicht absolut evident sind.

C. Anschauliche Betrachtung und deduktive Methode wechseln miteinander ab. Man beruft sich auf die Anschauung, wo es nützlich erscheint, so daß nicht genau feststeht, was als selbstverständlich zugelassen wird und was man für eines Beweises bedürftig hält.

D. Anschaulich-experimentelle Methode. Die Lehrsätze werden als Tatsachen hingestellt, die sich direkt aus der Anschauung oder durch Experiment ergeben. Auf das logische Band, das diese Tatsachen miteinander verknüpft, wird nicht hingewiesen.

Die erste dieser Methoden haben wir schon genannt, als es sich um die Einführung der Grundbegriffe handelte, wir lehnten sie für die Schule ganz ab. Es ist ein reines Beziehungssystem, so daß Grundbegriff und Axiom hier miteinander verwoben sind, nur in ihrer Beziehung zueinander Leben haben. Bei allen anderen Methoden haben die Grundbegriffe für sich eine Existenzberechtigung, die Axiome sind Aussagen über sie. Wir gewinnen die Grundbegriffe aus unserem Wissen über den Raum, und auch die Axiome sind aus den Erfahrungen über den Raum gewissermaßen herauskristallisiert.

Auch die letzte Methode D können wir sofort außer Betracht lassen. Sie gibt den Weg an, den die Volksschule, die Fortbildungsschule, der Arbeiterkursus (Perry) einschlägt und den ebenso der propädeutische Unterricht der höheren Schulen geht.[1] So bleiben tatsächlich nur die Wege B und C übrig. Es wird nötig sein, die verschiedenen Möglichkeiten etwas genauer anzusehen.

Für die mit B_A bezeichnete Methode ist Italien das gelobte Land.[2] Das Axiomensystem Euklids ist bekanntlich nicht streng. Es fehlen einzelne Axiome, Euklid müßte man in die Gruppe B_B stellen. Eine Anzahl italienischer Lehrbuchverfasser hat es also unternommen, das Fehlende zu ergänzen. Ihr Grundsatz ist, „wir nehmen als Postulate dieselben Eigenschaften der Figuren an, die Euklid gewählt hat. Die Zahl der unsrigen ist größer, aber nur scheinbar, da von denen, die sich nicht in den Elementen von Euklid finden, der griechische Mathematiker Gebrauch macht, indem er sie stillschweigend voraussetzt.“ Als zwei Bücher, an denen man dieses Verfahren sehr gut studieren kann, empfehle ich die in hohen Auflagen erscheinenden Werke von Sannia-d'Ovidio und Faifofer.[3] Leider existieren von diesen und den später noch zu nennenden italienischen Schulbüchern mit einer Ausnahme keine deutschen Übersetzungen. Und doch erscheint es mir wichtig, daß der Lehrer weiß, wie ein solches vervollständigtes System der Euklidischen Lehre, die er immerzu vorträgt, eigentlich aussieht. Einen vollgültigen Ersatz dafür bieten zwei für diesen

[1] Als Beispiel nenne ich: J. Harrison, Practical plane and solid Geometry for elementary students, London, 1903.

[2] Ausführliche Literaturangaben findet man in W. Lietzmann, Die Grundlagen der Geometrie im Unterricht (mit besonderer Berücksichtigung der Schulen Italiens), ZmnU 39 (1908), S. 177ff.

[3] A. Sannia ed E. D'Ovidio, Elementi di Geometria. Mir liegt vor Vol. I ad uso dei ginnasii, 12. Ed., Napoli 1906, Vol. II ad uso dei Licei, 11. Ed., Napoli 1902. A. Faifofer, Elementi di geometria ad uso degl' istituti tecnici e dei licei, 14. Ed., Venezia 1904.

ganzen Abschnitt über die Geometrie wichtige Bücher, die „Questioni" von Enriques[1] und die Elemente von Thieme[2].

Zunächst wird es uns natürlich interessieren, wie man sich mit dem Begriff der Bewegung abfindet, den Euklid, ohne seiner vorher in den Axiomen Erwähnung zu tun, beim Beweise des ersten Kongruenzsatzes benutzt. Faifofer spricht folgende Axiome aus: „Eine jede Figur kann sich im Raum bewegen, und zwar 1. so, daß irgendein bestimmter ihrer Punkte zusammenfällt mit irgendeinem anderen bestimmten Punkte des Raumes; 2. so, daß nur einer ihrer Punkte festbleibt; 3. so, daß zwei ihrer Punkte festbleiben." Ich gehe auf die anderen Axiome nicht weiter ein, man möge sie an der angegebenen Stelle nachlesen. Das Gesagte genügt nämlich schon, um zu sehen, worin sich eine andere Gruppe von italienischen Schulbüchern von dem „geläuterten Euklidismus" unterscheidet. Sie sagt: Den praktisch gewiß recht brauchbaren Begriff der starren Bewegung kann man erst logisch präzis fassen, nachdem die Kongruenz definiert ist. Sie lehnt es durchaus ab, die Kongruenz auf die Bewegung als primitiven Begriff zurückzuführen. Das Mittel zum Ersatz der Bewegung ist im Prinzip dasselbe wie das in Hilberts „Grundlagen".[3] Als Vertreter dieser Richtung, die nun an die Stelle des Bewegungsaxioms eine Reihe von Kongruenzaxiomen zu bringen haben, nenne ich Ingrami und Veronese.[4]

So viel zur Kennzeichnung der Gruppe B_A; sie will ein vollständiges Axiomensystem geben, leistet dabei aber ausdrücklich darauf Verzicht, ein logisch unabhängiges System zu geben. „Zuweilen wird man in der Kategorie der Postulate solche Sätze lassen, die man logisch aus den vorhergehenden Postulaten ableiten kann, und die also eigentlich in die Kategorie der Lehrsätze gehören. Das wird besonders dann geschehen, wenn der Beweis für den Schüler zu schwierig und zu uninteressant ist."

Bei der Charakterisierung der Gruppe B_B kann ich mich wieder auf deutsche Lehrbücher beziehen. Bei unseren Unterrichtsverhältnissen, insbesondere bei dem frühen Anfang des systematischen Lehrganges der Geometrie, dem nur ein sehr kurzer propädeutischer Kurs vorangegangen ist, scheidet der Weg B_A aus.[5] Er verbietet sich

[1] F. Enriques und andere, Fragen der Elementargeometrie. 1. Band: Die Grundlagen der Geometrie, deutsch von H. Thieme, 1911; 2. Band: Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit, deutsch von Fleischer, 1907, Leipzig, Teubner. Das italienische Original: Questioni riguardanti la geometria elementare. Raccolte da F. Enriques, Bologna (Zanichelli) 1900, ist inzwischen in zweiter Auflage erschienen und umfaßt jetzt auch die Arithmetik. Der neue Titel ist: Questioni riguardanti le matematiche elementare, 2 Bde. ebenda 1912 und o. J. (1914).

[2] H. Thieme, Die Elemente der Geometrie (II. Teil, 1. Band der „Grundlehren der Mathematik"), Leipzig, Teubner, 1909.

[3] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 4. Aufl., Leipzig (Teubner) 1913.

[4] G. Ingrami, Elementi di geometria ad uso dei licei. Mir liegt vor: 2. Ed., Bologna 1904. G. Veronese, Elementi di geometria ad uso dei ginnasi e licei e istituti tecnici. Con la collab. di P. Gazzaniga. Mir liegt vor: Parte 1, Ed. IV, 1909, Parte 2, Ed. III, 1905. Verona-Padova, Fratelli Drucker; ebenda sind von demselben Verfasser erschienen: Elementi di geometria intuitiva ad uso delle scuole tecniche, 1909.

[5] Die Schleswig-Holsteinische Direktorenkonferenz hat 1899 den Beschluß gefaßt: „Das System der Mathematik ist in lückenloser, theoretischer Vollständigkeit und Übersichtlichkeit unbeeinflußt durch praktische Rücksichten aufzubauen." Man kann nur annehmen, daß die Beschließenden nicht über die Axiomatik und die Strenge der Mathematik orientiert waren.

auch aus mancherlei methodischen Gründen. Daraus, daß er bei uns in Deutschland überhaupt nicht vorhanden ist, muß man entnehmen, daß er für unsere höheren Schulen geradezu unmöglich ist. Es bleibt aber die Entscheidung offen, soll man nun gar keine Axiome erwähnen und wenn doch, welche soll man erwähnen. Die zweite Frage ist meines Wissens exakt bisher nur von Thieme beantwortet worden. Er sagt in einem Vortrage[1] auf dem dritten Internationalen Mathematiker-Kongreß in Heidelberg (1904): „Im Anfangsunterricht werden wir von den Grundsätzen nur die von Hilbert so bezeichneten der Verknüpfung und das Parallelenaxiom ausdrücklich als solche hinstellen. Von den Axiomen der Anordnung, der Kongruenz und der Stetigkeit werden wir wie bisher zunächst Gebrauch machen, ohne sie besonders aufzuführen." Damit werden die Begriffe „zwischen" und „gleich = kongruent" mit allen über sie ausgesagten Axiomen ohne weiteres angenommen. Bei der Kongruenz wird wohl auch der Grundbegriff „Bewegung" zugelassen. — Schließlich empfiehlt Thieme, das Stetigkeitsaxiom nicht auszusprechen. Dagegen erklärt er es für wünschenswert, die Axiome der Verknüpfung zu formulieren. Es handelt sich da um Axiome wie die, daß durch zwei Punkte eine Gerade, durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte eine Ebene bestimmt ist. Wenn man sich, wie es ja bei uns allgemein üblich ist, zunächst auf die Ebene beschränkt, so handelt es sich eigentlich nur um das Axiom, daß durch irgend zwei Punkte eine Gerade bestimmt ist, und daß jede Gerade durch irgend zwei ihrer Punkte bestimmt ist, zwei Axiome, die zwar voneinander, wie sehr leicht zu zeigen ist, unabhängig sind, die aber doch wohl in der Schule besser auf das eine Axiom reduziert werden, daß jede Gerade durch zwei und nur zwei Punkte bestimmt oder individualisiert ist.

Andererseits besagt die Forderung von Thieme für den stereometrischen Unterricht, daß hier die Axiome der Verknüpfung an die Spitze zu stellen sind. Wir werden später bei Gelegenheit der Stereometrie darauf zurückkommen.

Als selbstverständlich wird auch das recht wichtige Vollständigkeitsaxiom in der Hilbertschen Terminologie fortgelassen. Es handelt sich hier um das Äquivalent des Dedekindschen Schnittes. Für die mit Gerade und Kreis allein operierende Elementargeometrie wäre es ersetzbar durch die beiden Axiome: (1) Wenn eine Gerade einen Punkt innerhalb eines Kreises hat, dann schneidet sie den Kreis in zwei Punkten, (2) Wenn ein Punkt des Umfanges eines Kreises im Innern, ein anderer im Äußern eines anderen Kreises liegt, dann schneiden sich beide Kreise in zwei Punkten. — Es ist ja bekannt, daß das zweite dieser Axiome bei Euklid gleich in Nr. 1 des ersten Buches ohne vorangehende Formulierung benutzt wird.

Die Gruppe B_C, der wir uns schließlich zuwenden, will nur diejenigen Axiome aussprechen, die nicht absolut evident sind. Wenn ich sage „will", so ist das vielleicht etwas zuviel gesagt. Vielfach handelt es sich hier um Autoren, deren Lehrbücher auf Zeiten zurückgehen, die vor dem Einsetzen der axiomatischen Flutwelle liegen, zuweilen auch um solche aus neuerer Zeit, die ganz offenbar mit den Ergebnissen der Forschung nicht vertraut sind. Bei allen Vertretern dieser Gruppe ist das Parallelenaxiom zu finden, seltener das gern, jedoch mit Unrecht als „Archimedisches"

[1] H. Thieme, Wirkung der wissenschaftlichen Ergebnisse auf den Unterricht in der Elementarmathematik, Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904, Leipzig (Teubner) 1905.

bezeichnete Stetigkeitsaxiom. Die Anführung des Pasch'schen Axioms, z B. bei Kambly-Thaer, erscheint mir unzweckmäßig.[1]

Was alle Vertreter der drei Untergruppen von B vereint, ist, daß sie in den Grundlagen streng sein wollen; wirklich streng ist die Gruppe B_A, die Gruppe B_B führt an ganz bestimmten Stellen bewußt Grundbegriffe in den Aufbau ein, über die sie sich nicht weiter vor den Schülern ausspricht, die dritte Gruppe B_C glaubt streng zu sein, ohne sich in der Mehrzahl der Fälle bewußt zu sein, daß sie es nicht ist.

Dem steht nun die Gruppe C gegenüber, die bewußt auf Strenge verzichtet. Auch bei ihr ist ja zumeist ein propädeutischer Kurs vorangegangen. Sie denkt sich aber den Übergang zum systematischen Aufbau als einen allmählichen. Es macht ihr gar nichts aus, wenn sie einmal einen Satz, dessen logische Herleitung Schwierigkeiten machen würde, anschaulich und unstreng beweist. Die Schüler, so sagt sie, sollen zum Beweisen erzogen werden, wir können also nicht von ihnen verlangen, daß sie von Anbeginn an das Beweisen schon können. Und gerade die ersten Beweise, die uns in der Geometrie entgegentreten, zumal in einer einigermaßen nach dem Stoff geordneten Darstellung, sind durchaus nicht die leichtesten, die ersten Sätze durchaus nicht am besten geeignet, in die Kunst des Beweisens nach dem bewährten Rezept aller Pädagogik, vom Leichteren zum Schwereren, einzuführen.

Für den Unterricht kommen nach meiner Meinung nur in Betracht die Methoden B_B und C (B_C halte ich für eine Verlegenheitsposition). Beide Methoden haben ihre Vorzüge, beide auch ihre Bedenken. Die erste Methode läuft Gefahr, im Anfang zu schwer einzusetzen und damit von Anfang an den Schülern den Geschmack zu verderben. Die andere Methode hingegen gibt nur zu sehr Gelegenheit, allzu schlaff in der Erziehung zum mathematischen Denken zu sein, alle schwierigeren Stellen mit anschaulichen Darstellungen ohne gründliche Erörterung zu übertünchen, kurz und gut, zur Oberflächlichkeit zu erziehen. Ein guter Pädagoge, der die Fassungskraft seiner Schüler richtig einschätzt, ihnen zur rechten Zeit die Strenge der Mathematik zu kosten gibt, wird mit beiden Methoden Gutes erreichen, ein schlechter Lehrer, der Schülernatur und Lehrstoff nicht beherrscht, auf beiden Wegen straucheln.

Es gilt eben, zwei Forderungen miteinander in Einklang zu bringen: Der Entwicklung des kindlichen Geistes Rechnung zu tragen und doch den spezifischen Charakter der Mathematik zu wahren. Auf der einen Seite dürfen wir nicht auf das Beweisen der geometrischen Lehrsätze verzichten, andererseits aber können wir uns in der Schule den Grundlagen nicht so gegenüberstellen wie der Axiomatiker, weil der Axiomatiker schon viele Jahre lang gelernt hat, mit der Mathematik umzugehen, Beweise zu liefern und zu prüfen, während der Schüler mit alledem erst am Anfang ist. Denn nur eine begriffene Strenge, niemals eine nur gedächtnismäßig angeeignete und dann nachgeplapperte Strenge ist überhaupt diskutabel.

Wir kommen aus dem Dilemma heraus, wenn wir die Forderung stellen: Wir lassen ein aus der Anschauung entnommenes Fundament zu, verlangen aber, daß nun von einem bestimmten Punkte an ein gewisser Grad logischer Strenge herrscht. Das ist ein in allen Punkten noch reichlich unbestimmtes Programm. Sehen wir es

[1] Ich habe einige Angaben über die von den Verfassern getroffene Auswahl gemacht in: W. Lietzmann, Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen, Leipzig (Teubner) 1909 (Deutsche IMUK-Abh. I, 1) S. 17ff.

uns im einzelnen an. Es wird zunächst ein anschauungsmäßig gegebenes Fundament zugestanden. Das ist bei einer axiomatischen Grundlegung im Sinne der Gruppe B auch so. Aber auch wenn man nicht so weit geht, daß man den Inhalt aller dieser Anschauungen in seine primitiven Bestandteile zerlegt und sie dann als Einzelgrundsätze ausspricht, so bleibt doch der Sache nach der Zustand derselbe. Er ist nur in der Kritik weniger scharf. Er läßt auch Dinge unbewiesen zu, die man aus anderen beweisen könnte. Es ist aber gar nichts dagegen einzuwenden, wenn jemand aus der Anschauung nicht nur alles das, was sich auf die Anordnung der Grundgebilde, auf die Stetigkeit, sondern auch das, was sich auf die Parallelität der Geraden und Ebenen bezieht, also beispielsweise die Sätze über die Winkel an geschnittenen Parallelen, aus der Anschauung entnimmt und dabei auf einen Beweis ganz verzichtet. Also wie weit ich den Rahmen für die der Anschauung entnommenen Tatsachen wähle, das ist zunächst ganz beliebig.

Wesentlich ist dagegen, daß irgendwo eine feste Grenze gezogen ist. Von dieser Stelle an soll sich ein Lehrsatzsystem aufbauen. Dieses Lehrsatzsystem soll nur möglichst wenig Sätze umfassen, vielleicht nur das, was zur Begründung späterer Sätze nicht entbehrt werden kann. Wie nützlich und notwendig ein solches „Skelett" im Unterrichte ist, wird später noch zu erläutern sein. Von den Sätzen dieses Skeletts verlangen wir, daß sie mit einer gleich noch zu machenden Einschränkung streng bewiesen werden.

Man spare sich dabei das Wort „Beweis" für das auf, was wirklich ein Beweis ist. Der „Thibautsche Beweis" für den Satz von der Winkelsumme — wir kommen noch darauf zurück — ist als Beweis unvollständig und deshalb nenne man ihn nicht Beweis.

Nun hatte ich aber oben nur von einem „gewissen Grad von Strenge" gesprochen. Auch diese Unbestimmtheit muß noch erörtert werden. Man muß sich nämlich darüber klar sein, daß es sich auch von jener kritischen Stelle an nicht um eine absolute Strenge handeln kann. Wollte man die verlangen, dann müßte man schon fordern, daß jede Tatsache a aus dem Anschauungsfundament A, die wir für den Beweis einer Tatsache b aus dem Gebiete B, in dem Logik und Deduktion herrschen, brauchen, in knapper Form bei der Feststellung von A ausdrücklich als besonderer Grundsatz formuliert wird. Das kann gewiß vielfach geschehen, aber doch nicht immer. Wäre man nämlich dazu imstande, so hätte man ja in der Sammlung aller Aussagen a aus dem Gebiete A eben das, was wir dem kindlichen Geiste nicht zumuten wollten, ein wenn auch nicht in den Einzeltatsachen unabhängiges, so doch durchaus vollständiges Axiomensystem. Grundsätze über den Begriff „zwischen" z. B. dürften dann im Gebiete A nicht fehlen. Tatsächlich wird es aber bei unserer Anforderung an Strenge erlaubt sein, in den Anordnungsaxiomen niedergelegte Tatsachen später jeweils ohne Bezeichnung im einzelnen aus der Anschauung zu entnehmen.

Das Verfahren, das ich empfohlen habe, klingt umständlicher als es ist. Es ist tatsächlich der übliche Weg, bei dem wir andauernd als Ersatz für die nicht ausgesprochenen Grundsätze die Anschauung mit hereinnehmen. Aber einen schlaffen Mathematikbetrieb wollen wir nicht zulassen, der unbequeme Beweise von Sätzen, die nun einmal gebraucht werden, einfach wegläßt und sagt: „Seht nur die Figuren

an, die Sache stimmt schon", der Umkehrungen von Sätzen u. dgl. gar nicht erst ausspricht, weil sie doch „selbstverständlich" sind. Das ist dann Raumlehre, Formenkunde, Naturbeschreibung des Raumes oder wie man es nennen will, aber keine Geometrie, wie wir sie auf unseren höheren Schulen verlangen.

Die ganze Frage, wie wir uns zu der Grundlegung der Geometrie zu stellen haben, ist natürlich im höchsten Grade dadurch bedingt, wann der Geometrieunterricht anfängt und wie lange der propädeutische Unterricht dauert. Wenn ich, wie die Österreicher, dem eigentlichen noch einmal von Anfang an aufbauenden Geometrieunterricht einen drei Jahre währenden propädeutischen Unterricht vorschalten kann, dann werde ich die Grundlegung ganz anders vornehmen können, werde vielleicht auch in der Zahl der wirklich ausgesprochenen Axiome so weit gehen wie das Lehrbuch von Suppantschitsch.[1] Dauert aber diese Propädeutik nur ein halbes oder ein Jahr, oder gar noch weniger, so kann von alledem nicht die Rede sein.

Wir werden auf die Frage der Strenge noch einmal in konkreter Form zurückzukommen haben, wenn wir uns bald mit den Einzelheiten des Lehrstoffes zu befassen haben. Hier ist nun aber noch eine weitergehende Frage zu berühren: Soll man bei Ablehnung der strengen Axiomatik beim Anfangsunterricht überhaupt auf eine Berührung axiomatischer Probleme verzichten? Die Frage, ob es möglich ist, auf der Oberstufe Axiomatik zu treiben, bejahen, wie wir gesehen haben, die italienischen Schulen. Es bleibt zu untersuchen, ob es auch wünschenswert ist. Ich möchte auch diese Frage bejahen. Der Mathematikunterricht hat neben anderem die Aufgabe, die Schüler mit der deduktiven Methode des Forschens bekannt zu machen. Dazu gehört aber auch, daß der Schüler etwas über die Quellen solcher ausgesprochen deduktiv vorgehenden Wissensgebiete erfährt. Nun sieht er das ja allerdings im Kleinen an manchen Kapiteln der Physik, aber es wäre verfehlt, bei der deduktivsten — wenn der Ausdruck gestattet — aller Wissenschaften die Grundlagen mehr oder weniger verschleiert zu lassen.

Der Ort für eine Besprechung der Axiomatik ist die Prima. Man könnte auch an den Beginn der systematischen Stereometrie denken, wenn diese, wie in manchen Schulen, erst spät liegt. Auch eine Behandlung der Axiomatik im Rahmen einer den mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern angeschlossenen philosophischen Propädeutik ist zu erwägen.

Vorschläge dieser Art sind von H. Schotten, A. Thaer[2], H. Thieme[3], W. Dieck[4] und von mir selbst gemacht worden[5]. Auch manche Lehrbücher — die von Pietzker und von Schwering z. B. — treten in eine Erörterung der Grundlagen ein, die freilich von den Darstellungen der Axiomatiker abweichen. Thieme

[1] R. Suppantschitsch, Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und Realgymnasien, Mittelstufe: Planimetrie und Stereometrie, Wien (Tempsky) 1910.

[2] A. Thaer, Ist die Nichteuklidische Geometrie auf der Schule zu berücksichtigen? Lehrproben und Lehrgänge **61**, 1.

[3] H. Thieme, Die Umgestaltung der Elementar-Geometrie, Programm Berger-Oberrealschule, Posen, Ostern 1900.

[4] W. Dieck, Stoffwahl und Lehrkunst im mathematischen Unterricht der Unter- und Mittelstufe höherer Lehranstalten, Sterkrade (Osterkamp) 1918, und ders., Nichteuklidische Geometrie in der Kugelebene (MPhBl **31**), Leipzig, Teubner, 1918.

[5] Vgl. die S. 85 Anm. genannte Schrift.

schlägt vor, sich an das eine oder andere Axiomensystem zu halten. Mir scheint es empfehlenswerter, der historischen Entwicklung nachgehend, an der Hand von mehreren Systemen die wichtigsten Begriffe zu erläutern. Man kann etwa mit den alten euklidischen Axiomen beginnen, dann ein modernes euklidisches, etwa das von Faifofer, schließlich das von Hilbert wählen und daran zeigen, was man unter der Vollständigkeit, der Widerspruchslosigkeit, der Unabhängigkeit der Axiome eines Systems versteht, wie eine rationale Geometrie beschaffen ist u. dgl. mehr. Es kommt ja nicht darauf an, ein System gleichsam als das alleinseligmachende hinzustellen, wie es die Lehrbücher der Geometrie aus begreiflichen Gründen sämtlich tun, es handelt sich vielmehr darum, zu zeigen, wie eine Grundlage der Geometrie zu gewinnen ist. Es mag vielleicht manchem zweifelhaft erscheinen, ob es möglich sein wird, bei einem solchen Gebiet die Form reiner Darbietung, bei der sich der Schüler nur rezeptiv verhält, zu vermeiden, vielmehr auch hier die Selbsttätigkeit durch Fragen und Aufgaben anzuregen. Das ist sehr wohl möglich; man muß nur die Axiomensysteme selbst nicht aus den Schülern herausfragen wollen — das wäre vergebliche Liebesmühe —, sondern man muß sie möglichst rasch als den Stoff übermitteln, an den die Überlegungen anknüpfen, wie etwa der sprachliche Unterricht an den Text eines Schriftstellers. Die Erarbeitung der für den Aufbau eines Systems fundamentalen Begriffe ist in diesem Falle Aufgabe der produktiven Unterrichtstätigkeit.

Um zu zeigen, wie ich das meine, will ich nur einige Beispiele geben. Wenn der Schüler die Axiome Euklids vor sich hat, wird ihm die Aufgabe gestellt, den Beweis irgendeines Satzes — man wählt am besten solche aus dem ersten Buch von Euklid — genau logisch zu zergliedern. Man zeigt ihm an Trugschlüssen, die er aufdecken muß, die Gefahren anschauungsmäßiger Verfahren. Man belegt schließlich an einigen Beispielen (z. B. an Nr. 1 des ersten Buches), daß Euklids Axiomensystem unvollständig ist. Man zeigt an einem vervollständigten System, daß die Lücken geschlossen werden können. — Einen Beweis dafür, daß das neue System wirklich ganz vollständig ist, kann man natürlich nicht erbringen.

Man kann dann die Frage nach der Eindeutigkeit des Axiomensystems untersuchen, insbesondere die Zahl der Axiome erörtern. Man sieht, wie man ein Axiom *a* durch ein anderes *b* ersetzen kann (z. B. das Parallelenaxiom durch den Satz von der Winkelsumme im Dreieck), wie man ein Axiom *a* manchmal in zwei oder mehrere einfachere Axiome zerlegen kann und umgekehrt. Man achtet auf die Vereinfachung des Inhaltes: Statt zu sagen: „Außerhalb einer Geraden liegen in einer Ebene unendlich viele Punkte", kann man sich mit der Feststellung begnügen: „Außerhalb einer Geraden liegt in einer Ebene mindestens ein Punkt"; dann folgt der erste Satz aus dem zweiten. Auch beim Parallelenaxiom ist es übrigens, was aber für den Schüler nicht auf der Hand liegt, nicht notwendig zu sagen: Zu einer Geraden kann man durch jeden Punkt außerhalb der Geraden eine Parallele zu der Geraden ziehen, es genügt die axiomatische Festsetzung, daß es durch irgendeinen Punkt möglich ist.

Größere Schwierigkeit bietet die Hilbertsche Auffassung des Axiomensystems und, was man damit zusammennehmen kann, der Begriff (und in einzelnen Fällen der Nachweis) der Unabhängigkeit von Axiomen. Man braucht auch da nicht

gleich an die nichteuklidischen Geometrien zu denken, sondern hält sich besser an die ersten Axiomengruppen. Man spricht einige Axiome etwa 1, 2, 3 für die Gebilde A, B und C rein formal aus und substituiert nun den Gebilden A, B und C Begriffe, die so beschaffen sind, daß etwa 1 und 2, nicht aber 3 erfüllt sind. Dann ist 3 unabhängig von 1 und 2. Ein ganz einfaches Beispiel: Hilberts drei erste Axiome (das dritte nur in der ersten Hälfte) heißen in etwas veränderter Schreibweise: (1) Zwei voneinander verschiedene Gebilde erster Stufe A_1 und A_2 bestimmen stets ein Gebilde zweiter Stufe B; (2) Irgend zwei voneinander verschiedene Gebilde A_1 und A_2 eines Gebildes zweiter Stufe B bestimmen dieses Gebilde; (3) Auf einem Gebilde zweiter Stufe B gibt es stets wenigstens zwei Gebilde erster Stufe A_1 und A_2.

Um zu zeigen, daß 2 unabhängig von 1 ist, setze man etwa als Gebilde erster Stufe Ziffern, als Gebilde zweiter Stufe ganze Zahlen. Dann ist 1 erfüllt, nicht aber 2, auch nicht 3. Um die Unabhängigkeit des Axioms 3 von 1 und 2 zu zeigen, wird der Schüler selbst Beispiele heranbringen können, wenn er den Sinn des Axioms nur richtig erfaßt hat.

Eine Frage, die mit unserem Gegenstande aufs engste zusammenhängt, ist die, ob im Unterricht auch die nichteuklidischen Geometrien zu diskutieren sind. Thaer hat sich in einer eben schon genannten Arbeit ausdrücklich dafür ausgesprochen; Dieck hat mit seinen Arbeiten einen möglicherweise gangbaren Weg gezeigt. Andere, wie z. B. Klein, raten dringend davon ab, im regulären Schulunterricht, d. h. außer gelegentlichen Andeutungen auf Veranlassung interessierter Schüler, nichteuklidische Geometrie zu treiben. Gewiß muß man, wenn man überhaupt die Unabhängigkeit der Axiome besprechen will, auch Geometrien behandeln, die sich von der euklidischen unterscheiden. Ich zeigte eben, wie man da bei den Axiomen der Verknüpfung verfahren kann, ebenso einfach liegen die Dinge bei den Axiomen der Anordnung. Anders beim Parallelenaxiom. In den in ihrer Systematik weit entwickelten nichteuklidischen Geometrien im engeren Sinne, der Lobatschefkyschen und der Riemannschen, stecken so viele, von ihnen schlecht lostrennbare anschauliche Elemente, die den Schüler fremd anmuten, daß ich davon abraten möchte, mehr zu tun, als sie zu erwähnen. Wenn, wie in einer nicht gerade einwandfreien Abhandlung eines Schulmannes, die sich die Kritik der Grundlagen in den Lehrbüchern zur Aufgabe gesetzt hatte, die Geometrie auf der Kugel einfach der Riemannschen Geometrie gleichgesetzt wird, die sphärische Trigonometrie also als ein Gebiet der Riemannschen Geometrie auftritt, so muß ein solches Verfahren den Schüler, für den eben größte Kreise Kreise und keine Geraden sind, nur verwirren. Nur wenn er von der Auffassung der Axiome als eines Beziehungssystems an das Problem herankommt, so wie wir es oben für die Axiome der Verknüpfung andeuteten, wird dieser Schwierigkeit für die Auffassung vorgebeugt.

Wir haben bisher geometrische Axiomatik im Sinne eines Purismus besprochen, der sich rein geometrischer Methoden bedient und die Analysis ablehnt. Mit dieser Ablehnung ist es ihm freilich nicht ganz ernst; bei dem Nachweis der Unabhängigkeit zweier Axiome z. B. wird auf die Analysis zurückgegriffen. Man kann an das Problem der Grundlegung der Geometrie aber bekanntlich ebenso auch herangehen, indem man sich von vornherein der analytischen Methoden bedient. Dann entspricht einem Punkte ein Zahlentripel, der Länge einer Strecke ein ganz bestimmter Aus-

druck. Damit entsteht eine ganz andere Problemstellung, auf die zurückzukommen uns die Behandlung der analytischen Geometrie Gelegenheit geben wird.

Hier müßte nun mit einem Wort auch die allgemeinere Behandlung des Raumproblems im Unterricht gestreift werden. Es unterliegt keinem Zweifel, daß wir es hier mit einer der Hauptaufgaben einer propädeutischen Philosophie, möge sie nun im Unterricht anderer Fächer eingeschlossen sein oder in besonderen Stunden für sich auftreten, zu tun haben. Auf die Aufgaben, die dabei der mathematische Unterricht zu erfüllen hat, wird ausführlich im 3. Teilband zurückzukommen sein. Hier mag es zuerst genügen, auf die ausgezeichnete Arbeit von Wernicke in den IMUK-Abhandlungen zu verweisen.[1]

3. Das Beweisen geometrischer Lehrsätze.

Wir wollen uns zunächst einmal an einem bestimmten Beispiel klar machen, welche verschiedenen Wege man einschlagen kann, um einen geometrischen Lehrsatz den Schülern gegenüber als richtig zu erweisen. Ich greife auf einen Satz zurück, den

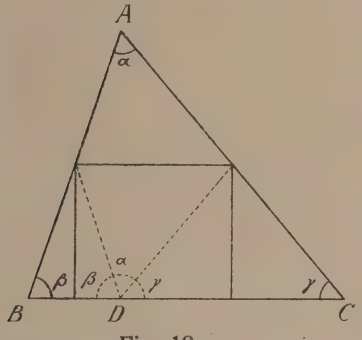


Fig. 18.

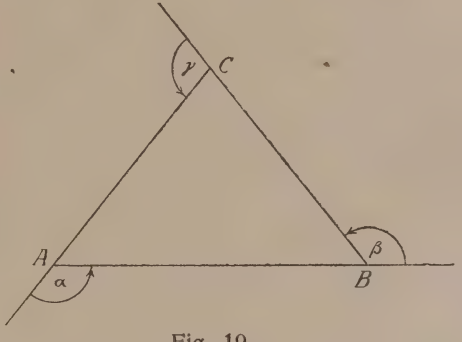


Fig. 19.

ich früher schon einmal[2] in dieser Hinsicht behandelt habe, wenn auch in etwas anderer Weise. Er ist deshalb besonders geeignet, weil er ziemlich am Anfang der Planimetrie steht: Die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt 180°.

Dieser Satz ist nicht unmittelbar einleuchtend, man muß unbedingt eine ausdrückliche Begründung für die Richtigkeit geben. Das nächstliegende, aber auch roheste Verfahren, das uns freilich gar keinen Einblick in die Gründe für die besondere Eigenschaft des Dreiecks gibt, ist die Ausmessung der Winkel. Die gefundenen Werte addiert man und erhält als Ergebnis, daß die Summe innerhalb der Fehlergrenzen, die durch die Maßstäbe u. dgl. bedingt sind, gleich 180° ist. Der Lehrer wird es sich nicht entgehen lassen, hier auf genau durchgeführte Messungen, insbesondere auf das Dreieck Inselsberg, Hoher Hagen, Brocken, das Gauß ausgemessen hat, hinzuweisen.

---

[1] A. Wernicke, Mathematik und philosophische Propädeutik (Deutsche IMUK-Abh. III, 7) Leipzig (Teubner) 1913.

[2] W. Lietzmann, Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland, deutsche IMUK-Abh. V, 2, Leipzig (Teubner) 1912.

Man kann diese erste Methode in leichter Weise abändern, um ihr größere Anschaulichkeit zu geben: Man schneidet ein beliebiges Dreieck aus Papier aus, reißt die Ecken des Dreiecks ab und legt die abgerissenen Winkel aneinander, dann „sieht" man, daß die Winkelsumme zwei Rechte beträgt. Will man das Dreieck nicht zerstören, so kann man sich auch statt des einen gleich drei Dreiecke gleicher Gestalt und Größe ausschneiden und dann wieder die drei verschiedenen Winkel aneinanderlegen. Es braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden, daß im Unterricht der Weg von dem ersten Nachweis sehr schnell zum zweiten führt. Dann folge ein dritter. Man bringt durch geschicktes Falten des Dreiecks die drei Winkel nebeneinander (vgl. die Fig. 18).

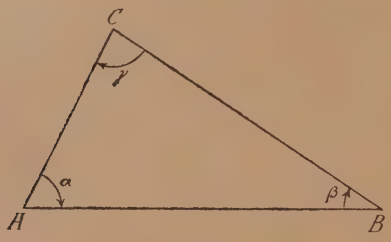


Fig. 20.

Viel benutzt wird eine andere Methode; man zeichnet das Dreieck etwa auf den Fußboden, läßt einen Schüler (vgl. die Fig. 19) von einem Eckpunkt A aus zum nächsten, B, marschieren, von da, nachdem er sich um den Winkel β in die Richtung nach C gewandt hat, nach C gehen, von dort wieder nach einer Drehung um den Winkel γ nach dem Ausgangspunkt A marschieren. Dreht er sich jetzt noch um den Winkel α, so hat er seine anfängliche Stellung wieder erreicht, hat sich aber im Laufe seiner Wanderung gerade einmal um sich selbst gedreht, also einen Winkel von 360^0 beschrieben. Die Summe der Außenwinkel beträgt also 4 Rechte, und da die Summe der 3 Paare von Innen- und zugehörigen Außenwinkeln insgesamt 6 Rechte beträgt, so bleiben für die Innenwinkel 2 Rechte über.

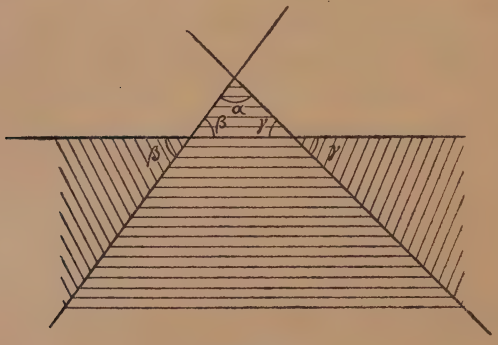


Fig. 21.

Man kann diesen nach Thibaut benannten „Beweis"[1] noch in folgender Weise vereinfachen — ich kann nicht sagen, von wem das zuerst geschehen ist: Man bringt den Schüler in die Richtung der Seite AC (vgl. Fig. 20). Er geht nach A, dreht sich jetzt um den Innenwinkel α, so daß er rückwärts schreitend von A nach B gelangt. Jetzt dreht er sich um den Winkel β, marschiert vorwärts nach C, dreht sich wiederum um den Winkel γ, um jetzt rückwärts schreitend seine Ausgangsstelle zu erreichen. Er hat also im ganzen nur eine halbe Umdrehung gemacht, da er ursprünglich mit dem Gesicht nach A, nachher aber mit dem Gesicht nach C steht. Mithin ist die Summe der Innenwinkel gleich 180^0.

[1] Der Beweis findet sich zuerst in der 2. Auflage von Thibaut, Grundriß der reinen Mathematik, Göttingen (Vandenhoek u. Ruprecht) 1809, S. 177ff. Vgl. auch S. Günther, Der Thibautsche Beweis für das elfte Axiom. Programm, Studienanstalt Ansbach 1877.

Im Anschluß an den Thibautschen Beweis sei noch eine „Ableitung" angeführt, die von der Definition des Winkels als Stück der Ebene ausgeht. Die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$ entspricht der Halbebene, also dem Winkel 180°, da die Dreiecksfläche gegenüber der unendlich großen Halbebene nicht ins Gewicht fällt (vgl. Fig. 21). Das Bedenkliche dieses Beweisverfahrens bedarf keiner besonderen Auseinandersetzung.[1]

Schließlich kann man nun in Anlehnung an die früher genannten Methoden des Zusammenlegens der drei in Frage kommenden Winkel vollständige Beweise geben. Man kann etwa (vgl. Fig. 22) im Punkte C den Winkel β an $C\,B$ nach außen antragen und zeigen, daß der freie Schenkel $C\,X$ nach einem bekannten Satz der Parallelenlehre (Wechselwinkel!) der Seite $A\,B$ parallel ist; ebenso kann man es mit dem Winkel α nach der anderen Seite machen. Dann ergibt sich wieder aus der Parallelenlehre, und zwar nach dem meist als Grundsatz ausgesprochenen Satz, daß beide freien Schenkel in eine Gerade fallen und damit, daß die Winkelsumme, wie verlangt, 2 Rechte ist.

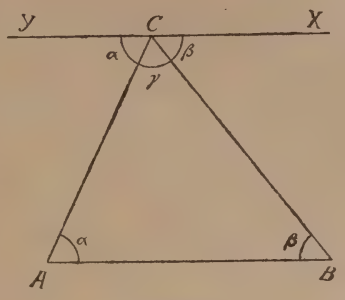


Fig. 22.

Dieses Verfahren, das man auch in der Weise abändern kann, daß man den Winkel α nicht an den Schenkel $C\,A$, sondern an den freien Schenkel $C\,X$ des eben angetragenen Winkels anträgt (vgl. Fig. 23), ergibt sich bei der Anwendung des heuristischen Lehrverfahrens ungezwungener als die zunächst unbegründet auftretende Parallele durch C zu $A\,B$. Der Beweis, der in dieser zuletzt angedeuteten Weise vorgeht, also die Parallele durch C zu $A\,B$ zieht und nachweist, daß die entstehenden Winkel den Dreieckswinkeln α und γ gleich sind, ist in seinem Aufbau noch einfacher als der vorangegangene. Nachdem man nun einmal gefunden hat, daß es doch auf das Ziehen einer Parallelen ankommt, kann man das gleich tun und nicht erst, wie in dem vorangehenden Beweis, die Parallele entstehen lassen.

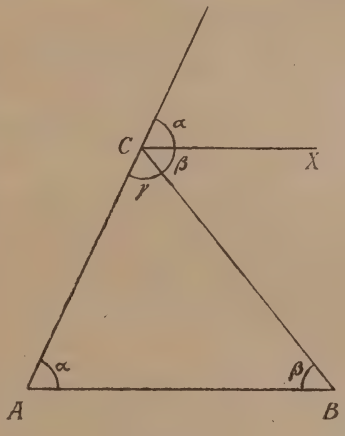


Fig. 23.

Sehen wir uns nun die verschiedenen Arten von Beweisen, wie sie uns hier an einem ganz bestimmten Beispiel entgegengetreten sind, etwas näher an. Unser Satz ist nicht unmittelbar anschaulich wie eine große Zahl anderer Sätze, z. B.:

[1] Hier könnte noch ein anderer Beweis genannt werden. Man läßt das Dreieck dadurch daß die Seiten durch Parallelverschiebung der einen von ihnen kleiner und kleiner werden, zusammenschrumpfen. Dabei bleiben die Außenwinkel die gleichen; schrumpft das Dreieck auf einen Punkt zusammen, so sieht man, daß die Summe der Außenwinkel 4 Rechte ist. Natürlich benutzt dieser Beweis ganz ebenso wie der Thibautsche die Parallelensätze.

Zwei Kreise, die einen Punkt gemeinsam haben, haben noch einen zweiten Punkt gemeinsam, es sei denn, daß sie sich berühren.

Bei anderen Lehrsätzen kann der Mathematiker doch nicht bei der bloßen unmittelbaren Anschauung stehen bleiben; so naheliegend sie sein mögen, er darf sich nicht mit einem „Siehe" begnügen, wie es die Inder taten. Das gilt von Beweisen aus der Flächenlehre, von solchen, wie sie Schopenhauer im Auge hatte, als er seinen berühmten Ausspruch gegen die Mathematiker tat[1]. Die Grenze zwischen dem, was der Lehrer als anschaulich ohne weitere Darlegung ansehen darf, und dem, was einer besonderen Erörterung noch bedarf, ist recht schwer zu ziehen. Hölder[2] hat einmal in einer Vorlesung auf folgendes Beispiel hingewiesen: Daß die Winkelhalbierenden eines Dreiecks durch das Innere des Dreiecks gehen, ist unmittelbar anschaulich, daß aber die drei Winkelhalbierenden durch einen Punkt gehen, nicht. Man könnte versucht sein, den Unterschied darin zu sehen, daß es sich bei unmittelbar anschaulichen Dingen nur um qualitative Eigenschaften, bei den anderen um quantitative Eigenschaften der Figuren handelt. Aber nicht nur, daß eine solche Unterscheidung unbestimmt ist; man könnte sogar einwenden, daß dann die ganze Geometrie der Lage im Gegensatz zur metrischen Geometrie unmittelbar anschaulich wäre — was man nicht gerade behaupten wird. Alles in allem, es kommt hier auf einen gewissen geometrischen Takt an, den man beim Lehrer und beim Lehrbuchverfasser voraussetzen muß.

Doch zurück zu den nicht unmittelbar anschaulichen Sätzen. Wenn wir an das Ziel, unser „Lehrsatzskelett", denken, so wird uns diese Kategorie am meisten interessieren, denn wir werden in unser Skelett nur solche Sätze ausdrücklich aufnehmen, die nicht ohne weiteres einleuchten.

Die erste Methode zum Nachweis der Richtigkeit eines Satzes war die, sich durch Messung von der Richtigkeit zu überzeugen. Das ist die Methode des Physikers, wenn auch mit Einschränkung. Wenn im Demonstrationsunterricht der Physik ein Gesetz gezeigt werden soll, so macht der Experimentator eine, vielleicht auch zwei Messungen, und das Gesetz gilt für das Folgende als bewiesen. Diese Methode hat mehrere offensichtliche Schwächen. Einmal läßt sie die Frage ganz offen, wie man zu dem Satz gekommen ist. Es handelt sich nur um die Verifikation eines irgend woher schon überkommenen Satzes. Und daß man etwa durch mehrfache Messungen induktiv auf solche Sätze gekommen ist, das mag hin und wieder einmal der Fall gewesen sein, die Regel ist es nicht. Dann aber: es wäre ja möglich, daß die Dinge gerade in dem vorliegenden Beispiel das in die Augen springende Ergebnis geliefert haben. Wie jemand aus $\frac{16}{64}$ durch Streichen der 6 das richtige Ergebnis $\frac{1}{4}$ erhält, ohne daß er da zu einem Lehrsatz kommt, wie daraus, daß alle bis auf Weierstraß untersuchten stetigen Funktionen auch differenzierbar waren, nicht ein entsprechender Satz folgt, so kann es auch in anderen nicht so krassen oder so berühmten Fällen gehen.

Ein Mittel gibt es ja, die Prüfung der Richtigkeit etwas verläßlicher zu machen. Wenn der Physiker die Schüler in praktischen Übungen eigene Versuchsreihen an-

[1] Siehe: Über die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde und: Die Welt als Wille und Vorstellung.

[2] O. Hölder, Anschauung und Denken in der Geometrie, Leipzig (Teubner) 1900.

stellen läßt, so beschreitet er den gleichen Weg wie der Mathematiker, wenn er etwa die Messung der Dreieckswinkel an mehreren verschiedenen Dreiecken vornehmen läßt, wenn er die Ergebnisse seiner ganzen Schülerschar zusammenfaßt. Besser ist es noch, wenn man die Untersuchung dadurch systematisch gestaltet, daß man in ganz bestimmter Weise die möglichen Fälle variiert. Es handelt sich bei diesen Lehrsätzen ja oft um eine Art Invariantenproblem. Bei der Variation gewisser Elemente bleiben gewisse andere Größen unverändert, invariant. Ein sehr zweckmäßiger Weg ist der, bei mehreren variablen Größen zunächst die Invarianz in bezug auf eines der in Frage kommenden Elemente zu untersuchen. Man wird also in unserem Beispiel einen Winkel konstant nehmen, den anderen verändern, d. h. also feststellen, was über die Summe von Winkeln zu sagen ist, die eine beliebige Gerade mit den Schenkeln eines festen Winkels bildet. Man sieht, die Methode ist einer Ausgestaltung fähig, die im Gebiete der Naturwissenschaften tatsächlich zu wertvollen Ergebnissen führt. Man halte sich aber immer vor Augen, was wir vorhin schon sagten, daß diese Methode doch keineswegs der übliche Weg ist, auf dem in den Naturwissenschaften, geschweige denn in der Mathematik neue Wahrheiten gefunden werden; fast immer geht eine gewisse deduktive Überlegung voraus oder doch nebenher.

An diese Methode schließen wir als zweite die experimentelle an. Es handelt sich darum, es durch irgendwelche experimentellen Hilfsmittel dahin zu bringen, daß nun entweder die reine Anschauung zum Ziel führt, oder eine induktive Bestätigung sich leichter ermöglichen läßt. Beim Winkelsatz des Dreiecks hatten wir die Ecken abgerissen, wir hatten uns drei Dreiecke hergestellt und sie zusammengelegt, wir hatten in einer schon etwas feineren Weise durch Falten unser Ergebnis in sehr anschaulicher Form gewonnen. Solche mehr oder weniger einfachen Experimente sind es, die wir mit Modellen, besonders mit beweglichen Modellen ausführen. Sie enthüllen vielfach innere Zusammenhänge, die bei einfacher Induktion nicht zutage treten, ganz abgesehen davon, daß sie die Beziehung der Geometrie zur Wirklichkeit lebendig halten.

Von der Benutzung der Modelle wird im einzelnen noch oft die Rede sein. Hier mag nur von vornherein vor zweierlei gewarnt werden. Wo das Modell mit vieler Umständlichkeit zeigt, was eine einfache Zeichnung sofort dem Schüler klar vor Augen stellt, ist es entbehrlich und, da Herstellung und Benutzung zeitraubend, schädlich. Wenn ich an einem Kreis aus Pappe, an einem um einen Punkt außerhalb dieses Kreises beweglichen Papierstreifen, der in der Mitte geschlitzt ist, zeige, daß eine Sekante durch geeignete Bewegung um einen ihrer Punkte in die Tangente übergeht, so ist das höchst überflüssig; der Schüler, der das nicht an einer schnell entworfenen Zeichnung, wenn das noch nötig sein sollte, unter Zuhilfenahme des beweglichen Lineals selbst sofort findet, der wird auch nicht klüger dadurch, daß er sich ein solches Modell nach bestimmten Vorschriften, mit mühsamem Einpunzen usw., selbst herstellt, auch nicht dadurch, daß er in ein Kino geht und sich die Bewegung der Geraden vorflimmern läßt.

Experimente einfachster Art und deshalb in der Mathematik am meisten gebräuchlich sind Zeichnungen, insbesondere die Einfügungen von Hilfslinien. Sie bilden den Übergang zu den deduktiven Beweisen.

Blicken wir noch einmal zurück: Alle die Beweismethoden, die wir bisher kennen

lernten, die Methode der Anschauung, der Induktion, des Experimentes, sind empirischer Natur, sie greifen jeweils auf die Erfahrung zurück. Ihnen stehen die deduktiven Methoden gegenüber. Zwar wurzeln auch diese letzten Endes in der Erfahrung, insofern wir von Grundsätzen oder Axiomen ausgehen, die aus der Erfahrung abstrahiert sind, aber doch wollen sie mit der Erfahrung nur auf dem Umwege über die Grundlagen in Verbindung stehen. Übrigens sind die Zeiten ja nicht so fern, wo man diese Grundlagen als denknotwendig ansah und damit glaubte, die Geometrie unabhängig von der Erfahrung begründet zu haben.

Der erste Beweis, der mit logischen Schlüssen arbeitete, war jener von Thibaut. Er enthielt freilich immer noch experimentelle Elemente. Man hat seinerzeit geglaubt, mit diesem Kunstgriff die Parallelenlehre zu umgehen. Aber der Kunstgriff versteckte nur die Parallelenlehre. Man braucht nur, um das einzusehen, an einem Beispiel, bei dem der Satz nicht zutrifft, die Dinge zu diskutieren, am sphärischen Dreieck. Da ist die Winkelsumme bekanntlich nicht 2 Rechte, jener Kunstgriff versagt. Warum? Weil die den Parallelensätzen entsprechenden Sätze auf der Kugel nicht gelten. — Man braucht solche Kunstgriffe, die unbequeme Dinge übertünchen, gewiß nicht ganz zu vermeiden. Unmoralisch wird die Sache nur, wenn man die Schüler im Glauben läßt, alles sei in Ordnung. Noch übler ist die Sache, wenn der Lehrer selbst nicht weiß, welche Sünden gegen den heiligen Geist der Mathematik er begeht.

Daß man nur zu leicht Dinge aus der Anschauung als etwas ganz Selbstverständliches hinzunimmt, ohne berechtigt dazu zu sein, ist bei Beweisen eine alltägliche Erfahrung. Trugschlüsse, die sich auf eine absichtlich falsch gezeichnete Figur stützen, sind ja leicht anzugeben[1]; der Fehler pflegt in einer falschen Anwendung der auf den Begriff „zwischen" bezüglichen Sätze zu liegen. Es ist wohl nützlich, auch dem Schüler solche Fehlbeweise vorzuführen; sie schulen die Urteilskraft und die Kritik, wie sie vor einer Überschätzung der Anschauung warnen. Auch auf optische oder geometrische Täuschungen sollte in diesem Zusammenhange an der Hand ganz bestimmter Beispiele hingewiesen werden. Dem Schüler muß klar gemacht werden, daß in manchen Dingen die Anschauung versagt. Man kann schon keinen Punkt, keine Strecke anschaulich darstellen, geschweige denn die beiderseits beliebig fortgesetzte Gerade. Wie sehr uns schon bei größeren Dimensionen die Anschauung im Stich läßt, kann man aus der bekannten Scherzaufgabe ersehen: Ein Seil wird um den Äquator gespannt, es bleiben einige Meter übrig, dafür will man das Seil lockern. Wie weit steht es ab, wenn man den Abstand vom Erdboden überall gleich wählt? — Ich glaube, das ist für viele der Vorstellung schon ebenso unzugänglich wie die beiden Geraden, von denen die eine nur die rationalen, die andere nur die irrationalen Punkte, von einem Nullpunkt an gemessen, enthält.

Doch das ist ein grundsätzlicher Übelstand, der sich nicht beheben läßt. Anders mit dem folgenden Einwand. Die deduktive Methode knüpft in der Schule immer an bestimmte, wirklich gezeichnete Figuren an. Eine solche Figur stellt einen besonderen Fall dar, genau so wie beim Rechnen ein in Ziffern gegebenes Beispiel. Wenn man trotzdem die Figur für allgemein hält, wenn man den an sie anknüpfen-

[1] W. Lietzmann und V. Trier, Wo steckt der Fehler? (MPhB 10) 2. A., Leipzig (Teubner) 1917.

den Schlüssen allgemeine Gültigkeit zuspricht, so steckt darin ein gut Teil geometrisches Gefühl, das man in der Regel nicht näher analysiert. Gewiß ist auch dagegen nichts einzuwenden. Aber doch werden vielfach bei den Beweisen mehr als gut und billig die Lageverhältnisse vernachlässigt. Nicht selten knüpft man eine Überlegung an ein spitzwinkliges Dreieck an, ohne eine entsprechende Überlegung für das stumpfwinklige, bei dem die Dinge vielleicht ganz anders liegen, anzufügen (Höhenschnittpunkt!). Man beschränkt sich in der analytischen Geometrie auf den ungefährlichen Fall, wo alles schön im ersten Quadranten liegt; ähnlich macht man es in der darstellenden Geometrie. Eine große Vielgestaltigkeit der Lagemöglichkeiten finden wir z. B. bei den Figuren zu Hyperbelsätzen. So erhält man bei dem Satze: „Zieht man von einem Punkte an eine Hyperbel zwei feste Tangenten und eine bewegliche dritte, so wird das zwischen den ersten gelegene Stück der dritten Tangente von einem Brennpunkte aus stets unter gleichem Winkel gesehen", ganz verschiedenartige Figuren, je nach den Lageverhältnissen. Man kann unterscheiden die Fälle, daß die beiden festen Tangenten an einen Hyperbelast gehen oder an zwei, im ersten Falle wieder, daß die dritte an den gleichen Hyperbelast geht oder an den anderen usf.

Wir sagten schon, daß von jenen an eine falsche Figur anknüpfenden Trugschlüssen nicht wenige dadurch zustande kommen, daß die Lageverhältnisse nicht genügend erörtert werden. Daß oft in der Mathematik mehr Sinn steckt, als man zunächst hineingelegt hat, darf nicht dazu führen, ihr blind zu vertrauen. Eine Art Gegenstück zu dieser Tatsache ist es — Erler hat vor vielen Jahren einmal darauf aufmerksam gemacht —, wenn man sich bei manchen allgemein bewiesenen Sätzen gar nicht darüber klar ist, wie allgemein die erhaltenen Ergebnisse schon sind. Es ist gar nicht so selten, daß jemand den Sinussatz erst in der Form $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$ beweist und nun ausdrücklich in derselben Ausführlichkeit auch noch einmal $b : c = \sin \beta : \sin \gamma$, obwohl das ja ein besonderer Fall des eben Bewiesenen ist. Ebenso liest man beim bekannten euklidischen Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes, nachdem die Gleichheit des einen Kathetenquadrates mit einem Hypotenusenrechteck hergeleitet ist, nicht selten: „Entsprechendes läßt sich für das andere Kathetenquadrat beweisen". Gewiß, das ist möglich, es ist aber gar nicht nötig. Wenn wir es auf der einen Seite bewiesen haben, so brauchen wir es nicht erst noch auf der anderen Seite zu tun; da gilt es, wenn unser Beweis allgemein genug war, von selbst.

Doch zurück zu unseren verschiedenen Beweismethoden. Den Schluß machten in unserem Beispiel diejenigen Beweise, die uns für ein deduktives Verfahren für die Schule hinreichend streng schienen. Ein gewisses experimentelles Element enthalten beide in den als Hilfslinien gezogenen Geraden. Der Unterschied beider bestand darin, daß in dem einen längeren die Gründe für die einzelnen Schritte klargelegt wurden, während der andere nicht ohne eine besondere Anleitung, die den Vorteil des Ziehens einer Parallelen deutlich macht, gefunden werden kann. Der letzte Beweis ist der Typus des „Mausefallenbeweises"[1]. Es wird eine Hilfslinie ge-

[1] Diesen Ausdruck gebraucht bekanntlich Schopenhauer, um damit der Mathematik am Zeuge zu flicken (vgl. S. 106 Anm. 1).

zogen, es werden Sätze vom Wechselwinkel angewandt, und erst jetzt dämmert es, was das alles mit unserem Satz zu tun hat. — Und doch, ein solcher Mausefallenbeweis ist das Ziel. Er ist gewiß nicht, was viele Laien zu glauben meinen, der Weg, um zum Satz zu kommen. Er ist die letzte ausgeglättete Form, die wir dem Beweise eines Lehrsatzes geben, den wir vielleicht erst mit induktiven Methoden, vielleicht auch durch eine mehr oder weniger geniale Intuition gefunden haben, dem wir dann mit der Deduktion mit der nötigen Vorsicht zuleibe gegangen sind, um schließlich hinter die wahren Gründe der geometrischen Tatsache zu kommen. Jetzt bildet der elegante, möglichst knappe Beweis, der nachher in der Veröffentlichung oder auch im Leitfaden steht, den Schlußpunkt, der wenig von der vorangegangenen Arbeit verrät, ja manchmal darüber geradezu einen Schleier deckt. Man kann ja nun allerdings im Familienroman von hinten zu lesen anfangen, aber man kann nicht in der Mathematik mit dem Ergebnis beginnen, wenn man es sich ganz zu eigen machen will.

Wir haben mit unserer Reihe von Methoden gleichzeitig eine Art Wegweiser dafür gegeben, wie man Beweise finden kann. Denn das muß noch einmal deutlich ausgesprochen werden, nicht Beweise, sondern das Beweisen ist das Ziel, das uns im Geometrieunterricht vorschwebt. Die Geistestätigkeit, die sich mit der schrittweisen Verfolgung der Schlüsse in einem fertigen, aus dem Lehrbuch entnommenen oder vom Lehrer vorgetragenen Beweise begnügt, ist eine vielmals einfachere als die, die selbst an das Auffinden der Beweise herangeht. Wollen wir geistige Selbständigkeit im Schüler wecken, dann scheidet jener erste Weg ganz aus.

Aber auch die Lehrsätze, die es zu beweisen gilt, wird man nicht den Schülern als etwas Gegebenes vorlegen, auch sie wird man finden lassen. Von den drei Zielen mathematischen Unterrichtes:

1. die Lehrsätze mit ihren Beweisen soll der Schüler beherrschen,
2. er soll imstande sein, Beweise vorgelegter Lehrsätze aufzufinden,
3. er soll dahin gebracht werden, selbst Lehrsätze zu finden und sie dann zu beweisen,

geht das dritte am weitesten. Es ist klar, daß es in vielen Punkten nur ein dem Unterricht vorschwebendes, von ihm nicht erreichtes Ziel ist. Einmal darf nirgends die leitende Hand des Lehrers fehlen. Dann aber wird man bis zu der Forderung 3 immer nur in einfachen Fällen vordringen und sich in anderen Fällen mit 2 oder wohl gar mit 1 begnügen.[1] Es ist eben nicht möglich, in 7 Jahren von mittleren Köpfen noch einmal finden zu lassen, was in Jahrhunderte dauernder Arbeit von den besten Köpfen geschaffen ist. Und so vereint sich auch in der Mathematik mit dem einen Ziel, der Schulung zum selbständigen Denken, der so viel angegriffene Überblick über die Forschungsergebnisse.[2]

---

[1] Daß man tatsächlich schon in unteren Klassen „Problemmathematik" treiben kann, wenn auch naturgemäß an recht bescheidenen Problemen, wollen die unter der Überschrift „Geometrische Überlegungen" über alle Abschnitte meiner Geometrischen Aufgabensammlung verstreuten Aufgaben zeigen.

[2] Vgl. dazu G. Kerschensteiner, Wesen und Wert des naturwissenschaftlichen Unterrichtes, Leipzig (Teubner) 1914. Das Buch, das aus einem Vortrag im Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (München, 1913) hervorgegangen ist, kämpft für die geistige Schulung des Schülers durch den Unterricht und tritt lebhaft dem „Überblick" entgegen.

Zunächst noch ein Hinweis auf die Auffindung von Lehrsätzen. Bei Euklid ist, ebenso wie in einem modernen systematischen Leitfaden, von dieser Seite des Unterrichts nichts zu finden. Aber doch geben auch diese Bücher in einer Hinsicht Fingerzeige zum Auffinden neuer geometrischer Wahrheiten, nämlich durch die Gliederung des Stoffes: Wenn man den Kreis betrachtet, so wird man ihn in Beziehung setzen zu Punkten, zu Geraden, zu Winkeln, zu Dreiecken und Vielecken, zu anderen Kreisen. Mit einer solchen Disposition erhält die Forschung bereits eine bestimmte Richtung. Hat man so für die Untersuchungen einen leitenden Gedanken gefunden, so wird man vielfach auf zeichnerischem Wege auf gewisse Vermutungen kommen, hinter denen ein Lehrsatz steckt. Als ein Beispiel nenne ich nur die merkwürdigen Punkte im Dreieck. In anderen Fällen wird man mehr logisch-deduktiv vorgehen: Man sucht durch Kombination der an sich möglichen Fälle ein Problem vollständig auszuschöpfen; Beispiel: Die Kongruenz der Dreiecke. — Man untersucht, ob eine im Satz auftretende Bedingung notwendig oder hinreichend ist: Möglichkeit der Umkehrung eines Satzes. — Man sucht einen Satz zu verallgemeinern nach irgendeiner Richtung hin: Winkelsumme im Vieleck, nachdem das Dreieck erledigt ist. — Man sucht durch Erörterung besonderer Fälle neue Sätze zu finden: Sätze über Rechteck, Rhombus, Quadrat, wenn das Parallelogramm vorausgegangen ist.

Bei einer solchen Methode eigener Forschung des Schülers, bei der Lehrsätze und Beweise werden, nicht sind, und die man deshalb wohl auch die genetische genannt hat, wird besonderer Wert auf die Herauspräparierung der Beweise zu legen sein. In dieser Hinsicht ist ein Verfahren von großer praktischer Bedeutung, das wohl schon so alt ist, wie die heuristische Methode im Unterricht überhaupt, das aber doch erst in neuerer Zeit klar formuliert worden ist. Auf Anregungen von W. Krumme[1] geht es zurück, wenn im Geometrieunterricht eine Anzahl „Beweismittel" zusammengestellt werden. Der Lehrer weiß, und auch der Schüler merkt es bald, daß man bei den Beweisen eigentlich mit verhältnismäßig wenigen, immer wiederkehrenden Gedanken auskommt. Der Nachweis dessen, daß zwei Geraden parallel sind, wird fast immer durch Wechsel- oder Gegenwinkel erbracht, die Gleichheit zweier Strecken oder Winkel beweist man, indem man sie in kongruente Dreiecke zu bringen sucht, man zeigt auch die Gleichheit zweier Winkel, indem man feststellt, daß sie einen und denselben Winkel zum Komplement- oder Supplementwinkel haben usw.

Man knüpft die geometrischen Beweise in der Schule wohl durchweg an Figuren an. Da ist es nun eine immer wieder zu beobachtende Tatsache, daß schwächere Schüler viel zu sehr an der besonderen Lage und Bezeichnungsweise der Figur kleben. Zuweilen spielen hier psychologische Dinge eine entscheidende Rolle. Der Schüler von visuellem Typ kann sich leicht ein Vorstellungsbild verschaffen, der sogenannte Eidetiker sogar ein subjektives Anschauungsbild. Da Eidetiker, wie neuere Forschungen gezeigt haben, unter Jugendlichen häufig, unter Erwachsenen

[1] Der Gedanke Krummes, ganz bestimmte, wenige Beweismittel herauszustellen, ist zuerst in den Fenknerschen Lehrbüchern durchgeführt worden. Die Idee ist dann auch von anderen Lehrbüchern aufgenommen worden.

selten sind, verbirgt sich diese Eigentümlichkeit recht oft dem Lehrer. Ich entnehme einem Beobachtungsprotokoll folgenden Fall[1]:

So sah der 13jährige Karl M. die geometrischen Figuren, die längere Zeit an der Wandtafel gestanden hatten, im Anschauungsbild immer wieder in derselben Lage, mit den gleichen Größenbeziehungen der einzelnen Teile, mit genau den gleichen Buchstaben. Gedächtnismäßiges Zurückgehen auf einen früheren Beweis war bei ihm nur unter anschaulicher Vergegenwärtigung der damals verwandten Figur möglich.

Man wird in solchen Fällen immer wieder darauf dringen, daß der Schüler von der durch das subjektive Anschauungsbild stark unterstützten reinen Gedächtnisarbeit zur logischen Erfassung vordringt. Nicht wenige Fälle späteren Versagens eines Schülers werden sich auf solches Übersehen einer die reine Gedächtnisarbeit vordrängenden psychischen Veranlagung zurückführen lassen.

Study hat sich einmal in einer sehr beachtenswerten kleinen Schrift[2] gegen eine Übertreibung der euklidischen Darstellungsweise mit ihrem Streben nach Vollständigkeit, ihrer Auflösung in eine ununterbrochene Kette von Syllogismen ausgesprochen. „Diese Darstellungsform entbehrt allzu sehr der Übersichtlichkeit, und außerdem gehört sie entschieden zum genre ennuyeux." Freilich gibt er zu: „Für Anfänger sind ausgeführte Muster vollständiger Deduktionen ganz unentbehrlich, da sie eben erst lernen müssen, was ein Beweis ist." Mir will scheinen, als ob die Gefahr, es in der Schule in der Beweisführung an Sorgfalt fehlen zu lassen, weit größer ist. Ich erinnere mich einer Probelektion — nicht eines Anfängers —, in der der Lehrer zweimal hintereinander entscheidende Tatsachen unbewiesen ließ: Bei dem Satz, daß die Winkelhalbierende die Gegenseite im Verhältnis der Anseiten teilt, wurde zwar durch Verlängerung einer Seite um die Nachbarseite in bekannter Weise das gleichschenkelige Dreieck konstruiert, aber die Tatsache, daß die Basis dieses Dreiecks der Winkelhalbierenden parallel ist, ohne weiteres der Anschauung entnommen. Und ebenso wurde beim Beweis des ersten Ähnlichkeitssatzes das kleinere Dreieck in bekannter Weise auf das größere gelegt und dabei wieder die Parallelität der dritten Seiten als selbstverständlich der Anschauung entnommen. Wenn solche Dinge im Unterricht durchgehen, dann werden die Schüler niemals einen Begriff von einem richtigen mathematischen Beweise erhalten.

Zum Schluß dieses Abschnittes mögen nun noch einige Bemerkungen über besondere Arten von Beweisen folgen. Eine lange Diskussion haben die indirekten Beweise hervorgerufen. Man ist aus verschiedenen Gründen gegen sie angegangen. Einmal, so sagt man, sind sie zu schwer. Aus diesem Grunde möge man sie aus den unteren Klassen verbannen. Zum anderen sagt man, sie seien Mausefallenbeweise schlimmster Sorte, der wahre Grund der im Satz ausgesprochenen Tatsache würde durch solche Beweise nicht aufgedeckt. Schließlich wird gesagt, daß sie in sich unwahr wären, insofern man gezwungen sei, an ganz falschen Figuren zu operieren. Diesen letzten Einwand kann man so recht verstehen, wenn man etwa an den Beweis für die Umkehrung des Satzes vom Tangentenviereck denkt. Dagegen kann ich die beiden anderen Einwände nicht gar so tragisch nehmen. Wenn der Schüler wirk-

[1] O. Kroh, Subjektive Anschauungsbilder bei Jugendlichen. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1922.

[2] E. Study, Denken und Darstellung (Sammlung Vieweg, Heft 59) Braunschweig 1921.

lich einmal die Natur des indirekten Beweises erfaßt hat, dann wendet er ihn mit Leichtigkeit an. Ich erinnere mich aus meiner Schulzeit in Quarta, wie ich erstaunt war, als der Lehrer auf eine Frage nach einem Beweise eines neuen Lehrsatzes schon zufrieden war, als ich das eine Wort „angenommen" gesagt hatte. In der Tat, ist man so weit, dann bietet die Durchführung keine Schwierigkeiten mehr. Und was den zweiten Einwand anlangt, so finde ich, daß im Gegenteil der indirekte Beweis ganz wunderschön die logische Beziehung des Satzes zu einem ganz bestimmten früheren Satz aufdeckt, daß das Wesen der Umkehrung, der Begriff der notwendigen und hinreichenden Voraussetzung sehr deutlich in die Erscheinung treten. Unter gewissen Umständen wäre es eine Energieverschwendung, aus dieser Sachlage nicht auch die Konsequenzen zu ziehen, sondern für die Umkehrung neue Beweismethoden zu erdenken. Wenn wir etwa das Schema folgender vier Sätze haben:

1. Ist die Summe der Abstände eines Punktes von den Brennpunkten einer Ellipse kleiner als die große Achse, so liegt der Punkt innerhalb der Ellipse.
2. Die Summe der Abstände eines Punktes, der innerhalb der Ellipse liegt, von den Brennpunkten ist kleiner als die große Achse.
3. Ist die Summe der Abstände eines Punktes von den Brennpunkten einer Ellipse größer als die große Achse, so liegt der Punkt außerhalb der Ellipse.
4. Die Summe der Abstände eines Punktes, der außerhalb der Ellipse liegt, von den Brennpunkten ist größer als die große Achse.

Da wird es doch niemand einfallen, alle diese vier tatsächlich verschiedenen Aussagen direkt beweisen zu wollen. Man übersieht vielmehr sofort, daß man nur zwei direkt zu beweisen braucht, daß dann die anderen logisch daraus folgen. Die Kunst besteht darin, auszuforschen, welche Sätze einem direkten Beweis am besten zugänglich sind.

So kann ich die Furcht vieler vor den indirekten Beweisen und deshalb auch vor den Umkehrungen nicht teilen. Später braucht man sie doch, also fange man, wenn auch nicht möglichst früh, so doch zeitig genug an, die Schüler mit ihnen vertraut zu machen. Jedenfalls ist es weit besser, diese crux auf sich zu nehmen, als nach dem Vorgange mancher Lehrbücher die Umkehrungen einfach totzuschweigen — selbst wenn sie nachher fröhlich benutzt werden. Es ist eben nach meiner Ansicht ein schwerer logischer Fehler, bei dem man den Schüler beläßt, wenn er Umkehrungen für selbstverständlich hält. Ich pflege das schon den Quartanern zu Gemüte zu führen, indem ich ihnen sage, daß daraus, daß ein Quartaner ein Oberrealschüler ist, noch lange nicht folgt, daß ein Oberrealschüler auch ein Quartaner ist. Das kapiert auch der Unfähige. Gerade solche alltäglichen Beispiele müssen erst den Schüler davon überzeugt haben, daß Umkehrungen richtiger Sätze nicht selbstverständlich richtig sind. Dann findet er auch in der Quartageometrie selbst viele Beispiele, die ihm dasselbe zeigen. Im Rhombus stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht. Ist ein Viereck, in dem die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, auch immer ein Rhombus? Indirekte Beweise lassen sich im übrigen in der Anfängerklasse durchaus vermeiden.[1]

Auf der anderen Seite möchte ich einem Schwelgen in Umkehrungen keineswegs das Wort reden. Wenn die eine Tatsache der Symmetrie des gleichschenkligen Drei-

[1] Vgl. z. B. H. Hoyer, Direkter Beweis des Lehrsatzes, daß im Dreieck dem größeren Winkel die größere Seite gegenüberliegt. ZmnU **51** (1920) S. 62ff.

ecks, derzufolge Höhe, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende und Seitenhalbierende zusammenfallen, zur Aufstellung von einem halben Dutzend von Sätzen führt, so ist das in der Tat etwas reichlich, weil es unübersichtlich wird und eine Tatsache in sechs Tatsächelchen verteilt. Und ebenso habe ich nichts einzuwenden, wenn man, wie dies schon Bensemann[1] getan hat, bei der Umkehrung des Tangentenviereckssatzes und des Sehnenviereckssatzes direkte Beweise sucht. Aber man halte sich doch immer vor Augen, daß im Grunde genommen die Figuren nur Krücken unserer logisch-deduktiven Beweise sind, so sehr unentbehrlich für die Schüler auch diese Krücken sein mögen. Der Mathematiker L. Fuchs pflegte ein sehr krakliges geschlossenes Gebilde an die Tafel zu zeichnen und irgendwo in das Innere einen Punkt zu setzen und dazu zu sagen: Meine Herren, das sei ein Kreis und das sei sein Mittelpunkt! Und doch knüpften vollkommen strenge logische Überlegungen an dieses für einen Zeichner entsetzliche Ding an. Ich will damit selbstverständlich nicht sagen, daß wir es in der Schule ebenso machen sollen — quod licet Jovi ... — ich will nur damit erhärten, daß die Figur immer nur Krücke, mit einem Vergleich Nietzsches Geländer, wenn auch manchmal für unsere Verhältnisse unentbehrlich ist. Und wie man nicht allzu sehr auf die Genauigkeit der Figur bauen kann — die Versuche der Kreis-Quadratoren geben da recht abschreckende Beispiele —, so soll man auch schließlich nicht gar so verstimmt sein, wenn wir zur Stütze eines Unmöglichkeitsbeweises eine unmögliche Figur heranziehen.

Warnen möchte ich dann weiter vor Tautologien, die besonders bei „Fanatikern des Beweises" — das Wort stammt meines Wissens von J. C. V. Hoffmann — beliebt sind. Es wird niemandem einfallen, zu beweisen, daß die Punkte eines Kreises vom Mittelpunkt gleichweit entfernt sind, mit anderen Worten, daß die Radien gleich sind. Und doch findet man in Büchern, die das von Archimedes benutzte Axiom, die Gerade sei die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten, ausdrücklich anführen, später den Satz umständlich bewiesen, daß im Dreieck die Summe zweier Seiten größer als die dritte ist. Warum? Weil Euklid, der jenes Axiom nicht hat, den Satz tatsächlich beweisen muß. Wie sagt doch Lessing?

„Es ist doch sonderbar bestellt,"
Sprach Hänschen schlau zu Vetter Fritzen,
„Daß nur die Reichen in der Welt
Das meiste Geld besitzen."

Zum Schluß noch eine Frage von Wichtigkeit. Soll man zu einem Lehrsatz einen und nur einen Beweis geben oder soll man auch mehrere zulassen? Es wird nicht zweifelhaft sein, wie wir uns zu dieser Meinungsverschiedenheit stellen. Je mehr verschiedene Beweise die Schüler finden, um so besser ist es. Freilich werden wir uns nachher im Skelett vielleicht auf einen beschränken, nicht ohne die verschiedenen zur Sprache gekommenen Beweise zu diskutieren und den besten auszuwählen. Eine solche Beurteilung verschiedener Beweise nach ihrer Einfachheit, Eleganz, Anschaulichkeit, Durchsichtigkeit ist immer sehr wertvoll. Spielt das doch auch in der Wissenschaft eine Rolle. Auch da ist man ja nicht zufrieden, wenn man glücklich

[1] H. Bensemann, Lehrbuch der ebenen Geometrie, Dessau (Baumann) 1892. Aus jüngster Zeit nenne ich zwei direkte Beweise: König, Beiträge zur Behandlung der Sätze vom Sehnenviereck und Tangentenviereck, ZmnU 53 (1922) S. 222 ff.

einen Beweis gefunden hat, sondern man sucht trotzdem noch nach neuen — ich erinnere nur an die Beweise für den Fundamentalsatz der Algebra, für den Gauß selbst im Laufe der Jahre vier Beweise gegeben hat.

Der Grund liegt natürlich tiefer. Wenn ich recht berichtet bin, hat Holzmüller das schöne Bild geprägt, daß die mathematischen Lehrsätze nicht eine Kette, sondern ein Netz bilden. Sieht man sich den Euklid an oder schlägt man einen Leitfaden auf, so kann man in der Tat zu der Anschauung kommen, der man bei Laien oft begegnet, daß ein Satz an einen anderen wie ein Glied der Kette an den vorhergehenden anschließt. Das hat denn auch vielfach zu der Ansicht geführt, daß „höhere Mathematik" nur der treiben könne, der die gesamte „Elementarmathematik" von Anfang bis Ende absolviert hat. Aber man braucht nur einmal irgendeinen Satz herauszugreifen — ich habe es gelegentlich mit dem pythagoreischen Lehrsatz in einem Bändchen der Mathematischen Bibliothek so getan — und man findet an Stelle der zwei Fäden nach allen Seiten ein Gewebe von Beziehungen, die, wenn man ihnen nachgeht, den Satz in ganz verschiedenartigem Licht erscheinen lassen. An einem typischen Beispiel die Verbindung mit den verschiedensten Zweigen der Mathematik herzustellen, dabei die Geistesarbeit bekannter und unbekannter Entdecker zu beurteilen, ist auch ein Mittel, die Schüler logisch zu schulen und damit gleichzeitig ihr Interesse zu packen.

Ich muß diesen Abschnitt wie den vorhergehenden mit einem Hinweis auf die Philosophie schließen, diesmal nicht die Erkenntnistheorie, sondern die Logik. Was aber von diesem Standpunkt aus über den Beweis zu sagen ist, darauf wird ebenfalls im dritten Teilband einzugehen sein.

4. Die Lehre von den Geraden und Winkeln.

Ehe wir uns dem System der Planimetrie zuwenden, ist einer Bewegung zu gedenken, die in den letzten Jahren viel erörtert worden ist. Unabhängig von älteren Autoren in Deutschland und Österreich ist man in Italien auf den Gedanken gekommen, Planimetrie und Stereometrie von vornherein nebeneinander, nicht, wie es seit Euklid üblich, nacheinander zu bringen.[1] Diese Idee hat, sofern man sie vom systematischen Gesichtspunkt aus betrachtet, außerordentlich viel Verlockendes. In den Axiomensystemen berücksichtigt man ja ganz selbstverständlich gleich den Raum, und auch jene älteren Autoren, wie Bretschneider[2] in Deutschland, Frischauf[3] in Österreich, Meray[4] in Frankreich sind von der Systematik aus zu der Fusion, wie die Italiener diese Verschmelzung von Planimetrie und Stereometrie nennen, gekommen. Man kann aber auch gewisse psychologische Gründe ins Feld führen. Auch in der propädeutischen Geometrie gehen wir ja vom Raum aus und von da zu den ebenen Figuren. Wir leben im Raum, und deshalb

[1] Vgl. hierzu R. Schimmack, Über die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts, in Heft VII der deutschen IMUK-Berichte, Leipzig (Teubner) 1912. S. auch ZmnU 40 (1911) S. 569ff.

[2] C. A. Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie, Jena (Manke) 1844. Auch Johann Heinrich Traugott Müller führt in der Vorrede zu seinem 1844 erschienenen Lehrbuch der Geometrie Gründe für die Fusion an.

[3] Frischauf, Elemente der Geometrie, Leipzig (Teubner) 1877.

[4] Vgl. Anm. 1, S. 87.

sollten uns, was die experimentelle Psychologie zu bestätigen scheint[1], die ebenen Figuren, zu deren Begreifen ein größerer Grad von Abstraktion nötig ist, schwerer fallen als die räumlichen.

In den höheren Schulen Italiens sind nun tatsächlich praktische Versuche mit der Fusion gemacht worden. Das älteste wirklich im Unterricht benutzte Schulbuch dieser Art ist wohl R. de Paolis, Elementi di geometria, Torino 1884. Bekannter ist uns in Deutschland das Buch G. Lazzeri e A. Bassani, Elementi di geometria, 2. Ed., Livorno 1898, geworden, da uns Treutlein eine ausgezeichnete Übersetzung des Werkes gegeben hat, die übrigens in den Figuren gegenüber dem Original sehr verbessert ist; G. Lazzeri und A. Bassani, Elemente der Geometrie, deutsche Übersetzung von P. Treutlein, Leipzig, Teubner, 1911.

Die Begeisterung in Italien ging so weit, daß man, wenn auch nicht gleich die Lehrpläne änderte, so doch auf ein Votum der italienischen Vereinigung *Mathesis* hin ausdrücklich freistellte, die Fusion statt der im Lehrplan vorgeschriebenen Trennung von Planimetrie und Stereometrie zu befolgen. Nicht wenige Lehrbücher gaben in ihren Vorreden genaue Anweisungen, in welcher Reihe man die einzelnen Kapitel aufeinander folgen lassen müsse, wenn man die Fusion annehme. Man ist aber wieder ganz davon abgekommen; jene amtliche Freigabe ist ein Jahr später zurückgezogen worden. Das Lehrbuch von Lazzeri war nicht aus dem Unterricht der höheren Schulen erwachsen, sondern in der Marineschule in Livorno. In jener schon früher erwähnten Aussprache der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission in Mailand, die sich auch mit der Fusion beschäftigte, kam deutlich zutage, daß die Begeisterung für die Fusion in den Kreisen der italienischen Schulmänner fast gänzlich geschwunden war. Nicht nur, daß d'Ovidio und Veronese sich sehr skeptisch äußerten, Lazzeri selbst sah die Lage der Fusionsbestrebungen recht pessimistisch an.

Meiner Ansicht nach ist das nicht überraschend. Man sehe sich nur einmal das Buch von Lazzeri und Bassani genauer nach der pädagogischen Seite hin an. Es mag ja sein, daß dem Kinde einfache Körper näher liegen als einfache ebene Figuren, daß Würfel oder Kugel ihm mehr bedeuten als ein Dreieck. Aber das wird doch keiner bestreiten, daß die Abstraktionen, die beim Erfassen des Begriffes Ebene, erst recht der Beziehungen zwischen Ebene und Gerade, notwendig sind, dem Schüler nicht gelingen werden, der erfahrungsgemäß schon bei der Lehre von den Geraden in der Ebene kaum mitwill. Und ganz sicher spielt auch der Umstand, daß man ebenen Gebilden mit der Zeichnung viel leichter nachgehen kann als räumlichen Gebilden mit dem Modell, eine ganz wesentliche Rolle. So ist also die auf den ersten Blick als ein Widerspruch erscheinende Forderung, in der Propädeutik die Fusion durchzuführen, in der systematischen Geometrie aber nicht, tatsächlich ganz erklärlich. Die Propädeutik hat es eben immer mit begrenzten Gebilden, noch dazu von besonders einfacher Form zu tun, eine systematisch die Stereometrie berücksichtigende Geometrie muß aber auch die unbegrenzten Gebilde heranziehen, wenn anders sie die Grundbegriffe auch nur einigermaßen klären will.

[1] Vgl. hierzu den Abschnitt: Die Entwicklung der Raumvorstellung beim Kinde in D. Katz, Psychologie und mathematischer Unterricht, Deutsche IMUK-Abh. III, 8, Leipzig (Teubner) 1913.

Und doch, glaube ich, steckt in dieser Fusionsbewegung ein wahrer Kern.[1] Es ist eine gar nicht abzuleugnende Tatsache, die Schüler verlernen geradezu in der jahrelang ausschließlich betriebenen Planimetrie, räumlich zu sehen. Ihre Sinne sind so ausschließlich auf ebene Figuren gerichtet, daß ihnen räumliche Gebilde fast fremd geworden sind. Man mache einmal den Versuch, einen Quer- und einen Längsschnitt durch ganz einfache Körper, wie sie etwa an physikalischen Apparaten auftreten, zeichnen zu lassen. Ein Untersekundaner, der den Querschnitt eines mit zwei Messingbelägen versehenen Holzzylinders am Ritchie-Motor angeben sollte, entwarf die nebenstehende Figur!

Fig. 24.

Dazu kommt nun noch das folgende: Nach den Lehrplänen von 1901 hört der Gymnasiast in Preußen von der Stereometrie erst in Obersekunda oder Prima etwas. Hat er das Unglück — und manchmal die Schule das Glück —, daß er vorher abgeht, so erfährt er also, von den Kleinigkeiten im propädeutischen Unterricht abgesehen, rein gar nichts von der Stereometrie und steht insofern jedem Volksschüler in bedenklicher Weise nach.

Wenn wir Planimetrie mit offenen Augen für die Wirklichkeit treiben, so müssen wir erfahren, daß die ebenen Gebilde an räumlichen auftreten, auf ihrer Oberfläche oder als ebene Schnitte. Und da heißt es eingreifen. Wir sollen uns in der Tat ruhig zunächst mit Planimetrie beschäftigen, mit den Eigenschaften ebener Figuren. Wir sollen aber nicht nur immer an der Wandtafel und im Heft malen, sondern auch einmal Schnitte durch einfache Körper legen, Strecken und Flächen, die auf der Oberfläche und im Innern von Körpern liegen, berechnen, auch einmal eine ebene Figur rotieren lassen, und was dergleichen Aufgaben mehr sind. Im übrigen läßt sich erwägen, ob man die Berechnung einfacher prismatischer Körper nicht schon im Anschluß an die zugehörigen Flächen vornimmt. Alles in allem: Ich möchte mit meinen Bemerkungen einer gemäßigten Fusion, die sich nicht so sehr im Lehrsatzsystem als in den geometrischen Aufgaben zeigt, das Wort reden.

Ich will noch einem häufigen Mißverständnis begegnen. Die Fähigkeit räumlicher Anschauung wird häufig gleichgesetzt der Fähigkeit, ebene Figuren von räumlichen Gebilden zu entwerfen. Das ist grundfalsch. Es ist einwandfrei festgestellt, daß das Verständnis und die Fähigkeit zur Herstellung perspektivischer Zeichnungen von räumlichen Gebilden erst verhältnismäßig spät erwacht, gleichgültig, ob man an die Frage von der Entwicklung des einzelnen Menschen oder derjenigen des Menschengeschlechtes überhaupt herangeht.[2] Als ein Maß für die räumliche

[1] Eine Darstellung der Fusion gibt J. Schacht, Die methodische Verbindung der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie zu einer einheitlichen Raumlehre, Programm Königl. Marien-Gymnasium, Posen 1908. Für die Fusion hat sich auch A. Schülke ausgesprochen, vgl. Schriften der Phys.-Ökonom. Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. 49 (1908), siehe auch ZmnU 39 (1908), S. 442.

[2] Die Auswertung des biogenetischen Grundgesetzes für den mathematischen Unterricht behandelt B. Branford, A Study of Mathematical Education, 2. Ed. Oxford (Clarendon Press) 1921; deutsche Ausgabe von R. Schimmack und H. Weinreich unter dem Titel: Betrachtungen über mathematische Beziehung vom Kindergarten bis zur Universität, Leipzig, Teubner, 1913.

Auffassungsgabe ist also keinesfalls das Entwerfen ebener Zeichnungen von räumlichen Gebilden anzusehen. Ausdrücklich habe ich deshalb auch im vorhergehenden nur von Flächen am Körper, von Schnitten durch den Körper gesprochen, nicht von irgendwelchen perspektivischen Darstellungen.

An der Spitze der Planimetrie pflegt ein Kapitel „Gerade und Winkel" zu stehen. So wichtig diese Gebilde für eine strenge Axiomatik sind, im Unterricht fällt die Mehrzahl der hier zur Diskussion stehenden Fragen in den Bereich der noch nicht streng gehandhabten Geometrie. Die Propädeutik soll, wenn sie ihre Pflicht getan hat, im Schüler die Begriffe Gerade, Strahl, Strecke, Winkel geklärt haben. Eine Definition für Gerade verwerfen wir. Der Strahl ist ein einseitig begrenztes Stück einer Geraden, die Strecke ein beiderseitig begrenztes Stück einer Geraden. Über die Definition des Winkels sprachen wir schon.

Der Schnitt zweier Geraden führt auf die Begriffe Neben- und Scheitelwinkel. Da man über deren Größe eine Aussage macht, muß aus der Praxis des propädeutischen Unterrichtes her die Methode zur Messung von Winkeln bekannt sein, wobei man gleich die Addition und Subtraktion von Winkeln mitbehandelt. Alles das macht nach einem genügenden propädeutischen Vorkurs gar keine Schwierigkeiten. Man kommt noch ganz ohne Beweise aus. Ich würde sogar raten, davon abzusehen, bei der Erörterung des Satzes über Scheitelwinkel, der zumeist auf den Nebenwinkelsatz zurückgeführt, besser aber durch Drehung einer Geraden um einen ihrer Punkte aufgezeigt wird, ausdrücklich von einem Beweis zu sprechen. Die Abhängigkeit von Nebenwinkeln, von Scheitelwinkeln untersucht der Schüler auch mit Hilfe eines leicht zu bauenden Modelles. Auch die tabellarische Festlegung dieser Abhängigkeit ist zu empfehlen.

Mit der Parallelenlehre beginnt die Schwierigkeit. Man hat ja die mannigfaltigsten Versuche gemacht, diese Parallelenlehre möglichst weit hinauszuschieben. Man braucht sie zum ersten Male bei dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck. Schon Euklid schaltet deshalb die Parallelenlehre kurz vor diesem Satz in die Dreieckslehre ein, und viele sind ihm gefolgt. Andere sind noch weiter gegangen und haben den von uns erwähnten Thibautschen „Beweis" benutzt, um die Parallelen in der Dreieckslehre ganz entbehrlich zu machen. Mit dieser Galgenfrist ist nun freilich nicht allzu viel gewonnen, denn kurze Zeit später, bei den Parallelogrammen, braucht man die Parallelen doch. Was aber schlimmer ist, es handelt sich um eine Verschleierung der tatsächlichen Verhältnisse. Wollte man ehrlich sein, so müßte man den Dreieckswinkelsatz als Axiom aussprechen, nachdem man ihn — was freilich nicht unbedenklich ist — aus der Erfahrung abstrahiert hat, und man könnte nachher das Parallelenaxiom beweisen. Die Bücher, die den Thibautschen „Beweis" als vollgültig zu betrachten scheinen, tun das im allgemeinen nicht; ich vermute bei einzelnen, weil sie über die Sachlage nicht ganz unterrichtet sind. In der Tat haben nun auch Killing und Hovestadt[1] in wissenschaftlich einwandfreier und pädagogisch durchaus brauchbarer Weise die Parallelenlehre so entwickelt, daß sie den Satz von der Summe der Dreieckswinkel an die Spitze setzten. Köhler[2],

[1] W. Killing und H. Hovestadt, Handbuch des mathematischen Unterrichts I. Bd. Leipzig (Teubner) 1910 S. 259ff.

[2] A. Köhler, Methodischer Führer und Ratgeber für den mathematischen Unterricht, 3 Teile, Stettin (Fischer und Schmidt) 1919/20, II. Teil S. 21ff.

der sich mit dem hier von mir entwickelten Vorschlag in seinem „Ratgeber" ausführlich auseinandersetzt, will trotz allem diesen Satz nicht wie Killing und Hovestadt als Axiom, sondern als nach Thibaut bewiesenen Satz an die Spitze setzen.

Es handelt sich bei der Parallelenlehre um vier Dinge, (1) um die Definition der Parallelen, (2) um die Tatsache, daß durch einen Punkt zu einer Geraden nur eine Parallele möglich ist, (3) daß, wenn zwei parallele Geraden von einer dritten geschnitten werden, gleiche Gegen-, Wechsel- und zu zwei Rechten sich ergänzende entgegengesetztliegende Winkel — andere sagen mit Einschränkung des Begriffes Innenwinkel — entstehen; (4) daß zwei Geraden, die von einer dritten Geraden so geschnitten werden, daß gleiche Gegenwinkel usw. entstehen, parallel sind.

In Parenthese bemerke ich, daß man praktisch mit den Gegen- und Wechselwinkeln auskommt, daß außerdem die dritte Gruppe, über deren Namen die Ansichten besonders weit auseinanderklaffen, nicht alle noch übrigen Fälle ausschöpft.

Zunächst die Definition der Parallelen. Darin werden mir wohl alle recht geben, daß man eine Definition, die Parallelen schneiden sich im Unendlichen, jedenfalls in der Quarta unterlassen sollte. Mit solchen Dingen, über die die Erwachsenen noch zu grübeln pflegen, wie es denn komme, daß dann nicht zwei Schnitte im Unendlichen vorhanden seien, einer rechts und einer links, soll man nicht unseren Anfängern kommen. Wenn, wie Gauß es einmal in einem Brief an Schumacher ausdrückt, das Unendliche eine „façon de parler" ist, so möchte ich den Lehrer sehen, der das seinen Quartanern klar macht.

So nennt man also zwei Geraden parallel, die sich nicht schneiden. Diese Definition ist vielfach angegriffen worden. Man kann, genau genommen, über die Parallelität zweier Geraden erst entscheiden, wenn man ihren ganzen Verlauf übersieht, und der ist uns nicht zugänglich. Ich glaube nun freilich, daß sich der Schüler darüber gar keine Gedanken macht, wenn man ihn nicht darauf stößt. Ein für Mathematik von früh auf sehr begabter Studienbekannter klagte mir einmal, es wurme ihn noch heute, daß er im Unterricht, trotz aller sonstigen Kritik an anderen Stellen der Mathematik, gerade hier nicht darauf verfallen wäre, eine Schwierigkeit zu sehen.

Immerhin haben die theoretischen Bedenken der Lehrer Anlaß gegeben, nach anderen Definitionen zu suchen. Man kann solche Definitionen aus der Praxis nehmen. Einmal heißen zwei Geraden dann parallel, wenn sie überall den gleichen Abstand haben, — so ist es bei den Eisenbahnschienen — oder aber wenn die eine aus der anderen durch Verschiebung eines Winkels längs eines Schenkels entstanden ist — das ist die Definition des Zeichners. Italienische Schulbücher, z. B. das von Veronese, bevorzugen eine andere Definition, die nichts anderes ist, als die Eigenschaft zweier Parallelen, in bezug auf einen Punkt, der irgendeine die Parallelen schneidende Gerade halbiert, zentralsymmetrisch zu liegen.

Wir kommen zu der zweiten Tatsache, daß durch einen Punkt zu einer Geraden nur eine Parallele möglich ist. Das ist ein Axiom, das man mit der Definition von oben eng verbinden wird. Daß der Unterricht oder ein Lehrbuch einen „Beweis" des Parallelenaxioms versucht, wird heute wohl ausgeschlossen sein. Es ist nicht

[1] An Stelle der oben genannten sind zahlreiche andere Namen vorgeschlagen worden, worüber man die letzten Jahrgänge der ZmnU und der Ubl nachlesen möge. Irgendeine Einheitlichkeit ist dabei nicht herausgesprungen.

gerade erfreulich, wenn wir in einer amerikanischen Geschichte der Elementarmathematik[1] aufgezeichnet finden: In H. B. Lübsen, Elementar-Math. 14. Ausg. Lz. 1870 „written in the country which produced Gauß, and at a time when Lobatchewsky's and Bolyai's immortel works had been published 41 and 37 years respectively, we still find (pg. 52) a proof of the parallel-postulate!"

Die Aussagen 3 und 4 schließlich stehen offensichtlich im Verhältnis von Satz und Umkehrung; wenn eine bewiesen, läßt sich die zweite unter Zuhilfenahme der Aussage 2 indirekt beweisen. Alle diese Beweise selbst sind aber für diese Klassenstufe recht wenig geeignet.[2] Wo sie in Lehrbüchern geführt werden, findet sich nicht selten die Bemerkung: „Dieser Beweis kann bei der ersten Durchnahme übergangen werden."

Mein Rat ist sehr radikal: Man lasse den Inbegriff aller vier Aussagen in dem Bereich, in dem wir Definitionen und Beweise noch nicht fordern. Der logische Zusammenhang der verschiedenen Aussagen ist so schwierig, daß der Quartaner ihn noch nicht vollständig durchschaut. Allenfalls könnte er den indirekten Beweis begreifen; aber kaum ein Satz ist so wenig geeignet, als erster den Sinn des indirekten Beweises zu erklären, als gerade dieser. Wir tun viel besser, den Schüler aus der Anschauung den Begriff paralleler Geraden abstrahieren zu lassen und von ihnen drei Eigenschaften festzustellen: (1) daß sie überall gleichen Abstand haben, also sich nicht schneiden; (2) daß man durch einen Punkt zu einer Geraden nur eine Parallele ziehen kann; (3) daß beim Schnitt zweier Parallelen mit einer dritten Geraden gleiche Gegenwinkel entstehen und umgekehrt.

Alle drei Aussagen lassen sich ungezwungen der Anschauung entnehmen, sind durch Messung leicht zu prüfen, werden auch ganz sicher nicht vom Schüler angezweifelt werden. Daß mit den Gegenwinkeln auch die Wechselwinkel gleich sind, und daß die entgegengesetzt liegenden Winkel sich zu zwei Rechten ergänzen, kann man leicht unter Heranziehung der Sätze von den Neben- und Scheitelwinkeln beweisen. Ich ziehe es vor, hier noch nicht von „beweisen" zu sprechen, sondern das Ergebnis „ausrechnen" zulassen.

Ich möchte aber doch noch ausdrücklich hervorheben, daß wir mit diesem Durchhauen des gordischen Knotens durchaus nicht Fehler gegen eine strenge Mathematik begehen. Nur insofern sündigen wir, als wir auf die Unabhängigkeit der von uns als Axiom zugelassenen Aussagen verzichten und ferner auf den Nachweis, daß die drei Aussagen nicht in Widerspruch stehen. Diese beiden Forderungen erfüllen wir aber an anderen Stellen der Grundlagen auch nicht. Ja man kann sogar hinzufügen: Die Wissenschaft ist zwar an dieser Stelle über Unabhängigkeit und Widerspruchslosigkeit durchaus im Reinen. Es steht aber auch für sie nicht an allen anderen Stellen der axiomatischen Grundlegung gleich gut.

Es steht dem übrigens nichts im Wege, an einer späteren Stelle, am besten im Zusammenhange mit der von uns empfohlenen Erörterung der Grundlagen in Prima, auf die Parallelenlehre zurückzugreifen. Freilich, daß man dort die Frage irgendwie

[1] Fl. Cajori, A History of elementary Mathematics, New York (Macmillan) 1907.
[2] Dieck bringt in seiner Methodik den Bertrandschen, die Zentralsymmetrie eines Parallelenpaares heranziehenden Beweis in Vorschlag.

erschöpfend wird behandeln können, was nur mit einem Eingehen auf nichteuklidische Geometrien geschehen könnte, glaube ich nicht; wir sprachen schon oben (S. 102) davon.

5. Dreieck, Viereck und Kreis.

Das System der Planimetrie wendet sich, wenn die Begriffe Gerade und Winkel genügend geklärt sind, einigen einfachen Figuren zu, Dreieck, Viereck, Vieleck, Kreis. Die Eigenschaft, um die es sich vorderhand handelt, ist in erster Linie die Kongruenz, also das, was bei starrer Bewegung der Gebilde invariant bleibt. Im Vordergrund steht nicht so sehr eine Vergleichung verschiedener Formen, als die Untersuchung der einfachsten geometrischen Gebilde hinsichtlich der Seiten, Winkel, Diagonalen, der Wechselbeziehungen zwischen verschiedenen solchen Gebilden u. dgl. mehr.

In der Dreieckslehre werden zunächst die Eigenschaften der Seiten und Winkel untersucht, die Kongruenzsätze werden abgeleitet, die merkwürdigen Punkte — die Schnittpunkte der drei Höhen, der drei Mittelsenkrechten, der drei Mittellinien oder Seitenhalbierenden, der drei Winkelhalbierenden — erörtert.

Wir hatten schon früher die Tatsache gestreift, daß vielfach die Parallelenlehre in die Dreieckslehre eingeschoben wird, damit man nicht gezwungen ist, sie an die Spitze des Planimetrieunterrichtes zu setzen. Wenn, wie vorgeschlagen, die Parallelenlehre rein anschaulich behandelt wird, kann man sie wohl vor der Dreieckslehre erledigen. Dann beginnt man aber, was systematisch große Vorteile bietet, beim Dreieck mit dem Winkelsatz, läßt die Sätze über die zwischen den Seiten bestehenden Ungleichheiten folgen und wendet sich schließlich den Kongruenzsätzen zu.

Die Kongruenzsätze sind in der methodischen Literatur viel behandelt worden. Man kann sich auf den praktischen Standpunkt stellen, der bei Euklid fehlende vierte Kongruenzsatz, dessen Beweis erfahrungsgemäß den Schülern am schwersten fällt, sei für das allgemeine Dreieck überflüssig, da er eigentlich nur bei rechtwinkligen Dreiecken gebraucht werde. Man kann andererseits, die Systematik stark betonend, die Ansicht vertreten, daß die Zahl unserer Kongruenzsätze unvollständig wäre, wenn nicht alle überhaupt möglichen Fälle der Kongruenz von Dreiecken vollkommen ausgeschöpft würden. Auch über die Reihenfolge der Kongruenzsätze ist hier und da gestritten worden, was deshalb nicht ganz unwichtig ist, weil gewöhnlich die verschiedenen Fälle als 1., 2. usw. Kongruenzsatz unterschieden werden. Thieme zählt 5 Kongruenzsätze. Eine kurze, eindeutige Bezeichnung scheint sich neuerdings mehr einzubürgern, man kennzeichnet den ersten Kongruenzsatz mit *s w s*, den zweiten mit *w s w* oder *s w w*, den dritten mit *s s s* usf.

Zur Bezeichnung der Kongruenz ist das Zeichen $\cong$ allgemein gebräuchlich. Man soll aber unbedingt darauf achten, daß die Punkte beiderseits des Zeichens so angeordnet werden, daß homologe Stücke entsprechende Stelle haben. Es ist also $\triangle ABC \cong \triangle ACB$ nur dann, wenn das Dreieck gleichschenkelig mit der Spitze A ist.

Der Beweis der Kongruenzsätze erfolgt in der Regel so, daß ein Dreieck auf oder symmetrisch an das andere Dreieck gelegt wird. Andere verzichten auf einen solchen Bewegungsbeweis und erschließen die Sätze aus der praktischen Eindeutig-

keit der entsprechenden Konstruktionsaufgaben. Beides hat seine Vorzüge. Dagegen ist in Quarta das Vorgehen des Systematikers abzulehnen, der den ersten Kongruenzsatz oder eine Teilaussage davon axiomatisch festlegt oder durch Bewegung beweist und dann bei den übrigen Beweisen die Bewegung verdammt.

Zu der Frage, ob schon an dieser Stelle die Sätze über die merkwürdigen Punkte des Dreiecks eingeschaltet werden sollen, kann man sich verschieden stellen. Dem Quartaner wird allerdings als eine „merkwürdige" Tatsache erscheinen, was später, etwa vom Standpunkt der Ähnlichkeitslehre aus, ganz natürlich ist. Wenn, wie an Gymnasien, Mangel an Zeit ist, kann man jedenfalls hier zuerst kürzen. Es verschlägt meines Erachtens auch nichts, wenn man den Schüler bei den dankbaren Anwendungen der Fundamentalkonstruktionen auf das Dreieck die Tatsachen empirisch finden läßt und ihn hinsichtlich ihrer Beweise auf später vertröstet.

Nach dem Dreieck wird in einer gewissen Vollständigkeit noch das Viereck behandelt; ist es auch nicht, wie das Dreieck, gewissermaßen der Baustein, aus dem alle geradlinigen geschlossenen Figuren aufgebaut sind, so haben doch besondere Viereckformen ihre ausgezeichneten Eigenschaften, die sie in der Praxis ebenso wie in der Theorie (Flächenlehre) vor anderen Figuren hervortreten lassen. Hier steht im Vordergrund die Frage, wie man die Welt der verschiedenen Viereckformen in eine vollständige und befriedigende Systematik faßt. Der Schüler lernt an diesem Musterbeispiel eine Mannigfaltigkeit von Dingen nach den verschiedensten Einteilungsprinzipien gliedern. Auf eine durchsichtige Disposition ist hier besonderer Wert zu legen.[1] Die Bezeichnung der Vierecke war bei Euklid anders als sie bei uns üblich ist. Euklids Namengebung wirkt aber noch in der Raumlehre der Volksschulen nach. Man bevorzugt heute eine Schachtelung der Begriffe, so daß also das Quadrat ein Rechteck, das Rechteck ein Parallelogramm ist usf.

Auf die Viereckslehre folgt die Lehre vom Kreis.[2] Aus der Erörterung der Lage eines Punktes, einer Geraden, eines Winkels zum Kreis ergeben sich mannigfaltige Sätze, denen sich dann Untersuchungen über In-, An- und Umkreise von Dreiecken, Vierecken und regelmäßigen Vielecken anschließen. Der Komplex der Sätze ist hier ziemlich feststehend. Nur in der Frage, wie weit man schon an dieser Stelle geht, ob man z. B. den Feuerbachschen Kreis schon einbezieht, können Zweifel bestehen. Fraglich könnte es auch sein, ob die Diskussion der Ankreise am Dreieck, die den Ausgangspunkt für alle die *s*-Formeln bildet — wo *s* der halbe Dreiecksumfang ist —, wirklich nötig ist. Doch kann die Heronische Dreiecksformel, die hier ihre ersten Ursprünge hat, wohl eine Behandlung dieser Dinge erwünscht erscheinen lassen. Nur greife man dann nicht einige bestimmte Strecken heraus, sondern zeige, daß man in der Figur, die vom Dreiseit, den drei Ankreisen und dem Inkreise gebildet wird, alle auf den Seiten entstehenden Abschnitte hinsichtlich ihrer Länge voll-

[1] Ich verweise auf folgende Arbeiten: W. Weber, Zur Geometrie des einfachen Vierecks ZmnU 47 (1916) S. 495ff. und Archiv der Mathematik und Physik III 25 (1916) S. 17ff; F. Pugehl, Die Behandlung der Viereckslehre ZmnU 48 (1917) S. 49ff. u. 95ff.; Gottschalk, zur Gruppierung der Vierecke, ZmnU 53 (1922).

[2] O. Schlömilch, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maßes, 1. Teil 5. A., 2. Teil 3. A., Leipzig (Teubner) 1874 — einst auch als Schulbuch benutzt — behandelt abweichend hiervon erst die geradlinigen Gebilde bis hin zur Ähnlichkeitslehre, dann erst den Kreis.

kommen beherrscht und allein durch die Seiten des Dreiecks in einfacher Weise ausdrücken kann.[1]

Bei der Ableitung der Lehrsätze und überhaupt bei der Untersuchung der Gebilde verdienen zunächst die verschiedenen Möglichkeiten starrer Bewegung größte Beachtung. Ausgiebig verwendet wird nun schon seit langer Zeit die axiale Symmetrie; man spricht von axialer Symmetrie, wenn ein Teil einer ebenen Figur durch ein Umklappen, d. h. durch eine Rotation von 180^0 um eine in der Ebene der Zeichnung gelegene Gerade als Axe, oder auch durch Spiegelung mit dem anderen Teil zur Deckung gebracht werden kann.[2] Es ist ja bekannt, daß sich z. B. die vier Grundkonstruktionen (das Halbieren von Strecke und Winkel, das Fällen und Errichten von Senkrechten) mit Hilfe der axialen Symmetrie erledigen lassen, wobei dann ein Rhombus mitspielt, an dessen Stelle M. Heinrich[3] jüngst eine verwandte Figur, den „Zweikreis", gesetzt hat. Es ist sehr anzuraten, sich bei diesen Fundamentalkonstruktionen, damit die Eigenschaften der axialen Symmetrie stärker hervortreten, nicht mit den zur Feststellung der Schnitte nötigen Kreisbögen zu begnügen, sondern die ganzen Kreise auszuziehen. Auch ist es dringend anzuraten, die Umklappung wirklich vorzunehmen und nun die Symmetrie dadurch zu zeigen, daß man die Kreisbögen mit der Stecknadel durchsticht. Alles für die axiale Symmetrie Wichtige — nämlich die wechselseitige Beziehung zwischen der Methode des wirklichen Umklappens und Abklatschens und deren Ersatz durch ebene Konstruktion — ist, worauf Witting hingewiesen, an der nebenstehenden Figur abzulesen, die man am besten einer die Schüler immer erfreuenden Klexographie einverleibt.

Fig. 25.

Welche Rolle die axiale Symmetrie in der Dreieckslehre spielt, ist schon früh erkannt worden. Ich verweise z. B. auf einen 1871 erschienenen Artikel von Fresenius über die Kongruenzsätze.[4] Einen recht anschaulichen Vergleich zwischen Dreieckslehre mit und ohne Symmetrie hat man in der Bearbeitung des Mehlerschen Leitfadens durch Schulte-Tigges, wo dieses Kapitel auf zwei Weisen unabhängig voneinander dargestellt ist.

In der Kreislehre hat die axiale Sym-

[1] Ich nenne hier R. Schröder, Das Dreieck und seine Berührungskreise, Jahresbericht der Oberrealschule Groß-Lichterfelde, Ostern 1909.

[2] Über die axiomatische Grundlegung vgl. die S. 88 Anm. 1 genannte Arbeit von H. Willers.

[3] M. Heinrich, Vereinfachter Gang des Anfangsunterrichts in der Planimetrie, analytischen Geometrie und Trigonometrie, Programm Königl. Luisen-Gymnasium, Berlin, Ostern 1911.

[4] Fresenius, Die Lehre von der Kongruenz der Dreiecke und Zugehöriges in eine neue Fassung gebracht. ZmnU 2 (1871) S. 1 ff.

metrie merkwürdigerweise weniger Anklang gefunden, und doch läßt die Symmetrie der aus Kreis und Sehne, Kreis und Tangente, Kreis und Tangentenpaar, Kreis und Kreis gebildeten Figur jeweils eine Fülle verschiedener Sätze einheitlich zusammenfassen.[1]

Weniger häufig als die axiale ist, wenigstens in den Anfangsgründen, die zentrale Symmetrie anzutreffen. Hier handelt es sich[2] um die Drehung der Figur um einen ihrer Punkte in der Ebene selbst um 180°. Die zentrale Symmetrie spielt eine sehr wesentliche Rolle beim Parallelogramm. Damit beide Arten der Symmetrie auseinandergehalten werden, möge man dem Schüler die Aufgabe stellen, eine Anzahl ihm geläufiger Figuren auf ihre Symmetrieverhältnisse und die Art dieser Symmetrie zu untersuchen, etwa die großen lateinischen Buchstaben und die arabischen Ziffern.[3] Er freut sich, wenn er auch axialsymmetrische Worte vorbringen kann, wobei die Symmetrieachse manchmal der Zeile parallel, manchmal senkrecht zu ihr liegt. Dann wird ihn auch die bei dem Schnitt zweier Parallelen durch eine Gerade auftretende zentrale Symmetrie nicht mehr so fremd anmuten, wie es der Fall ist, wenn man nicht für genügende Vorübung gesorgt hat. Manche Methodiker, z. B. Schuster, haben die Sätze über das Parallelogramm für zu schwer für die Schüler gehalten, wenn sie in üblicher Weise durch die Kongruenz von Dreiecken bewiesen werden. Ist jene Zentralsymmetrie bei geschnittenen Parallelen klar erfaßt, so machen diese Sätze gar keine Schwierigkeit, man braucht eben nur Kongruenzbegriff und tatsächlich ausgeführte Drehung der Hilfsdreiecke Hand in Hand gehen zu lassen.

Bei dieser Gelegenheit mag eine Bemerkung zu den Lehrsätzen vom Parallelogramm gemacht werden. Bei den Beweisen wird, wie eben gesagt, immer mit den kongruenten Dreiecken gearbeitet, die von den Diagonalen mit den Seiten gebildet werden. Da diese Dreiecke mehrfach gebraucht werden, machen es einige Lehrbücher, z. B. der Lackemannsche Leitfaden, so, daß sie über die Kongruenz dieser Dreiecke Lehrsätze aussprechen und dann die Lehrsätze über die Winkel, Seiten und Diagonalen als Folgerungen, womöglich kleiner gedruckt als jene ersten Sätze, anfügen. Das heißt ein bloßes Hilfsmittel zur Hauptsache machen bloß deshalb, weil es mehrmals gebraucht wird. Jene Dreieckskongruenzen gehen uns gar nichts an, um so mehr die Eigenschaften der Seiten, Winkel und Diagonalen im Parallelogramm. Also bringe man das auch in dem Aufbau des Satzsystems zum Ausdruck. Und noch eins. Wer sich, wie eben, von einer falschen Ökonomie des Beweisapparates bestimmen läßt, der wird auch geneigt sein, den Satz von der Gleichheit der Gegenwinkel im Parallelogramm auf die kongruenten Dreiecke zurückzuführen, da er dieses Beweismittel ja dick gedruckt vor sich sieht. Dem inneren Wesen der Sache liegt aber der Beweis viel näher, der sich unmittelbar auf die Parallelenlehre stützt und die Tatsache benutzt, daß zwei Gegenwinkel von einem und demselben dritten Winkel des Parallelogramms zu zwei Rechten ergänzt werden. Frei-

[1] Vgl. meinen Leitfaden der Mathematik.

[2] Andere fassen den Begriff der zentrischen Symmetrie anders; sie sprechen von ihr, wenn sich zwei oder mehr Symmetrieachsen in einem Punkte schneiden. Nach dieser Auffassung ist das gleichseitige Dreieck zentrisch symmetrisch, nach der oben vertretenen nicht. Eine Einigung über die Bezeichnungsweise wäre erwünscht.

[3] Das kann, wie wir erwähnten, auch schon in der Propädeutik geschehen.

lich spielt in allen solchen Dingen das mathematische Gefühl eine Rolle, das sich so leicht nicht in Regeln fassen läßt.

Bei der axialen und bei der zentralen Symmetrie handelt es sich beide Male um Drehungen, die gerade 180° betragen. Man darf nun keinesfalls bei diesen besonderen Fällen stehen bleiben, soll vielmehr auch Figuren und Teile von ihnen, sei es in der Ebene um Punkte dieser Ebene, sei es im Raum um Geraden, um beliebige Winkel drehen. Für den Pol der Drehung im ersten, für die Drehungsachse im zweiten Fall nimmt man natürlich den verschiedenen Verhältnissen entsprechend wechselnde Lage. — Welche Rolle spielen nicht später bei Beweisen in der Flächenlehre Drehungen um irgendeinen Winkel, wobei übrigens wieder der Rechte bevorzugt ist? Dreht man eine ebene Figur um eine ihrer Seiten, so fällt die neue Figur aus der Ebene heraus; die bei solcher Drehung entstehenden Körper sollte man schon in der Planimetrie betrachten. Umgekehrt sind bei Rotationskörpern einfache Schnitte aufzusuchen. Das ist eine praktisch wertvolle und in Mittelklassen leicht durchführbare Verschmelzung ebener und räumlicher Geometrie. Die Erzeugung von ebenen Flächen durch bewegte Geraden, von Körpern durch bewegte Flächen, hat eine methodisch gut durchdachte Raumlehre von Engel (S. 67 Anm. 3), die sich allerdings wohl kaum durchsetzen wird, grundsätzlich als Einteilungsprinzip des Stoffganzen benutzt.

Auch die Verbindung nach der praktischen Mechanik hin liegt klar. Wer wird sich bei der Berührung zweier Kreise den Hinweis auf die Zahnräder, bei den gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise die Riemenübertragung ohne Ende entgehen lassen und dabei nicht auf den Drehungssinn der Kreise bei der Drehung eingehen — Unterschied bei der Wahl der äußeren und der inneren Tangenten! Man wird also gut tun, bei solchen Gelegenheiten schon den Drehungssinn festzulegen. Am häufigsten bezieht man sich ja auf die Uhrzeigerdrehung — man vermeide aber den schlechten Ausdruck „im Sinne des Uhrzeigers". Auf den Raum einzugehen, wo die Festlegung des Drehungssinnes nicht ganz so selbstverständlich ist (der Zoologe, der das Schneckenhaus beurteilt, und der Botaniker, der das Winden des Hopfens beschreibt, meinen beide mit „linksgewunden" ausgerechnet Verschiedenes), ist hier noch keine Veranlassung.[1]

Neben der Drehung ist von besonderer Bedeutung eine reine Verschiebung, etwa die Verschiebung einer Geraden längs einer Geraden, wie sie bei den Parallelen eine Rolle spielt. Beim Beweis von Lehrsätzen tritt diese Art der Bewegung etwas zurück — sie ist von Bedeutung z. B. bei der Flächenlehre, bekanntlich auch bei manchen Konstruktionsaufgaben. — Die Tatsache, daß eine beliebige Bewegung aus einer reinen Translation und einer reinen Rotation zusammengesetzt werden kann, darf nicht unerwähnt bleiben. In der Ebene reicht sogar immer eine reine Drehung aus, wenn ich die Verschiebung als Drehung um einen unendlich fernen Punkt der Ebene ansehe. Es gibt ein Lehrbuch[2], das schon beim Deckungsbeweis der Kongruenzsätze diese Tatsache heranbringt.

---

[1] Vgl. hierzu E. Study, Die Begriffe Links, Rechts, Windungssinn und Drehungssinn, Archiv d. Math. u. Phys. III 21 (1913) S. 193ff. und W. Müller, Links und Rechts, ZmnU 45 (1914) S. 58ff.

[2] G. Mahler, Ebene Geometrie, Sammlung Göschen, 41. Bd., 4. Aufl. 1905.

Bisher war nur von einer starren Bewegung der ganzen in Betracht kommenden Figur die Rede. Ebenso wichtig ist die Veränderung einzelner Teile; man denke nur an die sog. Inkongruenzsätze, die an einfachen Mechanismen zu zeigen sind, an die Änderung des Gesichtswinkels bei Annäherung und Entfernung eines Gegenstandes usf.

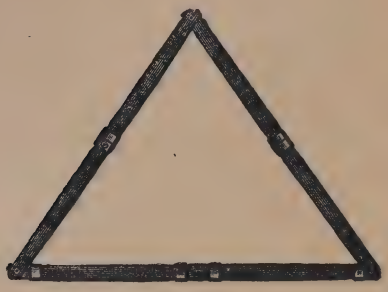


Fig. 26.
Dreieckiger beweglicher Rahmen. Durch Verstellen lassen sich die verschiedenartigsten Dreiecksformen veranschaulichen. Firma: Günzel, Kötzschenbroda.

Es ist kein Zweifel, daß es dem Anfänger gewisse Schwierigkeiten macht, irgendeinen an einer einzelnen Figur bewiesenen Lehrsatz als allgemeingültig zu erkennen. „In jedem Dreieck ..." oder einfacher: „Im Dreieck ..." — das sind unzureichend aufgefaßte Worte, wenn der Schüler nicht vermag, die verschiedenen Formen vor seinem geistigen Auge durchzugehen oder den beliebigen Stücken auch wirklich verschiedene Werte beizulegen. Die Mannigfaltigkeit der Formen, die durch Veränderung der Stücke entstehen, muß überschaut werden. Gewiß werden oft nicht alle Möglichkeiten durchdacht. Denn sonst hätte man nicht erst so spät, um ein klassisches Beispiel zu nennen, einseitige Flächen gefunden.

Sehr wertvoll ist eine stetige Änderung der Elemente einer Figur beim Übergang von einer geometrischen Figur zur anderen. Was kann man nicht allein mit dem zusammenklappbaren Metermaß des Zimmermannes zeigen; es ist eines der schönsten „Freihandmodelle": Den Übergang vom Parallelo-

Fig. 27.
Viereckiger beweglicher Rahmen. Firma: Günzel, Kötzschenbroda.

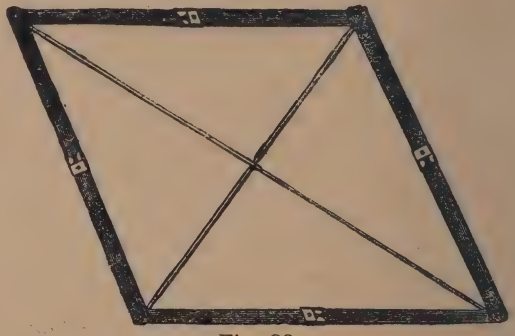


Fig. 28.
Viereckiger beweglicher Rahmen mit eingezogenen Diagonalen. Firma: Günzel, Kötzschenbroda.

gramm zum Rechteck, vom Rhombus zum Quadrat, vom Trapez zum Parallelogramm, vom Trapez zum Dreieck und vieles mehr.

Einen neuen, großen Fortschritt glaubte man mit der Dienstbarmachung des Kinematographen erreicht zu haben, handele es sich nun um einen wirklichen Kinematographen oder um ein einfaches Kinoheft in der Weise, wie es in den Mutoskopen benutzt wird. Man ist aber in dieser Hinsicht neuerdings skeptischer geworden. Gewiß ist es interessant, wenn sich der Schüler aus einer Folge von Zeichnungen, die er

am besten selbst konstruiert hat, einen Film herstellt, der nachher deutlich das Bild einer Bewegung zeigt. Geschieht das, so hat der Schüler ganz sicher etwas gewonnen, wenn auch mit einem beträchtlichen Aufwand an Zeit. Anders aber, wenn ihm die Kinohefte fertig in die Hand gegeben werden, oder wenn er in das Kino geht

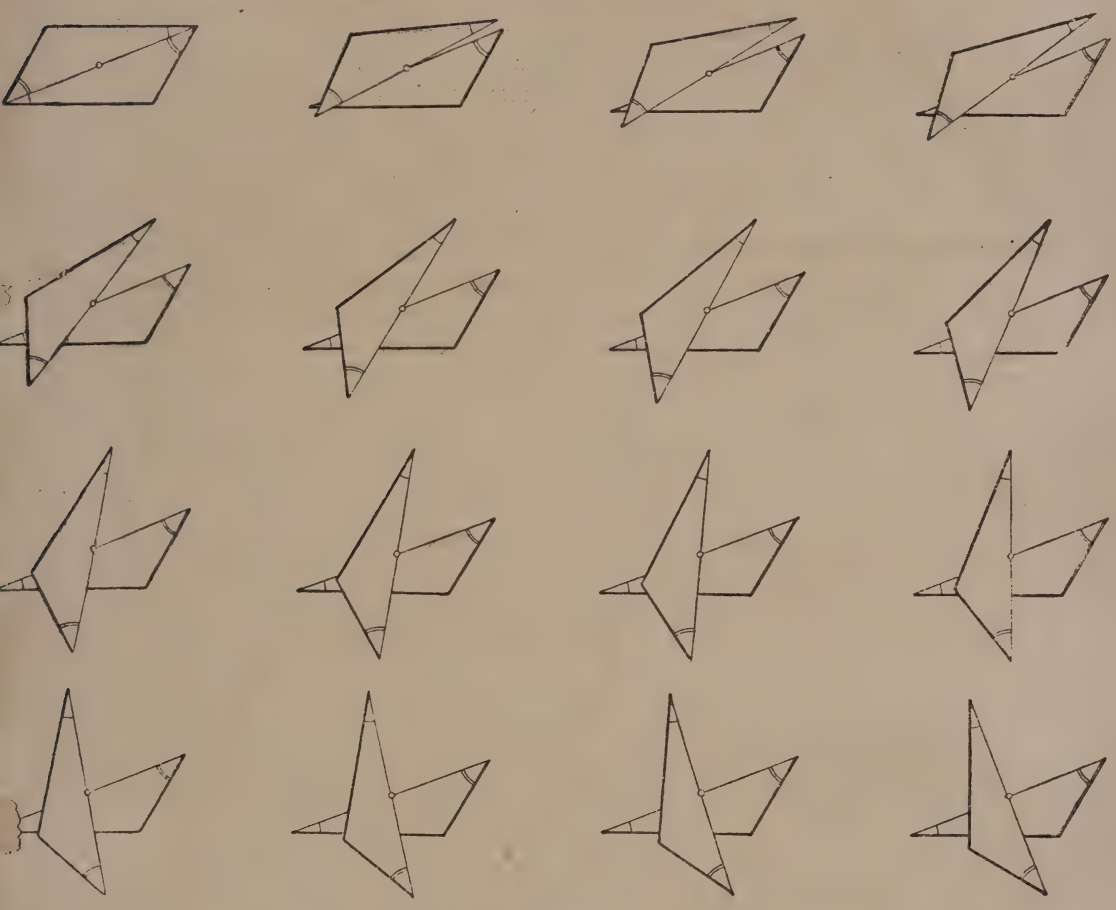


Fig. 29.
Ausschnitt aus einem Druckbogen für die Kinohefte von H. Detlefs. Es handelt sich um den Nachweis der Kongruenz der beiden Teildreiecke eines Parallelogramms durch Drehung um das Zentrum der Symmetrie. Die Kinohefte und auch die Druckbogen, aus denen sie hergestellt werden, sind von O. Salle, Berlin W 57, in Handel gebracht.

und ihm nun eine Viertelstunde Lehrsätze vorgeführt werden. Der Wert einer solchen Verfilmung der Mathematik liegt darin, daß im Zuschauer Interesse an der Sache geweckt wird, vielleicht auch, wenn er auf bekannte Dinge stößt, eine Freude des Wiedererkennens und einer tieferen Einsicht; aber man darf sich nicht einbilden, daß damit nun ein neuer Weg zur Mathematik — womöglich der gesuchte „Königsweg" — aufgetan ist. Wenn nicht hier die Beschäftigung mit der Mathematik voran-

gegangen wäre und sie dort nicht nachfolgte, so wäre nichts gegen früher geändert. Ich habe Schülern erst einige auf den Unterrichtsstoff bezügliche Druckbogen für Kinohefte gezeigt — die Figurenreihe 29 auf S. 127 gibt einen Ausschnitt aus einem solchen Blatt — dann ein fertiges Kinoheft. Ohne besondere Aufforderung hatten einige Tage später mehrere Schüler Versuche mit der Herstellung eigener Kinohefte gemacht, wobei sich freilich die Benutzung der im Handel erhältlichen dünnblättrigen Notizblocks als unpraktisch erwies.[1]

Weit wichtiger als mathematische Kinematographen erscheinen mir mathematische Modelle in der Schule, mit denen der Schüler selbst hantieren, die er in vielen Fällen selbst mit allereinfachsten Mitteln herstellen kann. Es braucht dazu gar nicht eine umfangreiche „Experimentiermappe“[2], es genügen Pappe, Schere, Zeichenmaterial, Kragenknöpfe u. dgl. überall vorhandene Dinge. Wer damit Ernst macht, wird freilich auch bald zu der Erkenntnis kommen, daß das Anfertigen solcher Modelle nicht, wie manche Verfechter der experimentellen Mathematik uns glauben machen möchten, den zugehörigen mathematischen Lehrsätzen vorangeht, sondern meistenteils nachfolgt. Aber darin, wie man solche Modelle am einfachsten gestaltet, liegt oft nicht nur für die Handfertigkeit, sondern auch für den mathematischen Inhalt ein Gewinn.[3]

Eine rein formale Seite der Planimetrie pflegt den Schülern im Anfang Schwierigkeiten zu machen, die Buchstabenbezeichnung der Figuren. Unzweifelhaft ist hier Übung notwendig. Wenn es sich um das verstandesmäßige Erfassen eines Beweises handelt, wenn der Schüler dem Vortrag des Lehrers oder eines Schülers schnell folgen soll, dann ist häufig eine Bezeichnung der Figuren durch Schraffuren oder bunte Farbe vorzuziehen. „Das rote Dreieck“ springt sofort in die Augen, während bei dem Dreieck *H L A* der Schüler erst suchen muß. Also gehört die bunte Kreide in den mathematischen Unterricht. Ob nun auch mathematische Lehrbücher mit bunten Figuren immer die besten sind, ist zu bezweifeln. Ich besitze einen der ersten englischen Buntdrucke, *the first six books of the Elements of Euclid in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners* von Oliver Byrne, London 1847. In dem wundervollen Werk findet sich keine Buchstabenbezeichnung, alle Flächen, aber auch Winkel, Strecken und Kreise sind in den Figuren und im Text farbig wiedergegeben. Man überzeugt sich sehr bald, daß mit dieser Anwendung der Farben zumal bei umfangreicheren Figuren kaum etwas gewonnen ist; es sieht bloß anlockender aus. Wenn heute die Farbe wieder in

[1] Die Frage des mathematischen Films ist, seit die erste Auflage dieses Buches erschien, ständig im Fluß geblieben, aber noch keineswegs zu einem Abschluß gekommen. Einen Überblick über den gegenwärtigen Stand gibt M. Ebner, Mathematische Lehrfilme, ZmnU 53 (1922) S. 193 ff.

[2] Vgl. die von G. Noodt bei Teubner in Leipzig herausgegebene Mappe.

[3] Ich verweise hier auf einige kleine Schriften über mathematische Schülermodelle; näher auf die Beziehungen zum Werkunterricht einzugehen, bleibt dem dritten Teilband vorbehalten. Für die Hand des Schülers ist bestimmt: K. Giebel, Anfertigung mathematischer Modelle (MPhB 16), Leipzig (Teubner) 1915. — Eine „Anleitung zur Herstellung und Verwendung einfacher mathematischer Modelle für Lehrer und Schüler“ bietet W. Reichel, Mathematischer Werkunterricht, Leipzig (Quelle & Meyer) 1914. — Mehr den Zwecken der Volksschule dient O. Frey, Geometrischer Arbeitsunterricht, Leipzig (Wunderlich) 1914.

den mathematischen Lehrbüchern, zumal der Mädchenschulen vordringt, so muß man dazu doch sagen, daß Schraffuren oft das Gleiche erreichen wie Farben, ohne die Bücher so zu verteuern, und daß man keinesfalls — böse Zungen behaupten, das solle manchmal bei Nichtfachmännern vorkommen — mathematische Bücher nach ihrer Farbenfreudigkeit bewerten kann.

Oft ist der Wunsch ausgesprochen worden, man möge sich bei den Figurenbezeichnungen an ganz bestimmte Buchstaben halten. Wenn in dem Examen der Engländer alle Schüler bei einer Aufgabe durchweg auf die gleichen Buchstaben eingestellt sind, so mag das gewiß dem Examinator, der 1000 solcher Arbeiten durchsehen muß, eine große Erleichterung sein. Aber aus anderen Gründen möchte ich mich dagegen aussprechen, daß jedes Dreieck nun immer mit $A\ B\ C$ bezeichnet wird. Man soll auch einmal ein Dreieck $L\ M\ N$ oder $A_1\ A_2\ A_3$[1] nennen, später muß der Schüler ja doch anders benannte Dreiecke benutzen. Auch der großen Frage, ob man das A an die Ecke links unten setzt oder oben hin, ob man das Dreieck linksdrehend bezeichnet oder rechtsdrehend, kann ich keine Bedeutung abgewinnen; das mag jeder machen, wie er will. Und wenn der Deutsche Ausschuß festgelegt hat, daß der rechte Winkel im rechtwinkligen Dreieck bei C liegt, so will er damit gewiß keine Norm schaffen, sondern nur diese Festsetzung treffen, „wenn nichts anderes gesagt ist". Die festen Buchstabenbezeichnungen sind ja durch die Überkultur der Konstruktionsaufgaben in den Unterricht hineingekommen; für eine Aufgabensammlung spart es eine Unmenge Papier und Druckerschwärze, wenn sie am Anfang ein für alle Mal die Bezeichnungen festlegt. Der Unterricht braucht sich nicht sklavisch an die feste Buchstabenfolge zu binden. Die Durchsicht schriftlicher Arbeiten ist freilich auf diese Weise umständlicher als sonst. — Ich entsinne mich gern einer Geschichte, die mir mein erster Mathematiklehrer einmal erzählte. Er war als Schüler der beste Mathematiker seiner Klasse, und bei Hausarbeiten war er der Autor aller Arbeiten (es war noch in der guten alten Zeit, heute kommt so etwas natürlich nicht mehr vor!). Da machte sein Lehrer mit ihm aus, daß er als Buchstabenbezeichnung in seiner Arbeit die Buchstaben seines Namens benutzen sollte; und richtig, in allen Arbeiten erschien der Name .. Ich will damit nur sagen, man macht es den Schülern zu leicht, wenn man immer dieselben Buchstaben benutzt, wie etwa das Lehrbuch. Verlangt man vom Schüler Unabhängigkeit in der Buchstabenbezeichnung, dann muß er doch zum mindesten selbst eine Figur für seine Zwecke entwerfen und wird nicht immer an der vom Lehrbuch oder vom Lehrer entworfenen Figur kleben. Oft bringt schon ein Wechsel der Buchstaben die Entscheidung darüber, ob ein Schüler irgendetwas richtig verarbeitet oder nur gedächtnismäßig aufgenommen hat.

6. Die geometrische Aufgabe.

Lange Zeit war der Begriff der geometrischen Aufgabe in einseitiger Weise auf einen ganz bestimmten Typus beschränkt worden. Man verstand darunter die planimetrische Konstruktionsaufgabe, die sich ausschließlich bestimmter, festgelegter Hilfsmittel in vorgeschriebener Weise bediente. Ich möchte demgegenüber den Be-

[1] Vgl. den Vorschlag von J. Knoblauch in den Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft 13 (1914) S. 150ff.

griff der geometrischen Aufgabe erheblich weiter fassen. Ich will darunter alles das verstehen, was neben der Herleitung des eigentlichen Lehrsatzsystems geschieht, um die dort gewonnenen geometrischen Erkenntnisse anzuwenden.

Ich rechne dahin zuerst die Aufgaben, deren Ziel es ist, die Schüler mit den eingeführten Begriffen vertraut zu machen, sie in den Stand zu setzen, die geometrischen Idealbegriffe aus der Natur herauszufinden und umgekehrt die Idealbegriffe wieder in die Welt der Erfahrungen zu übertragen. Dahin gehört also z. B. das, was B. Hoffmann einmal das „Sehen von Dreiecken" genannt hat. Dann ist eine zweite. sehr wichtige Aufgabe die unmittelbare Anwendung der Lehrsätze. Sie wird sich in der Form von Konstruktionen und Berechnungen abspielen. Nach Möglichkeit werden dabei praktische Gesichtspunkte vorherrschen. Gewiß ist die Schulung des Geistes, wie bei allen wissenschaftlichen Stoffen des Unterrichtes so auch hier, nicht zu vernachlässigen, aber damit ist eine stärkere Heranziehung der Wirklichkeit oder besser ein Heraustreten aus der Idealwelt der Geometrie sehr wohl vereinbar. Eine dritte Art von Aufgaben sehe ich in den Übungssätzen, d. h. in dem Aufsuchen von Beweisen zu vorgelegten Sätzen. Eine vierte und letzte, am weitesten gehende Gruppe von Aufgaben wird dem Problem der Auffindung von Lehrsätzen näher zu treten haben.

Das Aufsuchen von geometrischen Begriffen wird besonders im ersten Geometrieunterricht zu beachten sein, später wird es kaum mehr, losgelöst von anderen geometrischen Aufgaben, in die Erscheinung zu treten brauchen. Es handelt sich um die Herausfindung der geometrischen Begriffe aus den nicht auf die Ebene beschränkten Raumgebilden der Umgebung des Schülers. Dazu gehört eine gewisse Schulung der Raumanschauung. Nicht selten werden ebene Querschnitte durch Körper, die nicht unmittelbar sichtbar sind, in Lagen, die nicht ohne weiteres zugänglich sind, aufzusuchen sein. Die Figuren werden zu messen oder zu schätzen, dann in einer Skizze oder in einer genaueren Zeichnung in irgendeinem Maßstabe festzuhalten sein. Das Messen und Schätzen deutet schon an, daß wir, um uns solcher Aufgaben zu entledigen, häufiger hinaus ins Freie gehen müssen. Schon die nächste Umgebung, Schulstube, Schulgebäude, Schulhof, bietet reichen Stoff. Draußen im Feld ebenso wie drinnen an den Stätten der Arbeit wird auch der Lehrer manchmal erst seine Augen auftun müssen, um seine geometrischen Gebilde von der Wandtafel wiederzuerkennen: Die Linienführung der Eisenbahn zeigt ihm Kreisbogen und Tangenten, der Steigungsanzeiger neben der Strecke das Seitenverhältnis

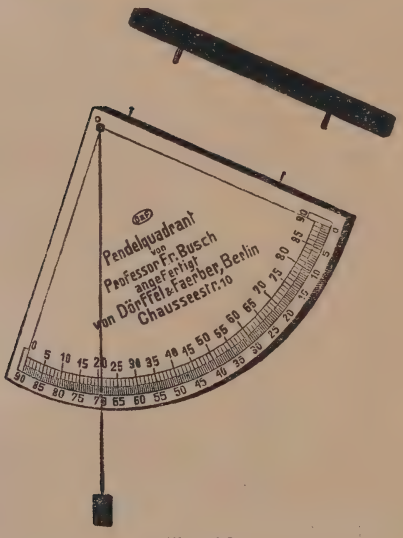


Fig. 30.
Pendelquadrant nach Busch.
Herstellung: Dörffel & Faerber, Berlin.

im Steigungsdreieck, die mit dem Treibriemen verbundenen Seilscheiben sind Kreise mit gemeinsamen Tangenten usf.

Man kann sich natürlich nicht damit begnügen, nun einfach die Gebilde als solche auffinden zu lassen, man muß sie auch ausmessen. Dazu bedarf es geeigneter Maßstäbe, am besten solcher, die jeder Schüler zur Hand hat. Es kommt zunächst nicht auf sehr genaue Messung an — später in der Trigonometrie wird von genaueren Me-

Fig. 31.
Edlers Meßblatt. Vertrieben von J. M. Reichardt, Halle a. S. Zum Visieren wird bei diesem Pendelquadranten die eine begrenzende Gerade genommen.

thoden zu reden sein. Größere Längen mißt man mit Schritten; der Schüler muß dabei ungefähr wissen, wie lang im Durchschnitt sein Schritt ist. Bei kleineren Strecken nimmt man ein zusammenklappbares Metermaß, eine Meßstange oder ein Meßband. Zum Festlegen der Punkte, Abstecken der Geraden usw. sind Meßstäbe zu benutzen, zur Not genügen Kreidemarken auf dem Boden. Winkel kann man bis auf einen Grad genau mit einfachen Papp- oder Blechwinkelmessern bestimmen. Mißt man horizontale Winkel, so legt man die Transporteure auf eine wagerechte

Platte, die etwa auf dem Stativ eines photographischen Apparates angebracht ist; die Visierrichtungen bezeichnet man mit Stecknadeln. Bei vertikal orientierten Winkeln befestigt man einen Faden mit einem kleinen Kügelchen oder dgl. am Ende durch ein Stück Wachs oder Siegellack in der Mitte des Winkelmessers und visiert nun längs der geradlinigen Kante (Fig. 30 bis 32).

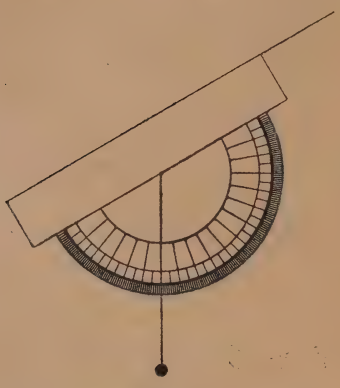


Fig. 32.
Gewöhnlicher Winkelmesser, der durch Ankleben eines Pendels zur Messung von Höhen- und Tiefenwinkeln eingerichtet ist. Visierrichtung ist durch die Grundkante des Winkelmessers gegeben.

Größere Genaugkeit gestattet z. B. der Winkelmesser von Ohmann (Muencke, Berlin N 4), der zwei senkrecht zueinander stehende und ein festes Diopter besitzt.

Die ausgemessenen Figuren werden in vielen Fällen nicht in natürlicher Größe, sondern in Verkleinerung auf dem Papier zu zeichnen sein. Man kann aus systematischen Gründen davon absehen, solche Verkleinerungen der Figuren vor der Durchnahme der Ähnlichkeitslehre zu benutzen. Ich glaube aber in der Tat nicht, daß eine solche Vorwegnahme irgendwie bedenklich wäre. Im übrigen kennt eine primitive Feldmessung auch Methoden genug, bei denen die betreffenden Figuren in wirklicher Größe auf dem Felde konstruiert werden (vgl. Bd. III).

Ich erinnere auch an eine der originellen Methoden des alten Schäffer in Jena: Wie man die Breite eines Flusses mit einem Strohhut mißt.[1] Man stellt sich an den Rand des Flusses, zieht den Strohhut so weit ins Gesicht, bis der Rand sich mit dem gegenüberliegenden Ufer deckt, dreht sich um, merkt sich die Stelle, mit der jetzt der Rand des Strohhutes zusammenzufallen scheint, und schreitet diese Strecke ab. Natürlich muß das Ufer eben sein. — Bei der militärischen Ausbildung wurde vielfach folgendes einfache Verfahren zum Entfernungsschätzen gelehrt: Man streckt den Arm aus und visiert über den aufgerichteten Daumen hinweg mit dem einen Auge den Gegenstand an, dessen Entfernung man schätzen will, etwa einen Waldrand. Wenn man bei unveränderter Daumenhaltung jetzt mit dem anderen Auge sieht, so springt scheinbar der Daumen auf dem anvisierten Hintergrund um eine gewisse Strecke. Diese Strecke schätzt man, multipliziert sie mit 10 und hat den gewünschten Abstand. Begründung: Lehre von den ähnlichen Dreiecken und die Tatsache, daß das Verhältnis von Augenabstand und Armlänge ungefähr 1 : 10 (genauer 1 : 9) ist. Das sind ein paar typische Beispiele für Aufgaben, wie ich sie hier meine. Es ist gar nicht selbstverständlich, daß der Schüler bei diesem Verfahren sofort das Dreieck, auf das es ankommt, „sieht".

Übungen im Schätzen können auch Anlaß werden, auf die Bedingungen für das Sehen einzugehen. Erinnert sei an die geometrisch-optischen Täuschungen, an die Frage, wie wir die Tiefendimension des Raumes schätzen u. dgl. mehr.

[1] Ich habe dies Verfahren schon in älteren Werken gefunden, in Schwenters „Erquickstunden" von 1636, in Tobias Beutels „Lustgärtlein".

Manche der eben genannten Beispiele sind schon eng verknüpft mit bestimmten Lehrsätzen. Das eigentliche Anwendungsgebiet der Lehrsätze sind Konstruktions- und Berechnungsaufgaben, diejenigen Aufgaben also, die uns in den landläufigen geometrischen Aufgabensammlungen fast ausschließlich begegnen. Bei einer Konstruktionsaufgabe[1] handelt es sich darum, aus gegebenen Stücken eine Figur auf zeichnerischem Wege zu finden. Steiner hat einmal das Programm, das sich eine allseitige Theorie der Konstruktionen zu stellen hätte, so präzisiert: Es ist zu

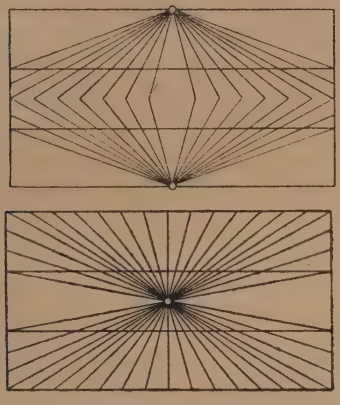


Fig. 33 u. 34.
In der oberen „pseudoskopischen Strahlenfigur" scheinen die parallelen, von Strahlen geschnittenen Geraden nach innen eingebuchtet, in der unteren „Heringschen Sternfigur" nach außen gewölbt.

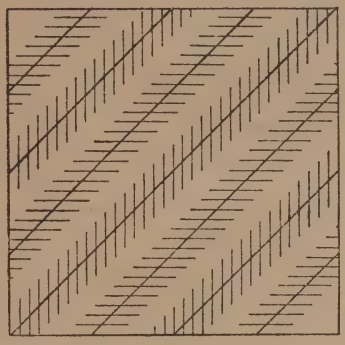


Fig. 35.
„Zöllnersches Muster".
Die Überdeckung mit Schraffuren hat zur Folge, daß die Parallelen zur Diagonale nicht als solche erscheinen.

untersuchen, auf welche Weise „irgendeine Konstruktion theoretisch oder praktisch am einfachsten, genauesten oder sichersten konstruiert werden könne, und zwar 1. welches im allgemeinen, 2. welches bei beschränkten Hilfsmitteln und 3. welches bei obwaltenden Hindernissen das zweckmäßigste Verfahren sei". Sagen wir nur gleich, daß man sich in der Schule gemeinhin darauf beschränkt, Konstruktionen theoretisch (nicht praktisch) auf irgendeinem Wege (ohne zu untersuchen, ob der Weg einfach, genau oder sicher ist) bei Beschränkung auf endliche Anzahl von Anwendungen des Zirkels und Lineals auszuführen. Um alle die anderen Dinge kümmert sich die Schule, von wenigen Ausnahmen abgesehen, ganz und gar nicht. Man tritt dabei in die Fußtapfen Euklids, der es in seinen Elementen auch so gemacht hat, indem er dabei auf die anderen Fragen verzichtete, ganz sicher nicht aus dem Grunde, weil es jene anderen Fragen noch nicht gab, sondern weil bei ihm die praktische Ausführung absichtlich ausgeschieden wurde.

[1] Gründliche Behandlungen der Theorie der Konstruktionsaufgaben sind: F. Enriques, Fragen der Elementarmathematik, Teil II: Die geometrische Aufgabe, deutsch von H. Fleischer, Leipzig (Teubner) 1907; A. Adler, Theorie der geometrischen Konstruktionen, Leipzig (Göschen) 1906; Th. Vahlen, Konstruktionen und Approximationen, Leipzig (Teubner) 1911.

Wir fordern im Gegensatz zu dieser Einschränkung zunächst neben der theoretischen die praktische Seite der Konstruktionsaufgabe. Die Konstruktionsaufgabe soll möglichst oft aus der Praxis geboren sein, d. h. es sollen bei ihrer Lösung wirkliche Werte zugrunde gelegt sein, die hin und wieder — immer wird es sich nicht ermöglichen lassen — von den Schülern selbst durch Messung und Schätzung gewonnen worden sind. Die tatsächliche Ausführung der Zeichnung mit den vorgeschriebenen, nicht nur durch irgendwelche beliebige Strecken und Winkel angedeuteten, sondern zahlenmäßig oder graphisch gegebenen Werten ist ein Hauptteil der Aufgabe. Die Übertragung des Ergebnisses in die Wirklichkeit gibt erst den rechten Abschluß. — Es wäre gewiß verfehlt, nun so weit zu gehen, überhaupt nur Aufgaben durchgehen zu lassen, die auch einen praktischen Hintergrund haben. Ich will nur auf die theoretisch sehr interessante Frage hinweisen: Ist es möglich, ein beliebiges reelles Dreieck aus zwei Stücken zu konstruieren?[1] Aber unbegreiflich ist, daß sich die Schüler jahrelang mit rein theoretischen Aufgaben abplagen, mit Konstruktionen aus möglichst „unzweckmäßigen Stücken", wie Lindemann sie sehr richtig genannt hat, oder daß man sich förmlich abmüht in der Erfindung möglichst komplizierter Daten. Was für einen Gewinn bedeutet es, wenn man ein Dreieck aus

$$\frac{h_b - h_a}{u - v},\quad a + b,\quad p - q,$$

wo u, v usw. irgendwelche Abschnitte von irgendwelchen Linien im Dreieck bedeuten, konstruieren kann![2]

Die zweite Einschränkung, die man sich fast durchweg in der Schule auferlegt, bezieht sich auf die Diskussion der möglichen Lösungen. Man ist im allgemeinen zufrieden, wenn man eine Konstruktion ausführen kann, d. h. wenn man die Ausführbarkeit theoretisch nachgewiesen hat. Ob eine solche Konstruktion in ihrer Durchführung praktisch brauchbar ist, danach wird zumeist nicht gefragt. Aber auch ein Suchen nach möglichst einfachen Lösungen findet in der Regel nicht statt.

Man mag zu der Geometrographie[3] stehen, wie man will, das eine muß man ihr nachsagen, daß sie die Geister lebendig gemacht hat, nach neuen Konstruktionen selbst bei uralten Aufgaben zu suchen. Und das Ergebnis war glänzend. Es sind uns manche wirklich schöne und einfache Lösungswege erschlossen, an die man früher nicht gedacht hat. Ich denke nicht daran, die Geometrographie in die Schule hineintragen zu wollen. Aber das möchte ich von ihr entlehnen: Eine Untersuchung

[1] Die Frage ist zu bejahen. Vgl. dazu die Aufsätze von F. Apt ZmnU 51 (1920) S. 18ff. und Breuer ebenda S. 164ff.

[2] Das Beispiel ist nicht etwa erfunden, sondern aus einer Arbeit aus dem Jahre 1908 über die Konstruktionsaufgabe am Gymnasium herausgegriffen!

[3] Als Literatur zur Orientierung über die Geometrographie empfehle ich: J. Reusch, Planimetrische Konstruktionen in geometrischer Ausführung, Leipzig (Teubner) 1904; A. Grüttner, Die Grundlagen der Geometrographie, Programm Oberrealschule Breslau 1912; H. Bodenstedt, Ein Vortrag über Geometrographie, ZmnU 35 (1904), S. 299ff. Reiches Material gibt die von Hagge in der eben genannten Zeitschrift während des Jahres 1913 redigierte Rubrik Geometrographie.

verschiedener Lösungswege auf ihre Einfachheit. Vielfach wird man sich bei einem Vergleich mehrerer Konstruktionen schon auf das Gefühl der Schüler verlassen können; man kann aber auch gelegentlich einen zahlenmäßigen Vergleich nach irgendeinem System vornehmen. Welches man dabei wählt, erscheint mir nicht so wichtig, als daß überhaupt der Gedanke, der solchen Zählverfahren zugrunde liegt, zur Sprache kommt. Auch dafür, daß die kürzeste Lösung durchaus nicht die durchsichtigste zu sein pflegt, lassen sich Beispiele anführen.

Die dritte Einschränkung, die sich die Schule meistenteils auferlegt, ist die in der Wahl der Hilfsmittel. Viele Schüler erfahren gar nicht, daß die Ausführung einer Konstruktion von der Wahl der Mittel abhängt, sie haben keine Idee, was es im Grunde bedeutet, die Trisektion des Winkels sei nicht ausführbar. Sie werden durch jahrelange Gewöhnung dazu gebracht, in Zirkel und Lineal die einzigen überhaupt möglichen Zeichenwerkzeuge zu sehen, sind sich aber dabei obendrein manchmal gar nicht darüber klar, daß auch mit diesen Werkzeugen nur ganz bestimmte Operationen erlaubt sind, andere, z. B. Streckeneinschiebungen, verboten werden. Sie sind sehr erstaunt, zu erfahren, daß die mit Streckeneinschiebung so einfach zu lösende Aufgabe: „Durch einen zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels liegenden Punkt ist eine Gerade zu legen, auf der durch die Schenkel eine vorgegebene Strecke ausgeschnitten wird", bei der üblichen Operationsbeschränkung unlösbar ist.[1] Demgegenüber sollte man näher auf die Handswerkzeuge des Zeichners eingehen. Das Linearzeichnen ist jetzt so verbreitet, daß man nicht eine Scheidewand zwischen der Konstruktion in der Mathematik und der im Linearzeichnen künstlich aufzurichten braucht. Daß der Zeichner Reißschiene, Zeichendreieck, Stechzirkel benutzt, sollte der Schüler auch in der Mathematik erfahren, in der Benutzung dieser Hilfsmittel sollte er auch in der Geometriestunde geübt werden, eine Erörterung, in welcher Hinsicht die Werkzeuge des Zeichners praktischer sind als die bei euklidischen Konstruktionen angewandten, gehört mit zu den Aufgaben des Mathematikers. Der Zeichner konstruiert die Tangente an die Ellipse viel genauer mit dem Lineal nach Augenmaß als mit den mathematisch vorgeschriebenen Konstruktionsmitteln. Er wird den Mittelpunkt einer gegebenen Ellipse nach dem Satze von den konjugierten Durchmessern finden: Er zeichnet zwei Paare paralleler Sehnen und gewinnt den Punkt durch Schnitt der Verbindungsgeraden entsprechender Sehnenmitten. So lassen sich gerade in der Kegelschnittlehre zahlreiche Beispiele namhaft machen. Eine Welt neuer Aufgaben erschließt sich, wenn man systematisch das Ausprobieren mit dem Stechzirkel zuläßt, wie das Hjelmslev untersucht hat[2], wenn man die Benutzung des rechten oder eines beliebigen schiefen Winkels

[1] Über einen besonderen Fall, in dem die Aufgabe lösbar ist, vgl. C. Frenzel, Neue Lösungen einiger geometrischen Konstruktionsaufgaben, ZmnU 40 (1909), S. 38ff. — Es ist für den Lehrer zweckmäßig, einige Konstruktionen bei der Hand zu haben, die sich nicht mit Zirkel und Lineal lösen lassen. Beispiele geben z. B. Killing und Hovestadt, Handbuch des mathematischen Unterrichts, Leipzig (Teubner) 1910, I. Bd. S. 167ff.

[2] J. Hjelmslev, Geometriske eksperimenter, Kobenhavn (Gjellerups Forlag) 1913. Die Schrift ist in deutscher Übersetzung von A. Rohrberg unter dem Titel: Geometrische Experimente als Beiheft der ZmnU erschienen, Leipzig (Teubner) 1915.

(am Zeichendreieck) zuläßt[1], des Bilineals[2], d. h. des Lineals mit zwei festen parallelen Kanten; auch die Faltaufgaben wären hier zu nennen.

Jene Frage, die Steiner interessiert hat, in welcher Weise nämlich die Konstruktionen noch eine weitere Einschränkung der Hilfsmittel vertragen, wenn man etwa an die Stelle des Zirkels einen festen Kreis setzt, kann in der Schule berührt werden. Weit lehrreicher sind Aufgaben, die mit dem Lineal[3] oder mit dem Zirkel allein zu lösen sind. Manche von ihnen gewinnen erst in der projektiven Geometrie ihr rechtes Gewicht, wie etwa die an das vollständige Vierseit anknüpfenden Linealkonstruktionen. Andere, wie gerade die einfachsten Zirkelaufgaben[4], sind ausgezeichnet geeignet, die Selbsttätigkeit der Schüler herauszulocken.

Dringend erwünscht ist es, daß der Durchführung der Konstruktionen größere Aufmerksamkeit gewidmet wird, daß auch die Frage nach der Genauigkeit verschiedener zur Verfügung stehender Konstruktionsmethoden erörtert wird, und daß andererseits auf besondere Lageverhältnisse Rücksicht genommen wird. Sehr richtig wird in einem Lehrplan der Oberrealschulabteilung der Hohenzollernschule in Schöneberg gefordert: „Planimetrische Konstruktionen mit Rücksicht auf die Mittel zeichnerischer Genauigkeit, auch bei ungünstigen Lageverhältnissen". Die Zeichenebene ist eben in praxi durchaus nicht identisch mit der unbegrenzten Ebene, und das hat Konsequenzen, die der Schüler nicht einfach damit abtun kann, daß er dem Lehrer berichtet: „Es ging nicht mehr rauf!" Ein Bändchen der Mathematischen Bibliothek von Zühlke enthält eine auch für Schüler unmittelbar brauchbare Einführung in die Welt der „Konstruktionen in begrenzter Ebene".[5] Schon der Quartaner stößt auf Konstruktionen, die den besonderen Lageverhältnissen sich anpassen. Ich erinnere nur beim Fällen und Errichten einer Senkrechten am Rande des Zeichenblattes an die Konstruktion mit dem Halbkreis.

Die größte Freude haben die Schüler, wenn sie zu Beginn einer Geometrie- oder auch Arithmetikstunde dem Lehrer berichten können: „Die Aufgabe geht nicht!" Es ist immer ein bischen Schadenfreude dabei, zumal wenn die häuslichen Hilfskräfte auch zu der Feststellung gekommen sind, daß sie „wirklich nicht geht". Daß

[1] Die Konstruktion der Parallelen ist hier unmittelbar einleuchtend; die Grundkonstruktionen lassen sich auf die leicht zu bewerkstelligende Zeichnung eines Rhombus zurückführen.

[2] Auch hier kann man sich, diesmal auf Grund der Parallelität der Gegenseiten, Parallelogramm und Rhombus verschaffen, die zur Lösung der Grundaufgaben führen.

[3] Ich nenne hier den Aufsatz H. Simon, Geometrische Konstruktionen ohne Zirkel, ZmnU 22 (1891) S. 81ff.

[4] Eine einfache Aufgabe als Beispiel: Eine Strecke ist durch ihre Endpunkte gegeben, gesucht wird ihre Mitte.

[5] Dieser Name rührt von Chr. Paulus (1854) her. Ich verweise noch auf A. Witting, Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene, Programm Gymnasium zum heiligen Kreuz, Dresden, Ostern 1899; P. Zühlke, Ausführung elementar-geometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen, Leipzig (Teubner) 1905; besonders aber auf P. Zühlke, Konstruktionen in begrenzter Ebene (MPhB 11), ebenda 1913; weitere Literatur in der zuletzt genannten Schrift. Neuerdings hat Ph. Maennchen in einem Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Nauheim: Zur Entwicklung der mathematischen Erfindergabe (ZmnU 53 (1922) S. 2ff.) gezeigt, wie gerade solche Aufgaben zu selbständiger Problembehandlung der Schüler geeignet sind.

da nun eigentlich die Arbeit erst angeht, davon haben die Schüler meist keine Ahnung. Und doch sollten sie wenigstens einen Begriff davon bekommen. Gewiß kann man sich in den Mittelklassen nicht mit Unmöglichkeitsbeweisen abgeben, aber schon die Feststellung, dies oder jenes Hilfsmittel versagt hier, ist, wenn der Grund erfaßt ist, wertvoll. Um so mehr sollte man dann in der Oberstufe an einigen Beispielen, am besten an den historisch wichtigsten, solche Unmöglichkeitsbeweise nachholen.

Schon in den Mittelklassen kann man den Schülern einen Begriff von Näherungskonstruktionen geben. Unterscheidet doch schon Dürer[1] ganz ausdrücklich „mechanice" und „demonstrative" gelöste Konstruktionsaufgaben. Auf jeden Fall sollte man im Anschluß an den pythagoreischen Lehrsatz und später in der Trigonometrie einige Näherungskonstruktionen auf ihre Genauigkeit hin untersuchen lassen.[2]

Bei der Lösung der Konstruktionsaufgaben pflegt man ein ganz bestimmtes Dispositionsschema innezuhalten, Analysis oder Überlegung, Konstruktion oder Ausführung, Beweis, Determination. Dieses Schema ist oft nichts anderes als ein äußeres Hilfsmittel, zuweilen ein Führer bei schwierigeren Konstruktionen, die nicht auf Anhieb gelöst werden. Wenn ein Schüler sofort bei einer Aufgabe den Lösungsweg angeben kann, dann ist die Analysis nicht mehr nötig. Nicht wenige Schüler bauen, wenn sie die Konstruktion längst haben, mühsam die Analysis zusammen, genau wie sie manchmal zum Aufsatz nachträglich die Disposition erfinden. Andererseits muß man natürlich, um die Schüler überhaupt in das Wesen der Analysis einzuführen, zunächst ganz einfache Konstruktionen analysieren. Aber man lasse die Analysis nicht zum Zwangsmittel werden. Ebenso wird in vielen Fällen der Beweis nicht ausdrücklich formuliert zu werden brauchen. Wichtig dagegen ist die Determination, die freilich meist ein größeres geometrisches Verständnis erfordert. In logischer Hinsicht ist sie ein Musterbeispiel für eine vollständige Diskussion aller möglichen Fälle. In praktischer Hinsicht ist sie unentbehrlich, weil sie die Umstände angibt, unter denen die Konstruktion ausführbar ist, und sich über die Zahl der Lösungen ausspricht. Gerade in der Determination findet die funktionale Abhängigkeit der Stücke voneinander ihren deutlichsten Ausdruck. Man muß die gegebenen Stücke die möglichen Werte durchlaufen lassen und dabei die Durchführbarkeit der Konstruktion untersuchen.

Noch einWort über die geistige Arbeit bei der Lösung der Konstruktionsaufgaben. Von der einen Seite werden die Konstruktionsaufgaben gerade deshalb für so wichtig

[1] Von den verwickelteren, mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktionen mit historischem Interesse nenne ich die Siebzehnteilung des Kreises. Vgl. R. Lohnstein, Die Siebzehnteilung des Kreises in elementar-geometrischer Herleitung ZmnU 49 (1918) S. 303ff.; H. Wolff, Über eine algebraische Behandlungsweise des regulären Siebzehnecks, Ebenda S. 299ff. Im übrigen verweise ich auf die einen Gesamtüberblick gebende Jenaer Dissertation R. Goldenring, Die elementar-geometrischen Konstruktionen des regelmäßigen Siebzehnecks, 1915.

[2] Dürer, Unterweisung der Messung. Die Ausgabe von A. Peltzer, München 1909, kann man auch dem Schüler in die Hand geben, trotz der überflüssigen Ausfälle des Herausgebers über die Mathematiker und obwohl gerade viel mathematisch Interessantes weggelassen ist.

gehalten, weil sie ein Prüfstein des Verstandes sind, weil bei ihnen die Möglichkeit gegeben ist, zu sehen, ob die Schüler auch in produktivem Sinne etwas leisten. Andere sprechen sich im Gegenteil gegen diese Konstruktionsaufgaben aus, weil bei vielen eine systematische Erarbeitung nicht möglich ist, wie etwa bei einer arithmetischen Aufgabe, einer Gleichung usf., sondern weil bei ihnen die Intuition, vielfach sogar Kniffe, eine Rolle spielen, auf die der mathematisch Begabtere wohl kommt, der mathematische Durchschnittsschüler nicht. Hat er diesen Kniff von anderer Seite in Erfahrung gebracht, dann gehen auch ihm die Augen auf. Und welcher Lehrer — Hand aufs Herz — hat nicht schon einmal stundenlang über einer verflixten Konstruktionsaufgabe gebrütet, die das Lehrbuch für die Schüler bereithielt?

Wenn die Lehrsätze im Unterricht tatsächlich mit den Schülern erarbeitet werden, wenn der Begriff der geometrischen Aufgabe so weit gefaßt wird, wie es hier geschehen ist, dann ist die Konstruktionsaufgabe gewiß nicht mehr die einzige Gelegenheit zu produktiver Betätigung des Schülers. Sie bleibt, was sie war, ein Mittel zur Erziehung zum Denken, aber sie ist nicht mehr das einzige. Jene in früheren Zeiten üblichen Knifftologien, darin ist man sich heute wohl einig, gehören nicht in den allgemeinen Unterricht. Man lasse ihnen ihren Wert für spekulative Köpfe, aber man mute sie nicht dem Durchschnittsschüler zu. Was man hingegen von jedem Durchschnittsschüler verlangen kann, ist die Anwendung irgendeines Lehrsatzes, einer bestimmten Konstruktionsmethode auf neue gleichartige, vorher noch nicht behandelte Beispiele. Dem Schüler sind für seine Zwecke mehrere, nicht allzu allgemeine Konstruktionsmethoden an die Hand zu geben — natürlich sind sie im Unterricht zu verarbeiten, nicht einfach zu übermitteln. Nachdem Petersen[1] eine Reihe solcher Methoden formuliert hat, finden sich heute in allen besseren Lehrbüchern der Geometrie Zusammenstellungen, die man allerdings vielfach noch etwas spezieller gestalten muß, als sie in den Lehrbüchern auftreten.

Neben die zeichnerische Behandlung einer geometrischen Aufgabe hat die rechnerische zu treten. Freilich kommt man hier in den meisten Fällen nicht ohne Trigonometrie aus. Immerhin gibt die Flächenlehre, besonders der pythagoreische Lehrsatz mit seinen Folgerungen, und die Ähnlichkeitslehre eine ganze Reihe von Methoden an, Strecken und Flächen rechnerisch zu bestimmen. Ausführlicher kommen wir auf die Berechnungsaufgabe bei der Trigonometrie zurück. Hier mag nur gesagt sein, daß es wenig Zweck hat, in der Ausbildung trigonometrieloser Methoden allzu weit zu gehen. Die Heronische Dreiecksformel erschließt einen Weg, der ohne Trigonometrie bis hin zu den Höhen, Winkelhalbierenden, Mittellinien usw. im Dreieck führt. Ich halte es aber für unnütz, den Schüler mit derlei Formeln zu plagen,

[1] J. Petersen, Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben, deutsch von R. von Fischer-Benzon, Kopenhagen (A. F. Hirt) 1891; R. von Fischer-Benzon, Die geometrische Konstruktionsaufgabe, Programm Gymnasium Kiel 1884. Ich nenne hier auch eine Sammlung vollständig durchgeführter Aufgaben: K. Schwering, 100 Aufgaben aus der niederen Geometrie, 3. Aufl., Freiburg i. Br. (Herder) 1908. — Eine Sammlung von Lösungsmethoden, wie ich sie oben im Auge hatte, brachte inzwischen B. Kerst, Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben (MPhB 26) Leipzig (Teubner) 1916.

die doch von vornherein dazu bestimmt sind, mit dem Einsetzen der Trigonometrie vergessen zu werden.

Eine dritte Gruppe von geometrischen Aufgaben bilden die Übungssätze. Nach unserem Vorschlage beschränkt sich das eigentliche Lehrsatzsystem, das der Schüler stets zur Hand haben soll, auf möglichst wenige Sätze. Es ist geradezu ein Minimalproblem, das hier der Lehrer lösen sollte. Alles andere ist als Übungssatz zu behandeln. Der Schüler soll in den Stand gesetzt werden, irgendeinen ihm entgegentretenden Satz, natürlich von angemessener Schwierigkeit, mit Hilfe der ihm aus dem Lehrsatzsystem zur Verfügung stehenden Mittel zu beweisen. Es soll damit die Fähigkeit, eine geometrische Tatsache zu begründen, geschult werden. Gewiß sind auch bei den Konstruktionsaufgaben Beweise zu erbringen. Aber sie reichen keinesfalls aus. Soll das bearbeitete Gebiet wirklich durchforscht werden, so müssen Übungssätze den Schüler mit einer gewissen Freiheit, die den Fähigkeiten der Klasse, den besonderen Umständen Rechnung trägt, hierhin und dorthin führen. Wenn, wie sehr zu wünschen, irgendein besonderes praktisches Anwendungsgebiet näher behandelt wird, wird es meistens notwendig werden, besondere Sätze zu entwickeln. Sehr häufig bietet sich Gelegenheit, mehrere Beweise für einen Satz zu finden, etwa in der Flächenlehre geometrische und arithmetische nebeneinander. Andererseits sind die Übungssätze auch zur Festigung des Lehrsatzsystems notwendig. Die dort abgeleiteten Sätze gewinnen erst Gestalt und Wirksamkeit, wenn sie auf andere Sätze angewandt werden. Man gewinnt zu den alten Beweismitteln, die frisch im Gedächtnis bleiben, durch praktische Erprobung neue.

Die vierte und letzte Gruppe geometrischer Aufgaben bilden die Versuche zu selbständigem Aufsuchen von Lehrsätzen. Man darf hier wie bei der vorangehenden Gruppe natürlich nicht an bedeutende Entdeckungen der Schüler denken, es handelt sich vielmehr immer um Tatsachen, die sich eng an bekannte Lehrsätze anschließen, die dem Mathematiklehrer gewissermaßen selbstverständlich sind. Und doch wird der Schüler an solchen einfachen Funden Entdeckerfreude spüren. In Betracht kommen einmal Spezialisierungen allgemeinerer Sätze auf besondere Fälle, umgekehrt Untersuchungen, ob sich ein Satz in irgendeiner Richtung verallgemeinern läßt; im letzteren Falle wird der Lehrer die Richtung, in der die Verallgemeinerung zu suchen ist, andeuten. In anderen Fällen wird sich irgendeine geometrische Methode verallgemeinern, spezialisieren oder auf einen anderen Fall übertragen lassen. Wer z. B. den Satz von den lunulae Hippocratis wirklich in sich aufgenommen hat, wird den Arbelos-Satz von selbst finden können. Sehr oft wird eine mehr oder weniger durch das Wesen der Dinge begründete Analogie einen guten Führer abgeben, ich erinnere nur an die synthetische Kegelschnittlehre, wo ein Satz von einem Kegelschnitt versuchsweise auf einen anderen übertragen werden kann. Kurz und gut, die Zahl der Möglichkeiten für ein solches selbsttätiges Forschen der Schüler ist sehr groß; es ist auch gar nicht so schwer, dem Durchschnitt der Klasse angemessene Beispiele zu finden.

Ich möchte zum Schluß alle diese verschiedenen Arten geometrischer Aufgaben in eine Idealform zusammenfassen, ohne damit irgendwie raten zu wollen, nun ausschließlich solche großen Gesamtaufgaben anzupacken; die Kräfte müssen erst im kleinen gestählt werden, um sich an größeres zu wagen. Mir schwebt als ein wün-

schenswertes und erreichbares Ziel vor, daß man, vielleicht in jedem Jahrgang einmal, vielleicht auch, was freilich nicht so befriedigend ist, nur mit diesem oder jenem Schüler eines Jahrgangs, sich an ein größeres Problem der Wirklichkeit heranmacht, das dem derzeitigen Stande des Wissens gerade angemessen ist. Aus der Beobachtung der Wirklichkeit werden Begriffe und Aufgaben gewonnen, zur Lösung der Aufgaben werden im Anschluß an das Lehrsatzgefüge dem besonderen Zweck entsprechende Lehrsätze gefunden und bewiesen, die Aufgaben werden gelöst und das Ergebnis wird mit der Wirklichkeit in Beziehung gebracht. Das sieht so noch sehr farblos aus, deshalb einige Beispiele: Man behandele im Anschluß an die Viereckslehre die Vieleckslehre und insbesondere auch die überschlagenen Vielecke, im Anschluß an die Ähnlichkeitslehre die Entfernungs- und Höhenmessung, nach der Flächenlehre die Feldmessung. Man beschäftige sich einmal mit dem Maßwerk der heimatlichen Architektur, wie dies Gerlach[1] in einem schönen Artikel angedeutet hat. Man studiere zeichnerische Lösungen sphärisch-astronomischer Aufgaben, wie sie Schoy[2] zusammengestellt hat.

„Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen, was den größten Genuß gewährt", so schrieb Gauß an W. Bolyai. Und das gilt nicht nur für den schaffenden Mathematiker, sondern ebenso für den lernenden Schüler. Die Aufgabe, und damit die geistige Selbstbetätigung des Schülers muß auch in der Geometrie im Vordergrund stehen.[3]

7. Flächenlehre.

Die Volksschule bringt gewöhnlich die Berechnung von Flächen weit früher als wir es in unserem, Euklid nachgebildeten System tun. Nun kann man ganz gewiß an eine eigentliche Flächenlehre erst herangehen, wenn man den Kongruenzbegriff gründlich kennen gelernt hat und einiges über die sonstigen grundlegenden Eigenschaften der ebenen Flächen weiß. Aber doch läßt sich in Erwägung ziehen, ob man die tatsächliche Berechnung von Rechtecken, Parallelogrammen und schließlich Dreiecken nicht gleich im Anschluß an die Viereckslehre bringt. Man wird damit allerdings nur das erledigen können, was man arithmetische Flächenlehre nennt.

Die arithmetische Flächenlehre stellt Formeln zur Berechnung der Flächen auf, sie verlangt, daß wirkliche Größen ausgemessen und daraus Inhalte berechnet werden. Anders die geometrische Flächenlehre. Hier spielt genau genommen der Wert des Flächeninhaltes, die numerische Größe, keine Rolle. Worauf es abgesehen ist, das sind Verwandlungen von Figuren in flächengleiche andere, also z. B. von Dreiecken in flächengleiche Dreiecke, die irgendwelche Bedingungen erfüllen, von Vier- und Vielecken in Dreiecke, von Rechtecken in Quadrate u. dgl. mehr. In den Kon-

---

[1] A. Gerlach, Das Maßwerk im geometrischen Unterricht, ZmnU 39 (1908), S. 341 ff.
[2] C. Schoy, Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben, Leipzig (Teubner) 1910.
[3] Die Durchführung dieses Gedankens habe ich in einer Geometrischen Aufgabensammlung versucht, einem Seitenstück zu der Reformausgabe von Bardey. Sie ist inzwischen, z. T. schon in zweiten und dritten Auflagen, bei Teubner in Leipzig im Rahmen meines Unterrichtswerkes erschienen.

struktionsaufgaben tritt unter den für das Dreieck gegebenen Stücken auch der Flächeninhalt auf, gegeben etwa durch ein Quadrat oder ein beliebiges Dreieck. Im übrigen wird aber nicht gerechnet, sondern immer nur mit Zirkel und Lineal konstruiert.

Auch dieser Purismus ist Euklidisches Erbteil. Euklid war nur an der geometrischen Flächenlehre interessiert; die arithmetische ließ er weg. Man sucht bei ihm vergeblich einen Wert für π. Ganz ließ sich später aber die arithmetische Flächenlehre nicht übergehen, denn sie ist schließlich das für die Praxis Wichtige. Also schied man sie fein säuberlich von jener geometrischen Flächenlehre. Wie weit dieser Purismus getrieben werden kann, sieht man an den italienischen Lehrbüchern, deren ich bei früherer Gelegenheit eine Anzahl nannte. Auch in deutschen Lehrbüchern wird zumeist reinlich geschieden; die geometrische Flächenlehre nimmt man meistens vorweg. Ich kann mich mit einem solchen Nacheinander der beiden Anschauungsweisen nicht befreunden, empfehle im Gegenteil, mit der sehr naheliegen-

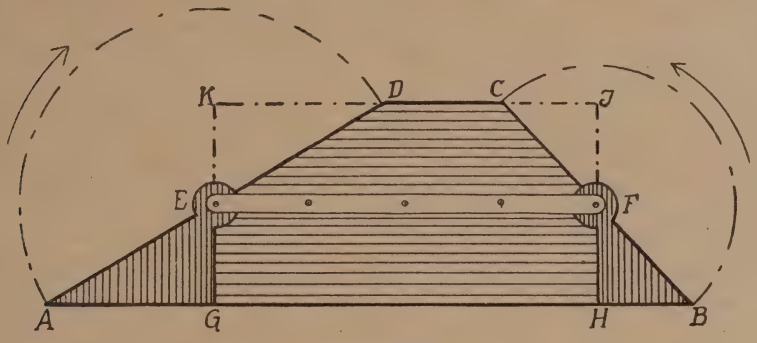


Fig. 36.
Ableitung der Formel für den Flächeninhalt eines Trapezes.
Modell nach Reichel.

den arithmetischen Flächenlehre anzufangen, den Inhalt von Rechteck, Parallelogramm, Trapez und Dreieck zu berechnen und erst dann die Sätze in geometrischer Form zu formulieren, soweit es nötig sein sollte. Ich kann auch kein großes Verbrechen dabei finden, wenn die geometrische und arithmetische Formulierung eines Satzes nicht streng voneinander geschieden werden. Der Schüler hat doch noch kein Verständnis dafür, warum die Formel

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

wo a, b und c die Maßzahlen der Katheten und der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sind, grundverschieden ist von dem Satz, daß die Summe der Kathetenquadratflächen gleich dem Hypothenusenquadrate ist.

In der Mitte der ganzen geometrischen Flächenlehre wird der pythagoreische Lehrsatz stehen, der ja seine Bedeutung nicht bloß für die Flächenberechnung, sondern ebenso auch für die Streckenberechnung hat. Die Mehrzahl der Lehrbücher gibt an dieser Stelle mehr als einen einzelnen Beweis an. Es ist in der Tat reizvoll, verschiedene Beweistypen miteinander zu vergleichen. Man kann hier den Schülern

auch einen kleinen Einblick in die Beweistheorie geben. Nicht nur, daß man sie auf den Unterschied von arithmetischen und geometrischen Beweismethoden hinweisen wird, auf Beweise ohne und mit Benutzung der Ähnlichkeitslehre, man kann bei einer Anzahl von Zerlegungsbeweisen auch ein gewisses Maß für die Einfachheit von Beweisen in der Anzahl der bei der Zerlegung zu benutzenden Dreiecke einführen und kann nun mehrere Beweise daraufhin untersuchen lassen.[1] Auch die Beweglichkeit der Gebilde kann man bei diesem Satz mit reichem Gewinn heranziehen, sowohl die der einzelnen Teilstücke — wie unsere Figuren zeigen — als die der ganzen Figur in sich.[2] Sogar die Spielzeugindustrie hat sich des pythagoreischen Lehrsatzes bemächtigt; ich denke an eine Art des „Kopfzerbrechers". Übrigens hat Kerst[3] diesen Gedanken weiter verfolgt.

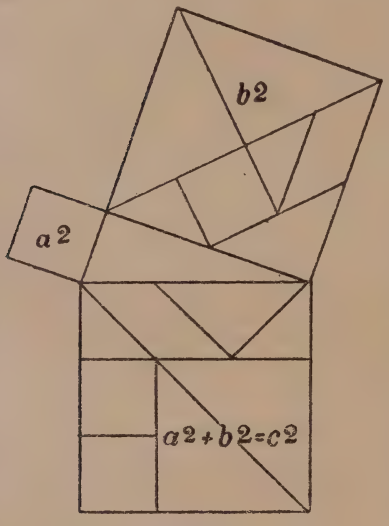


Fig. 37.
Besonderer Fall der Zerlegung beim pythagoreischen Lehrsatz. Mit Steinen des „praktischen Mathematikers" von Joh. Römert (Halle a. S.) zusammengestellt.

Wer etwas tiefer in die moderne Flächenlehre eindringen will — auch dazu bietet unser Lehrsatz Anregung in Menge — wird auf den Gegensatz von Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit einzugehen haben. Zwei Flächen F und G sind zerlegungsgleich, wenn F so in endlich viele Teile f_n zerlegt werden kann und ebenso G in ebensolche Teile g_n, daß $f_n \cong g_n$ ist. Ergänzungsgleich sind die Flächen, wenn ich zu beiden kongruente Teile so hinzufügen kann, daß die Gesamtflächen kongruent werden. Es gilt dann der fundamentale Satz, daß ergänzungsgleiche Vielecke zerlegungsgleich sind — also, um ein überraschendes Beispiel zu nennen, etwa zwei symmetrische Dreiecke. Der Satz ist um so mehr bemerkenswert, als sein Analogon im Raum, worauf noch zurückzukommen sein wird, nicht gilt.

Noch ein Hinweis auf eine andere moderne Begriffserweiterung des Flächeninhaltes, die von Möbius[4] stammt und sich auf überschlagene Polygone bezieht! So hat in der Möbiusschen Begriffsbestimmung ein überschlagenes Viereck, dessen

---

[1] Das anschließende Problem: Welches ist, mit dem in diesem Sinne definierten Einfachheitsmaß gemessen, der einfachste überhaupt mögliche Beweis? ist für den pythagoreischen Lehrsatz beantwortet. Die Antwort geht aber über das Schulniveau weit hinaus. Vgl. Brandes, Über die axiomatische Einfachheit mit besonderer Berücksichtigung der auf Addition beruhenden Zerlegungsbeweise des pythagoreischen Lehrsatzes, Hallenser Dissertation, 1908. — Im allgemeinen verweise ich hier auf mein bereits mehrfach erwähntes Pythagoras-Bändchen (MPhB 3).

[2] E. Staiger geb. Klein, Über die Anwendung beweglicher Figuren im geometrischen Unterricht, ZmnU 49 (1918) S. 341ff.

[3] B. Kerst, Geduldspiele, ZmnU 50 (1919) S. 211ff.

[4] A. F. Möbius, Der barycentrische Calcul, Leipzig (Barth) 1827 = Werke I, Leipzig (Hirzel) 1885.

beide Teildreiecke kongruent sind, den Flächeninhalt Null. Wer sich über diese Ausdehnung der Flächenlehre unterrichten will, greift am besten zu dem Handbuch von Killing und Hovestadt.

Die arithmetische Flächenlehre hat sich vielfach mit einer Auswertung der geradlinig begrenzten Flächen begnügt. Sie hat eine Anzahl wichtiger Formeln entwickelt, unter denen die Heronische von besonderer Bedeutung ist, weil sie die Möglichkeit gibt, den Inhalt eines Dreiecks aus den drei Seiten auszudrücken; sie hat sich später auch noch an den Kreis herangemacht, aber der Frage nach den von beliebigen Kurven begrenzten Flächen ist sie nicht näher getreten. Es kann sich hier natürlich noch nicht um analytische Integrationsmethoden handeln, aber an den mechanischen Quadraturen, wie sie die Feldmeßkunst früherer Zeiten erdacht hat und wie sie in der Volksschule heute noch lebendig sind, sollte man keineswegs vorübergehen. Als eine erste Methode nenne ich das wirkliche Abschätzen der Flächen. Man legt über die Fläche eine Millimetereinteilung, die etwa auf Pauspapier aufgetragen ist, stellt die Zahl der im Innern der Fläche liegenden Quadrate fest, dann die Zahl der durchschnittenen Einheiten und addiert deren Hälfte zu der ersten Zahl. Der Näherungswert, den man erhält, ist gar nicht so schlecht. Man versuche es etwa an einem Kreise, den man mit dem Radius 10 cm auf Millimeterpapier zeichnet. Man bestimmt — die Zählung ist ein wenig langweilig — einen Achtelkreis und zählt zuerst die ganzen Quadratzentimeter ab, dann erst die noch fehlenden Quadratmillimeter.

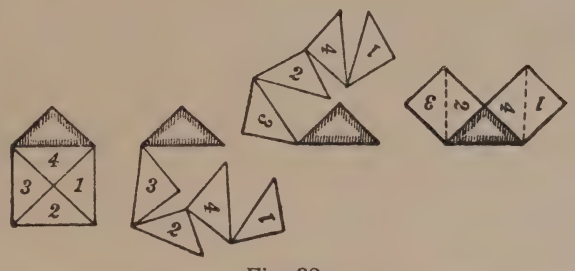


Fig. 38.
Schematische Zeichnung eines beweglichen Modells von Treutlein zur Veranschaulichung des pythagoreischen Lehrsatzes im Falle eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks. Hersteller: B. G. Teubner, Leipzig.

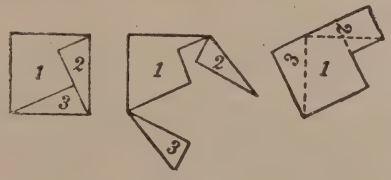


Fig. 39.
Modell zu einem (altindischen) Zerlegungsbeweis des pythagoreischen Lehrsatzes. Aus der Sammlung Treutlein des Verlages B. G. Teubner, Leipzig.

In anderen Fällen empfiehlt sich die noch rohere Methode des Wägens. A. v. Humboldt soll auf diese Weise das Verhältnis von Wasser und Land auf der Erde festgestellt haben; die Oberfläche von Blättern pflegt man in der Botanik auf die gleiche Art zu bestimmen.

Wichtig ist weiter die Trapezregel, die schon Heron kennt. Das auszuwertende Flächenstück wird durch Parallelen in genügend schmale Streifen geschnitten, und der Inhalt jedes Streifens wird als Trapez berechnet. Man kann die Trapezregel auch im Falle geradlinig begrenzter Figuren anwenden (Fig. 40), dann liefert sie natürlich genaue Ergebnisse. Übrigens wird diese Methode in der Praxis noch heute viel benutzt.[1]

[1] Vgl. z. B. E. Hammer, Lehrbuch der elementaren praktischen Geometrie (Vermessungskunde) Band I. Leipzig, Teubner 1911.

Wenig beachtet wird dabei, daß man damit ein Mittel hat, den Kreisinhalt ohne viele Umstände und mit verhältnismäßiger Genauigkeit auszurechnen.

Bei der Kreisberechnung folgt man im Unterricht fast durchweg der archimedischen Methode. Sie hat gewisse Vorzüge. Man sieht z. B. sehr deutlich, wie der gesuchte Wert bei fortschreitender Berechnung in immer engere Grenzen eingeschlossen wird. Sie hat aber auch ihre sehr großen Nachteile. Einmal braucht man die Ähnlichkeitslehre und schiebt deshalb die Kreisberechnung hinter dieses Kapitel, indem man es von der Flächenlehre, zu der es eigentlich gehört, lostrennt. Dann ist eine vollständige Durchführung der Rechnungen, wenn man einen einigermaßen genügenden Grad von Genauigkeit haben will, für die Schule ganz unmöglich. Ich möchte wirklich wissen, wer die Rechnung bis zum 96-Eck, bis zu dem die Lehrbücher zumeist vorgehen, mit den Schülern durchführt. Man nimmt die im Lehrbuch angegebenen Zahlen auf Treu und Glauben hin. Nun kann man ja das archimedische Verfahren veredeln, wie es schon Huygens getan hat, dessen Arbeiten uns durch neuere Aufsätze leicht zugänglich geworden sind[1]. Aber zu einem richtigen Verständnis dieser Untersuchung gehört die Kenntnis der Parabel.

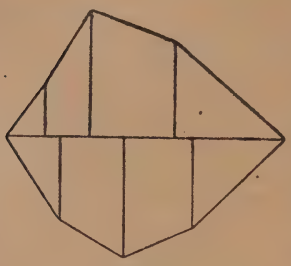


Fig. 40.

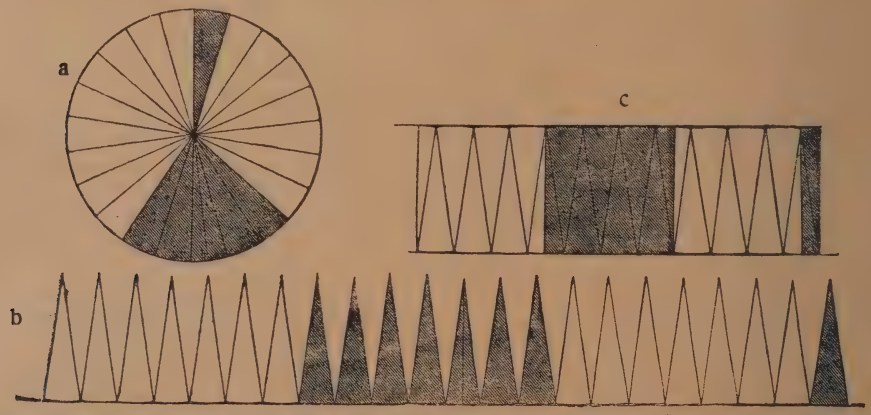


Fig. 41. Modell zur Kreisberechnung. Die Dreiecksschar b ist in a zum Kreis zusammengerollt. In c sind die beiden Hälften der Dreiecksschar zum Parallelogramm zusammengeschoben. Ausführung von der Firma F. Neustadt in Niederlößnitz-Dresden.

Schon in den Mittelklassen gangbar ist dagegen ein in den letzten Jahren von mehreren Seiten vorgeschlagener Weg. Man wertet nach der Trapezmethode einen Kreisstreifen aus. Die Schnitte der Parallelen zu den Streifenbegrenzungen beherrscht man ja mit dem pythagoreischen Lehrsatz. Man kann dieses Verfahren mit

[1] K. Kommerell, Über die Lehre von den Proportionen und von dem Flächeninhalte, Programm Königl. Friedrichs-Eugens-Realschule, Stuttgart, Herbst 1912; P. Haß, Bemerkungen zur Kreisrechnung, Programm Realschule an der Bogenstraße, Hamburg, Ostern 1913.

jedem wünschenswerten Maß von Genauigkeit wirklich im Unterricht durchführen. Einige Überlegungen vereinfachen noch die Auswertung. Auch über den Grad der Genauigkeit der Auswertung hat man einen Überblick, man kann sehr leicht ein Maß für den gemachten Fehler in Form eines kleinen Dreiecks angeben und sieht dann, wie mit zunehmender Streifenzahl der Fehler kleiner und kleiner wird.[1]

Während nach dem archimedischen Verfahren von den beiden Größen f und u, dem Flächeninhalt und dem Umfang des Kreises, erst u bestimmt wird, dann mit Hilfe der Gleichung $f = \frac{u \cdot r}{2}$ auch f, ist bei dem eben beschriebenen Verfahren zunächst f bekannt und danach u zu bestimmen. Zur Ableitung der Gleichung $f = \frac{u \cdot r}{2}$ ist ein Grenzübergang nötig, den man in der Mittelklasse natürlich nicht streng durchführt. Es wird dem Schüler leicht plausibel gemacht werden können, zumal wenn ein Modell (außer dem üblichen auch die Zusammenlegung, wie sie Fig. 41c andeutet) zur Hand ist.

Wenn es auch genügt, die Zahl π auf einige wenige Stellen zu berechnen, so hören die Schüler doch gern auch genauere Werte.[2] Sie haben, wie manch einer unserer großen Mathematiker, eine Schwäche für große und lange Zahlen. Man sollte den Schülern die Freude machen und ihnen einige der Verschen, die man zum Behalten der Ludolfschen Zahl erdacht hat — von jedem Wort ist die Buchstabenzahl zu nehmen — nicht vorenthalten. Am bekanntesten ist ja der französische Vers:

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.

Eine deutsche Übersetzung, die freilich gerade kein Musterbeispiel deutscher Lyrik ist, hat folgenden Wortlaut:

Dir, o Held, o alter Philosoph, du Riesengenie!
Wie viele Tausende bewundern Geister
Himmlisch wie du und göttlich! —
Noch reiner in Aeonen
Wird das uns strahlen,
Wie im lichten Morgenrot!

Man ist der guten Zahl π förmlich dankbar, daß nun sehr bald eine Null kommt, und daß damit weiterer Reimerei Einhalt geboten wird. Da gefällt mir besser das folgende Verslein von Weinmeister, das er 1878 verbrochen hat, und das ohne Angabe des Verfassers in manche Lehrbücher übergegangen ist:

Wie o! dies π
Macht ernstlich so vielen viele Müh'!
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein!

---

[1] Vgl. hierzu H. Deutsch, Die Berechnung des Kreisinhalts durch Zerlegung in Trapeze. ZmnU 46 (1915), S. 319ff. und A. Flechsenhaar, Die Kreismessung mit Hilfe der Simpsonschen Regel. Ebenda 46 (1915), S. 329ff. — Daran schloß sich im gleichen Jahrgange der Zeitschrift eine Kontroverse.

[2] Eine auch für Schüler höherer Klassen lesbare Darstellung der π-Geschichte gibt das Bändchen der MPhB.: Beutel, Die Quadratur des Kreises, 2. A. Leipzig (Teubner) 1920.

In den Lyzeen und Studienanstalten werden freilich die „Jünglinge" durch „Mägdelein" zu ersetzen sein!

Der Mathematiker pflegt die Werte für Kreisumfang und Kreisinhalt durch den Radius des Kreises auszudrücken. Der Techniker hingegen kann in den meisten Fällen besser als den Radius den Durchmesser eines Kreises bestimmen und schreibt deshalb die Formeln für den Durchmesser um, also $u = \pi d$ und $f = \frac{\pi}{4} d^2$. Den Faktor π schreibt man, wie jeden Zahlwert, vor den allgemeinen Ausdruck; $r^2\pi$ ist ebenso wenig schön wie $r \cdot 2$. Auch der Kehrreim des bekannten Liedes „doch der Inhalt des Kreises ist $r^2\pi$" kann mich von dieser Forderung nicht abbringen!

Es bedarf keiner besonderen Ausführung, daß gerade die Flächenlehre ein ergiebiges Feld für geschichtliche Belehrungen ist. Wenn die Anfänge der Dreiecks- und Viereckslehre der allerersten Kulturgeschichte angehören, wo Namen noch Schall und Rauch sind, so haben wir es hier mit ausgeprägten mathematischen Persönlichkeiten zu tun. Und wer die Überzeugung hat, daß der Fortschritt sich nicht nur an das Wirken der Masse, sondern ebenso an das Denken und Handeln einzelner, über die Masse hinausragender Köpfe knüpft, der wird gern auch der griechischen und indischen Mathematiker gedenken, die uns in der Flächenlehre vorwärts gebracht haben.

Und noch eins. Wenn irgendwo, so tritt hier die Bedeutung der Näherungskonstruktion in die Erscheinung. Man kommt gar nicht daran vorbei, einzelne Näherungskonstruktionen für die Quadratur des Zirkels zu geben, wenn man den Schülern dieses Problem andeuten will. Einen besonderen Reiz haben für die Schüler solche von Kreisbögen begrenzten Figuren, die quadrierbar sind; ich erinnere nur an die lunulae Hippocratis — die sich beiläufig bei Hippokrates nicht in voller Allgemeinheit finden — den Arbelos oder Schusterknauf und andere Figuren, wie sie z. B. Leonardo da Vinci in großer Zahl angegeben hat.[1] Von Archimedes ist ein ganzes Buch über solche quadrierbaren Kreisbogenfiguren bekannt, dessen Inhalt sehr wohl auch den Schülern zugänglich ist.

Ein an die Kreislehre anschließendes tiefliegendes Problem will ich doch wenigstens nennen, das isoperimetrische Problem. Mit seiner Erschließung für die Schule haben sich mehrere Schulmänner beschäftigt.[2]

Zum Schluß komme ich noch auf einen früher gemachten Vorschlag zurück. Man sollte in Erwägung ziehen, ob man nicht im Anschluß an die Berechnung von Flächen in einigen Fällen auch die Berechnung von Körpern streift. Es ist jedenfalls nicht schwer, von einigen einfachen Körpern in durchaus propädeutischer Form neben den Oberflächenberechnungen, die die Flächenlehre ganz naturgemäß liefert, auch einige Inhaltsberechnungen zu geben. Und wenn es nur wäre, um den mit dem Einjährigen abgehenden Schülern unserer Gymnasien zu zeigen, daß man auch Körper berechnen, nicht nur mit dem Litermaß praktisch ausmessen kann.

---

[1] Stillcke, Der Lehrsatz des Hippokrates und die Geometrie krummliniger Figuren des Leonardo da Vinci, ZmnU 41 (1910), S. 203ff.

[2] Vgl. den mit reichen Literaturangaben versehenen Aufsatz W. Lorey, Über isoperimetrische Probleme in der Schule und in der Forschung, ZmnU 49 (1918) S. 281ff. — Die beste wissenschaftliche Darstellung ist O. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig (Veit) 1916.

8. Ähnlichkeitslehre.

Wir pflegen in Deutschland die Ähnlichkeitslehre hinter die Flächenlehre zu stellen; das geschieht nicht überall so. Das in Dänemark erschienene, in vielen Dingen vom üblichen Wege abweichende Buch von Hjelmslev[1] vereinigt z. B. die Flächenlehre mit der algebraischen Geometrie und der Trigonometrie zu einer berechnenden Geometrie und setzt sie hinter die Flächenlehre. Das holländische

Fig. 42.
Proportionalzirkel. Ausführung von Dennert und Pape, Altona bei Hamburg.

Schulbuch von A. van Thijn[2] zieht einen Teil der Ähnlichkeitslehre sogar noch vor die Lehre vom Kreis.

Die Ähnlichkeitslehre wird von zwei Fundamentalsätzen beherrscht: Beim Schnitt eines Strahlenbüschels einmal durch ein Paar paralleler Geraden[3], das andere Mal durch einen Kreis, entstehen Abschnitte, zwischen denen einfache in Proportionsform auszusprechende Relationen bestehen.

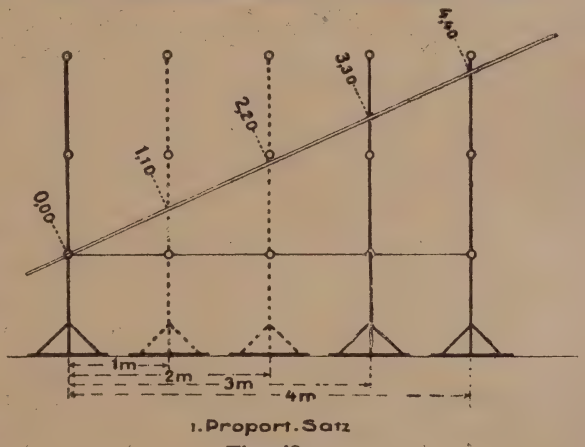


Fig. 43.

Die Geometrie pflegt noch vielfach davon, daß die Proportionslehre bereits in der Arithmetik ausführlich behandelt ist, überhaupt keinen Gebrauch zu machen. Sie tut ganz so, als ob sie allein auf der Welt wäre. Das war gewiß zu den Zeiten Euklids notwendig, als man noch nicht den Zahlbegriff in dem Umfange hatte, wie die Mathematik der Gegenwart; heute ist es ein in der Schule übel angebrachter Purismus. Insbesondere vermißt man in der Mehrzahl der Darstellungen die oft sehr zweckmäßige Verwendung des Proportionalitätsfaktors.

Eine Schwierigkeit, die bei der Ableitung des ersten der genannten beiden Fundamentalsätze, des sog. Strahlensatzes, recht sehr in die Erscheinung tritt, im übrigen aber genau so auch in der Flächenlehre vorhanden ist, ergibt sich aus der Möglich-

[1] J. Hjelmslev, Elementær Geometri, 1. Bog. 2. A. 1921, 2. Bog. 1919, 3. Bog. 1921, Kopenhagen (Gjellerup).
[2] A. van Thijn, Leerboek der Planimetrie, 2. Druck, Groningen (Wolters) 1916.
[3] Die Figuren 43 und 44 deuten eine reizvolle Anwendung von Sprungständern zur Erläuterung des Strahlensatzes an; sie sind entnommen W. Finke, Der Sprungständer als mathematisches Demonstrationsmittel, ZmnU 51 (1920) S. 273ff.

keit, daß die auftretenden Strecken miteinander oder mit der angewandten Maßeinheit inkommensurabel sind. Es hat sich heute wohl allgemein die Anschauung durchgesetzt, daß eine grundsätzliche Erledigung dieser Schwierigkeit nicht zu den Aufgaben der Mittelklassen gehört. Man zeigt, daß das Verhältnis oder der Flächeninhalt — je nachdem — jedenfalls in beliebig vorgeschriebener Genauigkeit angegeben, wenn man will, auch in beliebig enge Grenzen eingeschlossen werden kann; arithmetisch ausgedrückt heißt das, Quotient und Produkt zweier Irrationalzahlen sind wieder bestimmte reelle Zahlen. Das genügt vollkommen. Das dabei zu verwendende sog. archimedische Axiom (besser Axiom des Eudoxos; es ist ausdrücklich schon bei Euklid ausgesprochen) braucht an dieser Stelle nicht formuliert zu werden.

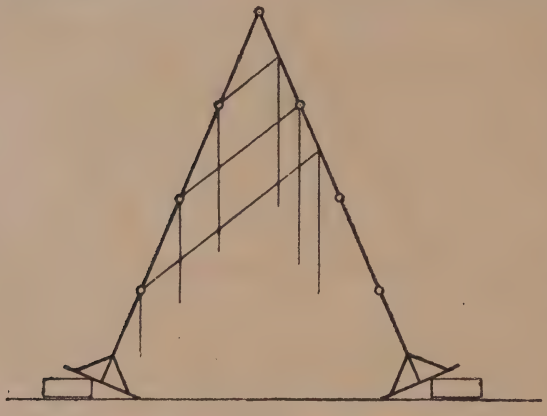


Fig. 44.

Wie weit man in der Ähnlichkeitslehre geht, wird von Zeit und Schülergeneration abhängen. Es steht dem gar nichts im Wege, auch hier schon die harmonische Teilung und was damit zusammenhängt zu bringen. Darüber wird später noch zu sprechen sein (S. 188).

Auf keinen Fall wird man auf den goldenen Schnitt verzichten. Das Problem gehört zu denen, die seit langem die Menschheit stark gefesselt haben; es wäre schade, wollte man darauf im Unterricht nicht eingehen; um so mehr, als Beziehungen zu wichtigen mathematischen Problemen (Kreisteilung) sich daran knüpfen. Über den hier einzuhaltenden Lehrgang sind in jüngster Zeit verschiedene neue Vorschläge gemacht worden.[1] Die Anwendungen auf Natur, Kunst,[2] Handwerk[3] wird man sich nicht entgehen lassen.

Es wird sich übrigens empfehlen, in der Ähnlichkeitslehre den Begriff der Perspektivität von Figuren mehr in den Vordergrund zu stellen; das geschieht neuerdings in mehreren Lehrbüchern, ich nenne etwa das den Standpunkt der neueren Geometrie schon in der Mittelstufe am kräftigsten von allen betonende Werk von Henrici und Treutlein. Gerade von hier aus werden auch Apparate wie Storchschnabel oder

[1] W. Weber, Zur stetigen Teilung und zum Fünfeck, ZmnU 49 (1918) S. 174ff. und O. Zander, Eine neue Definition der stetigen Teilung, Ebenda 51 (1920) S. 41ff.

[2] Vgl. H. E. Timerding, Der goldene Schnitt (MPhB 32) Leipzig (Teubner) 1919.

[3] Ich mache z. B. darauf aufmerksam, daß der goldene Schnitt fast ausnahmslos in den Lehrbüchern für Buchdrucker Erwähnung gefunden hat und sich zunehmender Beachtung erfreut, worüber bei R. Engel-Hardt, Der goldene Schnitt im Buchgewerbe, Leipzig (Mäser) O. J. (1919) nachzulesen ist. Auch an die Phantasien oder Theorien — je nach dem Standpunkt — über die Cheopspyramide erinnere ich, deren eine an den goldenen Schnitt anknüpft. Die Auswertung für die Schule behandelt M. Zacharias, Die Cheopspyramide als Fundgrube mathematischer Schulaufgaben, ZmnU 53 (1922) S. 133ff.

Pantograph (Fig. 45—47), Methoden wie das Meßtischverfahren besonders leicht verständlich.

Es bedarf keiner weiteren Ausführungen, daß die geometrischen Aufgaben, die in der Ähnlichkeitslehre zu bringen sind, die praktischen Anwendungen stark bevor-

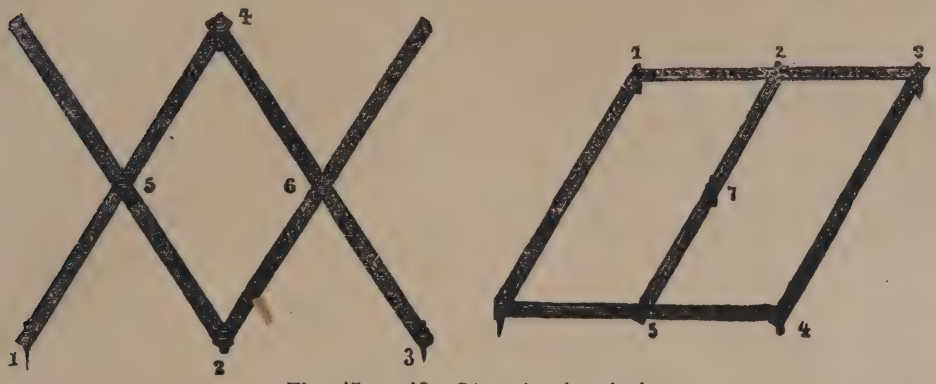


Fig. 45 u. 46. Storchschnabel.
Anfertigung der Sächsischen Reißzeug-Fabrik F. E. Hertel & Co. in Neu-Coswig-Dresden.

zugen sollten. Es gibt so viele schöne, jahrhunderte lang im Gebrauch gewesene Methoden, z. B. in der Höhen- und Feldmessung, daß an ihnen die höhere Schule nicht vorübergehen sollte, auch wenn nachher die Trigonometrie rechnerisch vorteilhafter

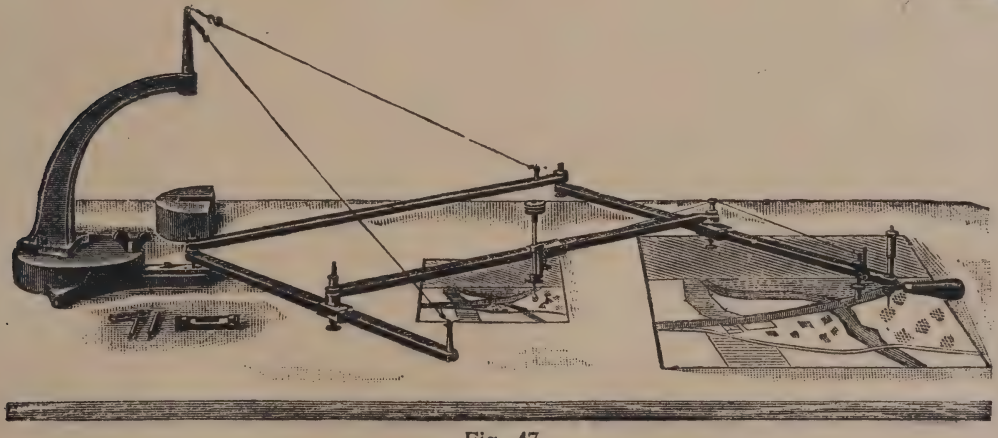


Fig. 47.
Pantograph. Ausführung von Dennert und Pape, Altona bei Hamburg.

Methoden liefert. Auch auf einfache Wegaufnahmen (mit Schrittzählung und Winkelmessung) mit anschließenden Krokizeichnungen soll hier hingewiesen werden; ausführlich wird darüber im 3. Bande zu sprechen sein.

Um so mehr kann man nach meiner Meinung eine andere Gruppe von Aufgaben beschneiden, die Konstruktionen mit algebraischer Analysis. Nicht selten wird zu diesem Zweck ausdrücklich ein besonderes Kapitel „Algebraische Geometrie" kon-

struiert. Es handelt sich zunächst darum, Ausdrücke wie $\frac{a\,b}{c}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$ oder dgl.; wobei $a, b, c \ldots$ als Strecken gegeben sind, zu konstruieren. Man sucht aus den gegebenen rechnerisch andere Stücke, deren Verwendung die Konstruktion erleichtert. Es wird versichert, die Methode finde bei den Schülern außerordentlich viel Anklang. Sehr begreiflich, denn sie sehen darin einen neuen, einer systematischen Behandlung zugänglichen Weg, unangenehmen Konstruktionen beizukommen. Und dennoch ließe man sie lieber fallen. Es handelt sich hier vielfach um Dinge, die später Trigonometrie und analytische Geometrie rechnerisch viel besser erledigen. Wer sich aber von diesen Aufgaben nicht trennen kann, der lege wenigstens Wert darauf, daß er wirklich interessante Aufgaben auswählt. Diese lassen sich dann zwanglos der Ähnlichkeitslehre, z. T. auch schon der Flächenlehre eingliedern.

Von Anhängern der Reform ist diesen Methoden neues Leben dadurch eingeflößt worden, daß man Ausdrücke der vorhin genannten Art als Funktion einer der in ihr auftretenden Größe betrachtet — Funktionen mehrerer Variablen würden zu kompliziert werden. Diese Funktionen werden dann meist graphisch untersucht. Der Gedanke ist gewiß außerordentlich gut. Seine Ausführung kann aber meiner Ansicht nach die algebraischen Konstruktionen auch nicht retten. Die funktionale Untersuchung bietet nur eine willkommene Ergänzung der in qualitativer Hinsicht von Anfang an im Auge behaltenen Abhängigkeit eines Stückes einer geometrischen Figur von anderen nach der quantitativen Seite. Während man sich früher häufig [illegible]nit begnügen mußte, lediglich festzustellen, daß eine Vergrößerung einer Größe eine Vergrößerung oder Verkleinerung einer anderen zur Folge hat, gibt die Ähnlichkeitslehre und übrigens schon die Flächenlehre ein Mittel an die Hand, einigen dieser Abhängigkeiten zahlenmäßig nachzugehen. In der ersten Dreiecks- und Viereckslehre sind Beispiele für formelmäßig angebbare funktionale Abhängigkeiten selten; ich nenne etwa die Abhängigkeit eines Winkels von seinem Nebenwinkel, eines Winkels im gleichschenkligen Dreieck von irgendeinem anderen des Dreicks. Es wäre nun aber nach meiner Meinung verfehlt, die Ausnutzung solcher Abhängigkeiten aufzuschieben, um nachher die verschiedenen Fälle alle gemeinsam zu behandeln. Im Gegenteil sollte man, zumal wenn die Arithmetik die eine oder andere der auftretenden Funktionen schon erwähnt hat, funktionale Abhängigkeiten jedesmal dann erörtern, wenn sie in der Geometrie auftreten.

Mit einer Erweiterung des Bereiches geometrischer Figuren durch Parabel und Hyperbel, wie sie ein solches Verfahren mit sich bringt, kommt man auch denjenigen Stimmen entgegen, die in unserem heutigen Lehrgang eine einseitige Betonung des Kreises auf Kosten anderer einfacher Kurven bemängeln.[1] Es ist durchaus nicht verwunderlich, daß tatsächlich die Kreislehre die Ellipsenlehre und die Hyperbellehre überwiegt. Der Kreiszirkel ist eben einfacher als die anderen Kegelschnittzirkel. Aber insofern muß man jenen Stimmen recht geben: Der Schüler darf nicht die Mittelstufe verlassen, ohne andere Kurven als den Kreis kennen gelernt zu haben. Er kommt sonst zu der irrigen Ansicht, zu der die in der Praxis üblichen

[1] Ich nenne beispielsweise einen Aufsatz: Ph. Weinmeister, Unendlichkeitsrechnung in der Schule, ZmnU 38 (1907) 1ff.

Korbbögenkonstruktionen von Ellipsen und anderen, besonders in der Architektur vielbenutzten Kurven leicht verführen, daß mathematisch brauchbare Kurven immer aus Teilen von Kreisbögen bestehen.

Die ebene Geometrie hat mit der Ähnlichkeitslehre einen ersten Abschluß gefunden. Die Oberstufe nimmt später Gelegenheit, den Stoff von anderen Gesichtspunkten aus zu betrachten. Inzwischen aber findet die Planimetrie nach zwei Seiten hin wertvolle Ergänzungen: Die Trigonometrie widmet sich der rechnerischen Beherrschung der Figuren, die Stereometrie läßt die Beschränkung auf die Ebene fallen und betrachtet systematisch die Gebilde im Raum. Diese Gebiete sollen uns in den nächsten beiden Kapiteln beschäftigen.

VIERTES KAPITEL.

Stereometrie.

1. Propädeutik. Die einfachsten geometrischen Körper.

Wie der Planimetrie, so pflegt man jetzt auch der Stereometrie einen propädeutischen Kursus vorauszuschicken. Bei einer systematischen Grundlegung der Stereometrie müßte man von den Geraden und Ebenen im Raum ausgehen, den sogenannten „ungeschlossenen" Gebilden. Wir haben aber schon früher, als wir eine systematische Fusion ebener und räumlicher Geometrie ablehnten, auseinandergesetzt, daß nicht so sehr in den Körpern, den „geschlossenen" Raumgebilden, als vielmehr in den unbegrenzt zu denkenden, der Anschauung schwerer zugänglichen Geraden und Ebenen die Ursache dafür zu suchen ist, daß die Grundlegung der Stereometrie große Anforderungen an die Schüler stellt.

Die Lehrpläne tragen der Notwendigkeit einer stereometrischen Propädeutik vielfach in der Weise Rechnung, daß sie dem der Oberstufe vorbehaltenen Lehrgange der Stereometrie in einer Mittelklasse, meist in der Untersekunda, einen Vorkurs vorausschicken. Der Name Vorkurs darf nun aber nicht zu der Annahme verleiten, daß auch hier, genau so wie in der Ebene und Raum gleichzeitig berücksichtigenden Propädeutik in Quinta oder Quarta, jede logisch-deduktive Beweisführung wegfallen soll. Ich halte es nicht für angebracht, wie es gelegentlich wohl geschieht, in einer Untersekunda Inhalt- und Oberflächenformeln von Körpern einfach anzugeben, höchstens durch Ausmessung zu bestätigen. Eine deduktive Entwicklung läßt sich an dieser Stelle sehr wohl durchführen, wenn man nur insofern auf eine strenge Grundlegung verzichtet, als die Sätze über Anordnung, Lage usw. der Raumgebilde rein der Anschauung entnommen werden. Die stereometrische Propädeutik sollte jedenfalls so gründlich sein, daß es nicht nötig ist, auf die Formeln für Inhalt und Oberfläche der behandelten einfachen Körper später noch einmal zurückzukommen; zum Teil werden sie vielleicht später noch einmal auf anderem Wege mit Hilfe der Integralrechnung abgeleitet.

Eine Anzahl von Lehrgängen der stereometrischen Propädeutik bringt doch schon eine Auswahl von Sätzen über unbegrenzte Gebilde als Vorbereitung zur Geometrie der Körper. Ich halte das für unnötig, in den meisten Fällen sogar für gefährlich, eben weil hier Schwierigkeiten für die Auffassung bestehen. Die Möglichkeit derartiger Betrachtungen ist zuzugeben dann, wenn man die fraglichen Gebilde erst an Körpern aufsucht, etwa einen Ebenenwinkel am Prisma, eine Senkrechte auf einer Ebene an der Pyramide (Höhe), und gewiß wird man bei der Betrachtung und Beschreibung der Körper dergleichen Dinge erwähnen, aber eine systematische Dar-

stellung wäre verfehlt. So ergibt sich uns als Aufgabe des propädeutischen Kurses der Stereometrie die Darstellung und Berechnung der einfachsten geometrischen Körper, d. h. des Prismas, der Pyramide, des Zylinders, des Kegels, des Pyramiden- und des Kegelstumpfes, der Kugel und ihrer Teile.

Bei diesen Körpern wird es sich zunächst um ihre Darstellung im Raume handeln. Man wird sich nicht damit begnügen dürfen, den Schülern Modelle in die Hand zu geben; sie müssen vielmehr angehalten werden, selbst derartige Modelle zu bauen. Sie dürfen dabei nicht auf gewisse, nach vorgeschriebenen Maßen mechanisch ausgeübte Verfahren eingedrillt werden, wie es der Handwerker mit seinen Lehrlingen tut, sie sollen im Gegenteil zu möglichster Selbständigkeit erzogen werden. Ich halte es für verfehlt, sie mit vorgegebenen Körpernetzen arbeiten zu lassen. Die Schüler sollen die Netze selber finden.

Die Herstellung plastischer Modelle wird sich besonders dann empfehlen, wenn Schnitte durch den Körper zu legen sind. In vielen Fällen wird man sich aber mit der Herstellung von Flächenmodellen begnügen können. Beim Prisma, bei der Pyramide, beim Zylinder, beim Kegel, sollte man keinesfalls auf den selbständigen Entwurf eines Flächennetzes und dessen Zusammensetzung zu einem Flächenmodell verzichten. Ich empfehle, auf die verschiedenen Möglichkeiten des Zusammenhanges der Einzelflächen im Netz zu achten, auch die Frage, wo beim Zusammenstellen des Modells Klebfalze anzubringen sind, zu beantworten. Bei den von Ebenen begrenzten Körpern erscheinen auch Kantenmodelle sehr erwünscht; sie sind einfacher als Flächenmodelle und sollten dem Entwerfen des Netzes vorangehen.[1] Die Andeutung von Körpern durch Scharen ebener Schnitte, wie sie bei Flächen zweiter Ordnung vielfach sehr glücklich benutzt worden sind, wird in der Schule weniger angewandt werden können. Höchstens könnte man bei der Kugel an Darstellungen durch größte Kugelkreise denken, wie sie z. B. in dem „Kleinen Geometer" der beiden Young angegeben sind.

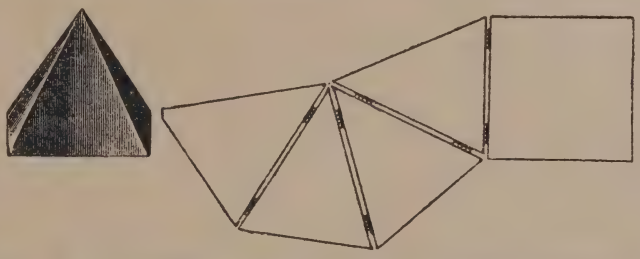


Fig. 48. Vierseitige Pyramide mit abklappbarem Blechmantel, der das Netz zur Anschauung bringt. Ausführung von der Firma Günzel, Kötzschenbroda.

Ich erwähne bei dieser Gelegenheit auch die Erzeugung einzelner Körper durch Rotation einfacher ebener Flächen, des Rechteckes, des Kreises, des Dreieckes, des Trapezes. Praktisch führt man die Rotation mit einer Drehscheibe aus oder auch, indem man die Fläche etwas dick wählt, etwa aus Wellpappe[2], und eine Stricknadel als Drehachse nimmt und sie leicht mit den Fingern dreht.

[1] Über praktische Methoden zur Herstellung von Kantenmodellen habe ich schon gelegentlich des propädeutischen Unterrichtes der Geometrie (Kap. 2) einiges gesagt.

[2] Anwendungen der Wellpappe sind in dem auch andere nette Arbeitsweisen angebenden Büchelchen beschrieben: O. Frey, Geometrischer Arbeitsunterricht, Leipzig (Wunderlich) 1914.

Eine wichtige Aufgabe der propädeutischen Stereometrie ist es, die Schüler mit den Methoden ebener Darstellungen der Körper bekannt zu machen. Die Zeiten liegen noch gar nicht lange hinter uns, wo auf eine richtige, oder sagen wir nach mathematischen Grundsätzen verfahrende Darstellung der Körper kein Gewicht gelegt wurde. Nicht nur dem Schüler ließ man jede, auch die mangelhafteste Zeichnung durchgehen — ich habe in Abiturientenarbeiten die merkwürdigsten Exemplare von Pyramiden und Kugeln gesehen —, auch in den Lehrbüchern fand man sonderbare Gebilde. Richtige Zeichnungen in schräger Parallelperspektive konnte man bei Körpern wie Kugel, Kegel, Zylinder kaum je finden, auch mit „Schnabelellipsen" und anderen Dingen primitivster Zeichenkunst wurde gearbeitet. Demgegenüber ist es keine zu weitgehende Forderung, die im propädeutischen Kursus der Stereometrie in Betracht kommenden Körper vom Schüler einwandsfrei in schräger Parallelperspektive und ebenso im Grundriß-Aufriß darstellen zu lassen. Natürlich muß man bei der Erklärung dieser Verfahren immer unmittelbar von der räumlichen Anschauung ausgehen; eine weitausholende Projektionslehre hat man nicht nötig. Sehr nützlich ist ein wahlfreier Linearzeichenunterricht, der mit mehr Zeit und zu den Anwendungen fortschreitend den mathematischen Unterricht unterstützt.[1] Davon wird im 3. Band ausführlicher die Rede sein.

Fig. 49. Apparat zum Anzeigen der projizierenden Strahlen bei perspektivischer Verkürzung. Firma: Ehrhard, Bensheim (Hessen).

Dieselben Körper, von deren Darstellung wir eben sprachen, sind dann auch zu berechnen. Man tut nach meinen Erfahrungen gut, beides, Darstellung und Berechnung, sofort bei jedem einzelnen Körper zu behandeln, nicht etwa erst die Darstellung aller in Betracht kommender Körper durchzugehen, um sich dann in gleicher Folge mit der Rechnung zu befassen.

Man beginnt mit dem Würfel und dem Quader. Diese Körper, deren Berechnung fast trivial ist, jedenfalls dann, wenn die Einführung der Körpermaße gründlich erfolgt ist, sind die geeignetsten Ausgangspunkte für eine Einführung in die Methoden, auf die es hier ankommt. Nimmt man das schiefwinklige Parallelflach hinzu, so tritt bei der Berechnung schon hier ein im späteren vielbenutztes Verfahren in seine Rechte, der Grundsatz von Cavalieri.

Das Cavalierische Prinzip lautet, auf seine analytische Form gebracht: Für ein bestimmtes Intervall von x folgt aus $f(x) = g(x)$, auch $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$, integriert über dieses Intervall oder einen Teil davon. Man hat dieses Prinzip nach

[1] Ich nenne hier als anregendes Buch: C. H. Müller und O. Presler, Leitfaden der Projektionslehre. Ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie. 2 Ausgaben, Leipzig (Teubner) 1903.

den verschiedensten Seiten erweitert. Für den propädeutischen Kursus reicht es aber in der Form, in der man es in den meisten Lehrbüchern ausspricht, völlig aus. Wenn man zwischen zwei parallele Ebenen zwei Körper so legen kann, daß jede dritte, zu den beiden ersten parallele Ebene beide Körper in flächengleichen Figuren schneidet, so sind die beiden Körper inhaltsgleich.

Manchmal hat man versucht, für die Fälle, auf die es ankommt, mit einer vollständigen Durchführung des Grenzüberganges geradezu einen Beweis zu geben oder doch wenigstens anzudeuten. Die wirkliche Ausführung des Grenzüberganges ist beim Prisma verhältnismäßig leicht. Bei der Pyramide muß man einen geschlossenen Ausdruck für die Summe der Quadrate der ganzen Zahlen kennen. Dieser Ausdruck wird in der Regel im Anschluß an die arithmetischen Reihen abgeleitet. Also bleibt nur übrig, entweder den stereometrischen Kursus bis nach der Ableitung dieser Formel zu vertagen, oder auf diese infinitesimale Begründung mit Hilfe des Grenzbegriffes vorderhand zu verzichten.

Fig. 50.
Modell für die Zerlegung eines dreiseitigen Prismas in drei Pyramiden.

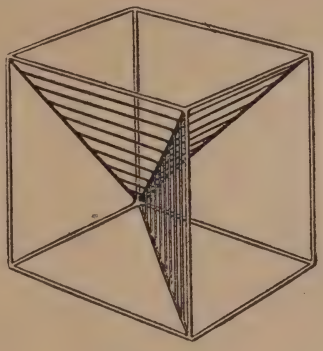


Fig. 51.
Modell für die Zerlegung eines Würfels in drei Pyramiden.

Nach einem englischen Modellkatalog.

Daß man später dem Wesen des Cavalierischen Prinzipes mit den Methoden der Integralrechnung näher tritt, ist selbstverständlich, wenn man überhaupt Integralrechnung betreibt. Umgekehrt benutzen einige Methodiker den Cavalierischen Grundsatz, um elementare Inhaltsberechnungen in solchen Fällen auszuführen, in denen man sonst die Integralrechnung verwendet.[1]

Man könnte sich fragen, ob es nicht möglich wäre, die Ableitung der Inhaltsformeln ohne Cavalierisches Prinzip, allein mit der Zerlegungsgleichheit zu zwingen. In der Ebene waren ja (vgl. S. 142) alle inhaltsgleichen Vielecke zerlegungsgleich, man kam also mit der „Endlichgleichheit" aus. Bei den Körpern trifft das nicht zu, wie Dehn gezeigt hat.[2] Inhaltsgleiche Polyeder sind nicht immer zerlegungsgleich, man kommt ohne „Grenzgleichheit" nicht aus. So sind zwar zwei schiefe Prismen mit gleichen Grundflächen und Höhen zerlegungsgleich, hingegen ist ein Tetraeder sicherlich nicht einem inhaltsgleichen Prisma, etwa mit der gleichen Grundfläche

[1] R. Hunger, Elementare Inhaltsberechnung der Rotationskörper der Kegelschnitte Ubl 20 (1919) S. 89ff.

[2] Grundlegend sind die Arbeiten: M. Dehn, Über raumgleiche Polyeder, Nachr. d. Gesellsch. d. Wiss. in Gött., Math. Phys. Klasse 1900 S. 345ff.; ders., Über den Rauminhalt, Mathematische Annalen **55** (1902) S. 465ff.; Kagan, Über die Transformation der Polyeder, ebenda **57** (1903) S. 421ff. — Im übrigen verweise ich auf Killing und Hovestadt (S. 118 Anm. 1) S. 138ff.

und einem Drittel der Tetraederhöhe, zerlegungsgleich; auch zwei inhaltsgleiche Tetraeder sind im allgemeinen nicht zerlegungsgleich.

Den Übergang von der Inhaltsformel des Prismas zu der der Pyramide vermittelt die Zerlegung des dreiseitigen Prismas in drei dreiseitige Pyramiden (Fig. 50). Man kann übrigens auch den Würfel in ähnlicher Weise in drei Pyramiden zerlegen (vgl. Fig. 51). Erfahrungsgemäß machen diese Zerlegungen den Schülern rein anschauungsgemäß große Schwierigkeiten. Es genügt nicht, ein vorher präpariertes Modell vorzuführen. Die Schüler müssen die Schnitte möglichst selbst ausführen und die entstehenden Körper in schräger Parallelperspektive darstellen.

Eine Bemerkung muß zu einem Ausdruck gemacht werden, dem man oft begegnet, ohne daß der Begriff einigermaßen geklärt wäre. Es wird sehr oft von „geraden" Pyramiden gesprochen.[1] Was heißt das? Bei regelmäßiger Grundfläche ist es ja selbstverständlich. Wie aber in anderen Fällen? Wenn die Grundfläche einen Mittelpunkt hat, also zentralsymmetrisch ist, oder wenn es sich um ein einem Kreise einbeschriebenes Vieleck — etwa ein Sehnenviereck handelt —, erscheint die Sachlage auch noch einigermaßen klar. Man beachte aber, daß dann eine gerade Pyramide, die auf der Grundfläche steht, durchaus nicht stabil zu sein braucht. — Jedenfalls sollte man sich deutlich darüber aussprechen, was man unter der geraden Pyramide versteht. Manche Autoren scheinen den Begriff für selbstverständlich zu halten. Das ist er durchaus nicht. Bei einer dreiseitigen Pyramide ist z. B. von einer Seite vorgeschlagen worden, als entscheidendes Merkmal die Gleichheit der Neigungswinkel der Seitenflächen gegenüber der Grundfläche zu betrachten. Dann ist also der Fußpunkt der Höhe Mittelpunkt des Inkreises der Grundfläche, während er vorher Mittelpunkt des Umkreises der Grundfläche war.

Während sich der gerade Zylinder und der gerade Kegel — nur diese wird man in der Propädeutik berücksichtigen — ohne längere Rechnung sehr leicht bewältigen lassen, entstehen einige, wenn auch geringfügige rechnerische Schwierigkeiten bei Pyramiden- und Kegelstumpf, wenn man die Höhe der Ergänzungspyramide bzw. des Ergänzungskegels bestimmt. Hasenklevers „Sohn" scheitert bekanntlich an der Ableitung dieser Formel in der Reifeprüfung. Andererseits zeigte Polya[2] gerade an diesem Beispiel einmal, wie ein mathematischer Ausdruck gefunden wird. Es könnte fraglich erscheinen, ob man die Stumpfe hier schon behandeln soll. Ich möchte dazu raten; der Exkurs in die Arithmetik kann nur erwünscht sein. — Daneben führt man nicht selten Näherungsformeln für die Rauminhalte der Stumpfe ein. Man multipliziert die Höhe entweder mit dem Mittelschnitt oder mit dem arithmetischen Mittel aus Grund- und Deckfläche. Man wird solche Näherungsformeln gern benutzen und an der richtigen Formel ihre Genauigkeit messen.

In früheren Zeiten pflegte man im Anschluß an den Kegelstumpf verschiedene Formeln für den Inhalt von Fässern zu entwickeln, natürlich nur Näherungswerte. Die Volksschule hat vielfach noch heute an diesen Körpern festgehalten, obwohl der praktische Wert dieser „Visierkunst" von ehedem in Wegfall gekommen

[1] Vgl. dazu Lucke, Über die sogenannte gerade Pyramide, ZmnU 21 (1890) S. 494ff. — Klang, Zur Definition der geraden Pyramide, ebenda 24 (1893) S. 180.
[2] G. Polya, Geometrische Darstellung einer Gedankenkette. Schweizer Pädagogische Zeitschrift 1919, Heft 2.

ist; alle diese Hohlformen werden, wenn sie im gewerblichen Leben benutzt werden, einfach geeicht.

Am schwierigsten ist die Ableitung der Oberflächen- und Inhaltsformel bei der Kugel. Zwischen beiden Größen besteht die Beziehung $V = \frac{1}{3}O \cdot r$. Diese Gleichung ist recht sorgfältig abzuleiten; nicht selten wird ein wenig oberflächlich darüber hinweggehuscht. Man hört da von Kegeln, deren Spitzen im Mittelpunkt der Kugel liegen, obwohl doch keinesfalls die Grundflächen dieser Kegel die Kugeloberfläche lückenlos decken. Man darf wohl fordern, daß klar gesagt wird, in welcher Weise die Kugeloberfläche in Teile zerlegt wird, um die beliebig große Zahl der Pyramiden zu gewinnen. Wenn da z. B. leichthin gemeint wird, es solle sich um lauter kongruente Dreiecke handeln, so ist dem entgegen zu halten, daß damit ganze Scharen von Körpern postuliert werden, die es nicht gibt.

Nachdem die Beziehung zwischen Volumen und Oberfläche der Kugel hergestellt, ist jetzt mindestens eine der beiden Größen auszurechnen. Das häufigste Verfahren gründet sich auf das Cavalierische Prinzip (vgl. das Modell auf Tafel II). Man weist nach, daß die Halbkugel inhaltsgleich einem Körper ist, der durch Ausschneiden eines Kegels aus einem Zylinder entsteht — wobei alle drei Körper gleiche Höhe und gleiche Grundfläche haben. Es wird zuweilen geklagt, daß die Schüler diesen Beweis schwer auffassen. Wenn sie einigermaßen in räumlicher Anschauung geübt sind, scheinen mir solche Klagen unberechtigt. Allerdings muß man einige Sorgfalt darauf verwenden, den Ausgangspunkt dieses Archimedischen Beweises auf heuristischem Wege zu erarbeiten. Ist d der Abstand einer die Kugel schneidenden Ebene vom Mittelpunkt, so ist die Fläche des Schnittkreises $\pi(r^2 - d^2) = \pi r^2 - \pi d^2$, also als Kreisring darstellbar. So wird deutlich, daß man einen Vergleich mit dem aus Zylinder (Querschnitt πr^2) und Kegel (Querschnitt πd^2) gebildeten Restkörper vornehmen muß.

Auch die andere Erschließung der Kugelformeln, bei der man von der Oberfläche, nicht vom Inhalt ausgeht, ist nicht einfach. Man faßt die Kugeloberfläche als Integral unendlich schmaler Mäntel von Kegelstumpfen. Die Integration läßt sich, man ist versucht zu sagen durch Zufall, elementar ausführen. — Die Herleitung der Formeln für Kugelabschnitt, Kugelzone und Kugelschicht bringt keine neuen Schwierigkeiten.

So ist das Pensum, das wir dem propädeutischen Kursus in Stereometrie zugeschoben haben, durchaus nicht klein. Hinzu kommen noch die zahlreichen Aufgaben, die das Ganze beleben müssen. Man sollte sich nicht ganz oder fast ausschließlich auf Berechnungsaufgaben beschränken, wie es in den meisten stereometrischen Aufgabensammlungen geschieht. Ebenso wichtig sind Darstellungen von Körpern und Körperteilen, geometrische Konstruktionen von Schnitten u. dgl. Wir kommen ausführlich auf die stereometrische Aufgabe im nächsten Abschnitt zurück.

Auch die stereometrische Berechnungsaufgabe verdient natürlich eine besondere Pflege. Die Körper, um die es sich im propädeutischen Kursus handelt, sind nicht bloß mathematisch die einfachsten. Es sind auch diejenigen, die sich am leichtesten praktisch herstellen lassen und die deshalb in der Welt der Wirklichkeit am häufigsten vorkommen. Da ist es eine unserer modernen Auffassung vom mathematischen Unterricht entsprechende Forderung, daß auch in unseren Berechnungs-

aufgaben nicht bloß von abstrakten mathematischen Gebilden geredet wird, von Würfeln, Kugeln und Zylindern, die einer Kugel einbeschrieben werden und was dergleichen Aufgaben mehr sind, sondern daß konkrete Gegenstände behandelt werden. Gerade hier braucht man wirklich nicht lange nach praktischen Anwendungen Ausschau zu halten. Eine große Zahl von Berufen hat es andauernd mit Körperberechnungen zu tun; an Gegenstände wie Ziegelstein, Streichholzschachtel, Schrotkugel, Dampfkessel, Geldstück, Bleistift und viele andere schließen sich Preisberechnungen und andere Kalkulationen des praktischen Lebens in mannigfaltigster Zahl an. So selbstverständlich sie ist, sei doch noch eine Bemerkung zu diesen Aufgaben des Lebens gemacht. Bei fast allen Inhaltsaufgaben muß man aus der Physik den Begriff des Gewichtes und des spezifischen Gewichtes heranziehen. Da der moderne physikalische Unterricht dafür sorgen wird, daß der Schüler gleich im ersten Physikunterricht mit diesen Begriffen vollständig vertraut wird, kann sich der Mathematiker mit einer bloßen Entlehnung begnügen. Immerhin wird es gut sein, mit gelegentlichen praktischen Erprobungen der mathematischen Ergebnisse (Füllen von Hohlkörpern mit Sand und Wasser, Wägen von Vollkörpern) für eine Festigung dieser Begriffe zu sorgen.

Als eine Art Rückblick auf die Stereometrie des Vorkurses mag man eine Diskussion der Formeln für Oberfläche und Rauminhalt hinsichtlich ihrer Dimension ansehen. Dem Mathematiker sind diese Dinge so geläufig, daß er häufig vergißt, seine Schüler darauf ausdrücklich aufmerksam zu machen. Und doch merkt der Lehrer sehr oft an den Verstößen der Schüler, etwa bei Formeln für die Kugelabschnitte und Kugelausschnitte, daß der Dimensionsbegriff der stereometrischen Formel ausdrücklich erklärt werden muß. Der Freund graphischer Darstellungen wird dabei nicht versäumen, das Anwachsen der Flächen und Körperinhalte bei zunehmender linearer Ausdehnung durch Parabeln darstellen zu lassen. Auf jeden Fall sind Fragen, wie sich die Oberflächen verhalten, wenn sich die linearen Ausdehnungen wie $m : n$ verhalten, wie sich die linearen Ausdehnungen verhalten, wenn sich die Volumina wie $m : n$ verhalten, usf., notwendig. Es verschlägt nichts, wenn die große Bedeutung dieser Beziehungen für Technik und Leben den Schülern an besonderen Beispielen eindringlich vor Augen geführt wird. Ich erinnere nur daran, wie durch die Verkleinerung der einzelnen Blutkörperchen bei gleichbleibender Gesamtmasse die Oberfläche vergrößert wird, so daß die gesamte Oberfläche, ich glaube, angenähert 4000 m^2 beträgt; ähnlich liegen die Dinge bei den Bläschen in der Lunge. Wir haben hier ein Grundgesetz in Natur und Technik vor uns, das der Schüler begriffen haben muß, und das er am besten begreift, wenn man ihm mit Zahlen kommt.[1]

2. Die „systematische" Stereometrie.

Die systematische Stereometrie beginnt mit einer Erörterung der Beziehungen zwischen Geraden und Ebenen im Raum. Sie bleibt dann bei den Ecken stehen und wendet sich schließlich dem allgemeinen Begriff des geschlossenen Körpers zu.

Natürlich entsteht hier zunächst wieder die Frage nach der Grundlegung. Einige Lehrbücher benutzen die Gelegenheit, an dieser Stelle eine Zusammenstellung der

[1] Vgl. hierzu M. Schips, Mathematik und Biologie, MPhB 42, Leipzig (Teubner) 1922.

wichtigeren Axiome der Geometrie nachzuholen, freilich ohne irgendwie vollständig zu sein. In der Tat ist in diesem Gebiet das für die Schüler Schwierige nicht so sehr die geometrische Tatsache — die liegt fast immer vollkommen klar —, sondern der Beweis; man ist verlegen in der Auswahl der einfacheren Sätze, auf die man die Beweise stützen soll. Und da kann es in der Tat wünschenswert erscheinen, die Grundsätze, die man benützen darf, beieinander zu haben.[1] Ich glaube trotzdem, daß auch diese Stelle noch nicht der geeignete Ort ist, in die Axiome der Geometrie einzudringen, das geschieht viel besser dann, wenn das Lehrgebäude der Geometrie abgeschlossen vor dem Schüler liegt. Deshalb gebe man hier die Grundlagen und die Grundbegriffe wieder in rein anschaulicher Form. Es ist außerdem zu erwägen, ob man sich nicht in weniger guten Klassen damit begnügt, an einigen wichtigeren Beispielen von Sätzen, etwa dem Satz von der Senkrechten auf einer Ebene, dem Satz vom Schnitt dreier Ebenen, von der Gleichheit der Winkel mit gleichgerichteten Schenkeln usw. zu zeigen — hier aber nun ganz sorgfältig und gründlich — wie in diesem Gebiete Sätze auf frühere, einfachere zurückgeführt werden. Auf Vollständigkeit und Lückenlosigkeit des Satzsystems könnte man dann verzichten.

Fig. 52.
Blümels Apparat zur Veranschaulichung der Sätze über Geraden und Ebenen im Raum. Firma: Leppin und Masche, Berlin.

Ganz besonderen Wert hat man bei diesen Sätzen über unbegrenzte Raumgebilde darauf zu legen, daß ihr Inhalt den Schülern anschaulich klar ist. Modelle mit Papptafeln und Fäden, sorgfältige Zeichnungen, immer von den Schülern selbst ausgeführt, müssen da helfen. Ein gutes Hilfsmittel bieten auch stereoskopische Darstellungen.

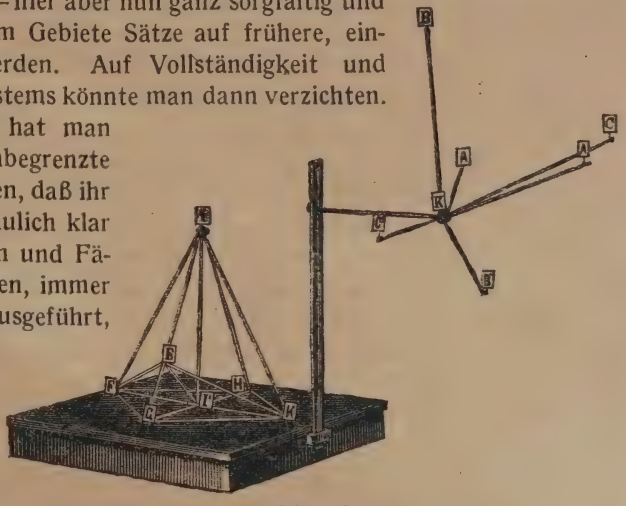


Fig. 53.
Verwendung des Blümelschen Apparates.

Das Gebiet dieser Sätze bleibt für eine Schulung der Raumanschauung ungenützt, wenn man nicht durch Konstruktionen für Belebung des Stoffes sorgt. Man kann drei Arten von stereometrischen Konstruktionen unterscheiden, worauf vor langen Jahren schon

[1] Ich führe nach Hilbert die „stereometrischen" Axiome der Verknüpfung an: (1) Durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, ist eine Ebene bestimmt; (2) eine Gerade, die zwei Punkte mit einer Ebene gemein hat, liegt ganz in der Ebene; (3) zwei Ebenen, die einen Punkt gemein haben, haben noch einen zweiten Punkt gemein.

H. Thieme, ein unermüdlicher Verfechter stereometrischer Konstruktionen, hingewiesen hat.[1] Zunächst kann es sich um eigentliche planimetrische Konstruktionen handeln, mit denen stereometrische Aufgaben in der Weise gelöst werden, daß man an den ebenen Netzen der Körper, Ecken usf. operiert. Als Beispiel nenne ich die Konstruktionen dreiseitiger Ecken aus drei Stücken.

An zweiter Stelle kommen die stereometrischen Konstruktionen im eigentlichen Sinne des Wortes in Betracht. Man führt das neue Postulat ein, daß eine Ebene als Zeichenebene angenommen werden darf, wenn drei ihrer nicht in einer Geraden liegenden Punkte bekannt sind. Nun lassen sich die fundamentalen Konstruktionen, das Errichten und Fällen von Senkrechten z. B., im Raume selbst ausführen. Handelt es sich hier auch vielfach nur um eine Gedankengeometrie, so wird doch gerade dadurch die Anschauungsfähigkeit der Schüler sehr gefördert.

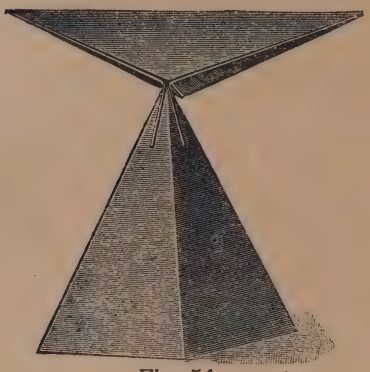


Fig. 54.
Ecke mit ihrer Polarecke.
Nach Koepp. Firma: Ehrhard, Bensheim (Hessen).

Die dritte Gruppe stereometrischer Aufgaben, bei denen man nicht an den Raumgebilden selbst, sondern an ihren Projektionen operiert, wird uns in der darstellenden Geometrie beschäftigen.

Aufgaben, die an die Begriffe und Lehrsätze in Gestalt von Übungssätzen anschließen, gibt es in großer Zahl. Ich möchte nur an zweierlei erinnern. Der Satz von der Senkrechten auf eine Ebene gibt Gelegenheit, den Beweis von Cauchy mit demjenigen von Euklid auf seine Einfachheit hin zu vergleichen. Cauchy kommt mit zwei kongruenten Dreieckspaaren weniger aus als Euklid. — Schöne Vergleichsmöglichkeiten gibt die Analogie zwischen Planimetrie und Stereometrie, z. B. von Dreieck und dreiseitiger Ecke. Dabei ist nun aber wieder der Gegensatz von Ebene und Raum bei der Behandlung von Kongruenz und Symmetrie dieser Gebilde sehr lehrreich.

Es empfiehlt sich, mit den Schülern möglichst oft auch die stereometrischen Grundbegriffe in der Welt der Wirklichkeit aufzusuchen. Ich möchte zunächst die außerordentlich selten aufgeworfene Frage nennen, wie praktisch Geraden und Ebenen hergestellt werden.[2] Ich erinnere weiter an jenen bekannten Satz, daß die Summe der Seiten einer Ecke nicht vier Rechte übersteigt. Andrade, wenn ich mich recht erinnere, hat ihn den Regenschirmsatz genannt, weil man in der Tat an einem etwas brüchigen Regenschirm sehr deutlich sieht, daß er zerreißen muß, ehe die Seitensumme voll in eine Ebene ausgebreitet werden kann.

Aus der allgemeinen Körperlehre findet man schon seit langer Zeit den Eulerschen Satz in allen Lehrbüchern. Man hat aber den Eindruck, als ob er eine recht isolierte Stellung einnimmt, und das um so mehr dann, wenn er fälschlicherweise nicht zur Herleitung der Anzahl regelmäßiger Körper herangezogen wird. Man

[1] H. Thieme, Die stereometrischen Konstruktionsaufgaben, ZmnU 23 (1892) S. 561ff.
[2] Vgl. hierüber H. Dingler, Die Grundlagen der angewandten Geometrie, Leipzig (Akad. Verlagsgesellsch.) 1911.

Jeder Bücherfreund, dessen Adresse der Verlagsbuchhandlung **Quelle & Meyer, Leipzig,** Kreuzstraße 14 übermittelt ist, erhält unberechnet und postfrei den reich illustrierten

VERLAGS-KATALOG

aus allen Gebieten des Wissens sowie Anzeigen über wichtige Neuerscheinungen aus den näher anzugebenden Disziplinen. Wir bitten die Freunde unseres Verlages ihr Interesse auch dadurch zu bestätigen, daß sie uns umstehend möglichst zahlreiche Adressen von Freunden und Bekannten mitteilen, die sich für unsere Werke interessieren dürften und danken ihnen im voraus für Ihre Bemühungen.

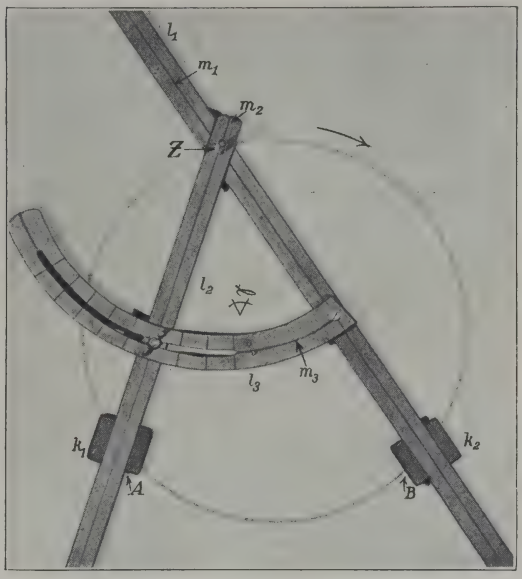
VERLAG

QUELLE & MEYER

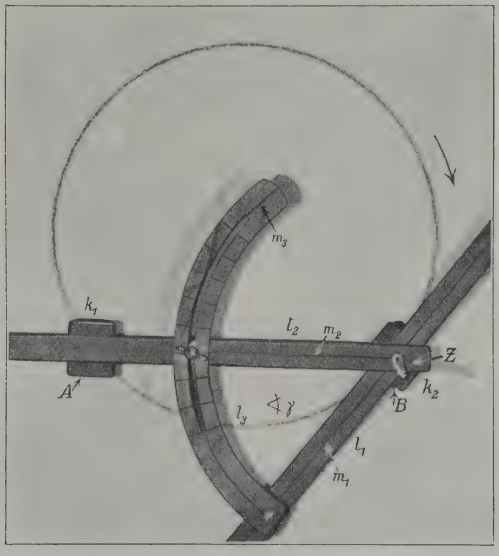
LEIPZIG

Name	Stand	

	Straße	Interessengebiet f. Neuerscheinungsberichte



Peripheriewinkel.

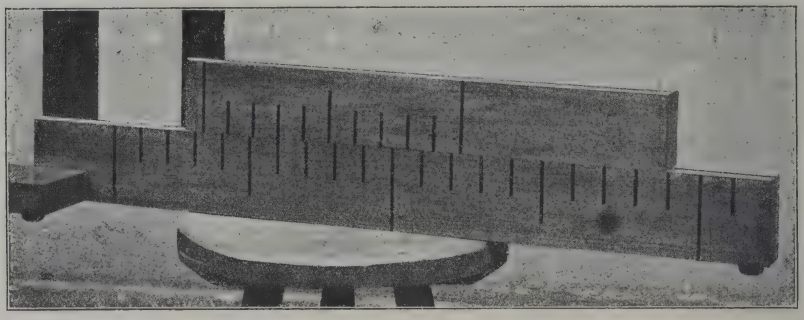


Sehnentangentenwinkel.

Modell zur Anwendung der Peripheriewinkelsätze von A. Finzel.

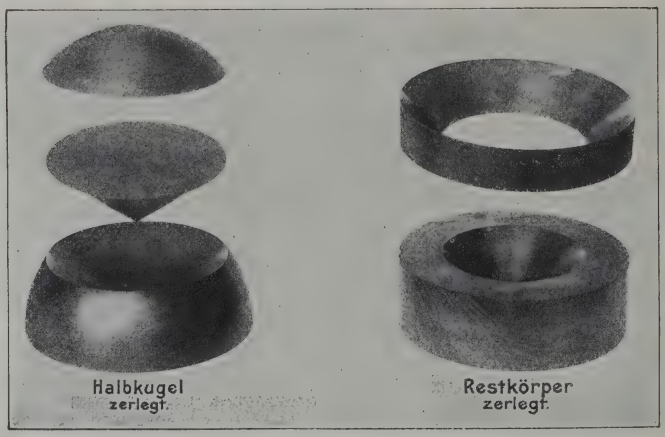
Herstellung durch Firma Joh. Buchholz, Berlin-Wilmersdorf.

Vgl. ZmnU **50** (1919) S. 305ff.



Große Noniusmodelle.

Ausführung der Firma Leppin & Masche, Berlin.



Modelle für die archimedische Ableitung des Kugelinhaltes.

Ausführung der Firma E. Schotte, Berlin W, Potsdamer Str. 41a.

bringt den Eulerschen Satz aus seiner Isoliertheit, in der er uns nur als eine merkwürdige und überraschende Tatsache ohne allen Konnex mit ähnlichen Sätzen erscheint, heraus, wenn man auch seine Analogie in der Ebene betrachtet. Hat man in der Ebene ein einfach zusammenhängendes, aus f einfach zusammenhängenden Flächen mit k Kanten und e Ecken bestehendes Flächennetz, so ist der Wert

$$I_2 = e - k + f$$

eine Invariante und hat den Wert 1. Die Tatsache läßt sich leicht durch allmähliches Weglassen von Flächen von außen her, oder von Kanten von innen her, nachweisen. Den Eulerschen Satz beweist man dann am zweckmäßigsten, indem man den Körper mit allen seinen Flächen usw. in geeigneter Weise auf eine Ebene projiziert; dann hat man zwei übereinander gelagerte Flächennetze, für die die obige Invariante naturgemäß 2 ist. Man kann dem Eulerschen Satz jetzt die Form geben

$$I_3 = e - k + f - r = 1$$

wo r die Anzahl der räumlichen Mannigfaltigkeiten (hier also $r = 1$) angibt. Dieser Satz gilt dann nämlich auch für einen Körperhaufen, wenn nur die Zusammenhangsverhältnisse überall einfach sind. Es setzt die Schüler immer sehr in Erstaunen, wenn man sie auf die Bedeutung dieses Satzes etwa für einen Haufen von Mauersteinen hinweist. Bekanntlich kann man nun auch in höhere Dimensionen übergehen. Ich finde sogar, daß es gar nicht schwer ist, die Projektion eines vierdimensionalen Körpers mit allen seinen begrenzenden dreidimensionalen Körpern im dreidimensionalen Raum den Schülern durch Analogieschluß plausibel zu machen, die zweifache Überdeckung eines Raumstückes mit zwei Körperhaufen. Die Invariante I_4 ist danach für den vierdimensionalen Körper leicht zu berechnen.

Wird in dieser Weise durch den Eulerschen Satz eine Beziehung zwischen den verschiedenen Dimensionen hergestellt — man kann ihn ja auch für die eindimensionalen Gebilde aussprechen —, so ist eine Erweiterung nach anderer Richtung dadurch gegeben, daß man die Mannigfaltigkeit der Flächen und Körper im Sinne der Analysis situs hier zur Sprache kommen läßt. Überlegungen, daß der Eulersche Satz versagt, wenn eine der Flächen nicht mehr einfach zusammenhängend ist, wie Körper aussehen, die nicht mehr einfach zusammenhängen, kurz, einen Ausblick in die Analysis situs, bei der auch Dinge, wie das Möbiussche Blatt, als Beispiel einseitiger Flächen nicht zu fehlen brauchen, kann man an dieser Stelle sehr zweckmäßig einschalten. Weit in die Möbiussche Polyedertheorie einzudringen, selbst wenn man an die entsprechenden planimetrischen Überlegungen herangegangen sein sollte, wird wohl kaum möglich sein.

Eulers Satz braucht man, wenn man nachweisen will, daß mit den leicht zu findenden fünf regelmäßigen Körpertypen die Anzahl der überhaupt möglichen regelmäßigen Körper erschöpft ist. Ich sagte schon, daß diese Beziehung in den Lehrbüchern nicht immer klar genug herausgearbeitet wird. Wie weit man sich auf die Berechnung und Darstellung der regelmäßigen Körper einläßt, wird sich nach der zur Verfügung stehenden Zeit richten. Ikosaeder und Dodekaeder — die anderen Körper sind ja schnell erledigt — geben guten Übungsstoff für Rechnung und Zeichnung, weil bei ihnen der goldene Schnitt maßgebend ist. Man kann auch daran er-

innern, welche Bedeutung die platonischen Körper in der Philosophie der Alten und später noch in der Keplerschen Planetentheorie besessen haben[1]. Auf andere Typen von Polyedern einzugehen, wird nur in günstigen Fällen Zeit sein[2].

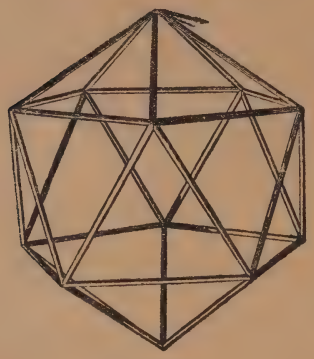


Fig. 55.
Drahtmodell des Ikosaeders. Aus der Modellsammlung von Wiener im Verlage B. G. Teubner, Leipzig.

Es erscheint mir sehr fraglich, ob es notwendig sein wird, die Formeln für die Oberflächen und Volumina der einfachen Arten von Körpern zu wiederholen, die bereits im Vorkurs behandelt worden sind. Wenn man aber dennoch eine solche Wiederholung für nützlich hält, dann empfiehlt es sich, einige neue Gedanken zu den alten Formeln hinzuzufügen. Ich nenne beispielsweise Tetraederformeln und -sätze bei der Behandlung der Pyramide, schräge Schnitte durch Kegel und Zylinder, allgemeine Polyederformen und dgl.

Daß der schräge Schnitt durch einen Zylinder eine Ellipse ist, wird man ja doch irgendwann einmal ableiten müssen. Ich mache aber gern darauf aufmerksam, daß man diese Tatsache zur Berechnung des Ellipseninhaltes ausnützen kann. Man kann den Inhalt eines durch zwei parallele Ebenen schräg abgeschnittenen Zylinders einmal nach dem Cavalierischen Grundsatz, zum anderen in einfacher Weise als Kreiszylinder berechnen und erhält aus der Gleichsetzung beider Inhaltswerte einen Ausdruck für die Grundfläche des schief abgeschnittenen Zylinders.

Ebenso wird man früher oder später den Nachweis erbringen müssen, daß die schrägen Schnitte durch den geraden Kreiskegel Kegelschnitte im Sinne der Ortsdefinitionen auf Grund der Brennpunktseigenschaften sind. Der Nachweis ist nicht schwer, erfordert aber beim Entwerfen der zugehörigen Figuren einige Raumanschauung.

Von allgemeineren Körpertypen hat man früher vielfach das Prismatoid studiert. Es ist das ein Polyeder, dessen Grundflächen zwei in beliebigen parallelen Flächen liegende Polygone und dessen Seitenflächen im allgemeinen Dreiecke sind, welche jeweils mit der einen Grundfläche eine Seite, mit der anderen eine Ecke gemeinsam haben. Die Theorie dieses Körpers, den schon Steiner untersucht hat, ist von Wittstein entwickelt worden. Für das Volumen des Prismatoids ergibt sich der einfache Ausdruck $\frac{1}{3}h\,(M + 2D)$, wo h der Abstand der beiden Polygonebenen, M das arithmetische Mittel der beiden Grundflächen, D der Mittelschnitt ist. Ver-

[1] Vgl. etwa J. Kepler, Die Zusammenklänge der Welten ... Ausg. von O. J. Bryk, Jena (Diederichs) 1918.

[2] Ich nenne: M. Brückner, Vielecke und Vielflache; Theorie und Geschichte, Leipzig (Teubner) 1900 und H. Thieme. Dazu M. Brückner, Zur Geschichte der gleicheckig-gleichflächigen Polyeder, Umn 13 (1907) S. 104ff. Außerdem aus neuerer Zeit: A. Leman, Über halbreguläre Körper, ZmnU 47 (1916) S. 105ff.; E. Böttcher, Dreiflachkörper — Dreieckskörper, Ebenda S. 318ff.; ders. Aufsteigende Polyederliste, Ebenda S. 322 ff.

allgemeinerungen des Prismatoides sind der Zentralkörper von Heinze[1] und der Simpsonsche Körper. Meiner Meinung nach kann man auf alle diese Körper, das Prismatoid eingeschlossen, in der höheren Schule verzichten. Auch die Sonderfälle des Prismatoides, Obelisk, Sphenisk und wie sie sonst noch heißen mögen, können unerwähnt bleiben. Sollten wirklich einmal derartige Körper dem Schüler entgegentreten, so wird er sich durch Zerlegung und Zurückführung auf bekannte andere Körper zu helfen wissen. Der Techniker hat es vorzugsweise mit prismatischen und pyramidalen Formen zu tun, fast nie (Ausnahme: das Baugewerbe) mit Körpern vom Typus des Prismatoids.

Wichtiger erscheint mir ein Wort über die praktische Ausmessung des Volumens eines Körpers von unregelmäßiger Form. Wir haben da die Methoden des Eintauchens in Wasser oder Einhüllens in Sand, die schon Heron angegeben hat, dann die auf dem archimedischen Prinzip fußenden Verfahren. Nicht unwichtig erscheint mir auch, die Schüler mit der Simpsonschen Regel bekannt zu machen. Praktische Aufgaben, wie die Bestimmung des Inhaltes eines Berges (Kieslagers, Erzlagers, Steinbruches u. dgl.) auf Grund der Isohypsen des Meßtischblattes können sich an Beispiele der engeren Heimat anschließen.[2]

In einer Zeit, in der man noch nicht die Integralrechnung in den höheren Schulen trieb, half man sich bei der Berechnung von Rotationskörpern mit einem nur wenig den Integralcharakter verbergenden Verfahren, der sog. Guldinschen Regel. Es dürfte sich sehr wohl empfehlen, diese den Schwerpunkt einer rotierenden Fläche oder Kurve heranziehende Regel auch weiterhin zu benutzen, nur kann man jetzt offen integrieren, wo man es früher heimlich tat.

Im Verlaufe des stereometrischen Unterrichtes wird diese oder jene Tatsache aus einer allgemeinen Flächenlehre zur Sprache kommen können, durch die die Vielseitigkeit des Flächenbegriffes beleuchtet wird. Der Eulersche Satz kann, wie ich schon sagte, Gelegenheit geben, auf das Geschlecht von Körpern hinzuweisen. Auch der Begriff des konvexen Körpers kommt da zur Sprache. Wichtig erscheint mir besonders der Begriff der Abwickelbarkeit: Beispiel Zylinder und Kegel, Gegenbeispiel Kugel. Man kann wohl auch auf die Regelflächen hinweisen, ohne genauer auf sie einzugehen. Es genügt, ihre Erzeugung durch eine bewegte Gerade (die Schneide des Messers im Brot erzeugt immer eine Regelfläche, so ungeschickt man sich auch beim Brotschneiden anstellt) zu nennen und die Tatsache, daß nicht alle Regelflächen abwickelbar sind, durch zweckmäßige Beispiele praktisch zu belegen.

Alles das braucht nicht irgendwie ausdrücklich zusammengefaßt zu werden, es kann sich ungezwungen im Gange des Unterrichts ergeben. Zu wünschen ist nur, daß überhaupt der allgemeine Flächenbegriff — und, das mag bei dieser Gelegenheit gleich hinzugefügt werden, der Begriff der Raumkurve — dem Schüler vor Augen geführt wird.

3. Darstellende Geometrie.

Über den Unterricht in darstellender Geometrie und besonders über die praktische Ausführung zeichnerischer Aufgaben, über das Linearzeichnen, besitzen wir

[1] K. Heinze, Genetische Stereometrie, bearb. von F. Lucke, Leipzig (Teubner) 1886.
[2] Vgl. hierzu R. Rothe, Darstellende Geometrie des Geländes, 2. A. MPhB 35/36, Leipzig (Teubner) 1919.

eine Reihe ausgezeichneter zusammenfassender Darstellungen, die alle in Frage kommenden Gesichtspunkte berühren. Ich nenne in erster Linie die deutsche IMUK-Abhandlung von Zühlke[1] und die österreichische IMUK-Abhandlung von Adler und E. Müller.[2] Ich füge dann eine sich eng an den in Österreich lehrplanmäßig vorgeschriebenen Unterrichtsgang anschließende Darstellung von J. Jarosch[3] an.

Daß man die darstellende Geometrie in dem Umfange berücksichtigt, wie es heute an österreichischen, an süddeutschen und wohl auch an einigen norddeutschen Realanstalten geschieht, ist erst eine Frucht der letzten Jahrzehnte. Während diese Spanne Zeit noch nicht zugereicht hat, nun wirklich die Überzeugung von der Notwendigkeit und Nützlichkeit dieses Gebietes der praktischen Mathematik überall hindringen zu lassen, macht sich an anderen Stellen vielleicht schon eine Überkultur bemerkbar; die Methoden des Grundriß-Aufrißverfahrens werden gegenüber anderen Methoden der zeichnenden Mathematik so stark in den Vordergrund gerückt, daß man an einzelnen Anstalten von einer unangebrachten Einseitigkeit sprechen kann. Auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Cambridge sagte Sir George Greenhill geradezu, er habe an den deutschen technischen Hochschulen so viele und große Zeichensäle angetroffen, daß er etwas bedenklich gestimmt sei; mathematische Laboratorien seien ebenso wichtig. Sei dem, wie ihm sei; der Mehrzahl der höheren Schulen in Deutschland wird heute jedenfalls eher ein Mehr als ein Weniger an darstellender Geometrie gut tun.

Die darstellende Geometrie zeigt zwei Gesichter. Sie ist einmal eine mathematische Disziplin, die eine mathematische Begründung ihrer Konstruktionsmethoden verlangt, sie ist aber ebenso ein Gebiet des praktischen Zeichnens, bei dem die rein technische Ausführung der Zeichnungen eine ausschlaggebende Rolle spielt. An dieser Zwitterstellung krankt der ganze Betrieb des Zeichenunterrichtes überall da, wo Zeichenlehrer und Mathematiker einander wesensfremd gegenüberstehen. Die Frage dieses Unterrichtes ist vielfach zu einer Frage der Lehrkräfte geworden.

Man kann in dieser Hinsicht zwei Typen unterscheiden, ich will sie einmal den bayerischen und den preußischen nennen. Der bayerische Zeichenlehrer ist (wenigstens nach der Neuordnung von 1912) Akademiker, er hat nach der Reifeprüfung mindestens vier Jahre studiert, sein Staatsexamen gemacht, die pädagogische Vorbereitung erledigt und ist Oberlehrer genau so wie sein Kollege, der Mathematiker. Er hat die mathematischen Grundlagen in dem Maß, wie sie beispielsweise der Techniker besitzt, zur Verfügung, ist also auch imstande, seine Methoden der darstellenden Geometrie mathematisch zu begründen.

In Preußen ist der Zeichenlehrer meist auf dem Volksschullehrerseminar, zuweilen auch auf einer Kunstschule vorbereitet, er hat zwar auch die darstellende Geometrie vom mathematischen Standpunkte aus studiert, seine mathematischen Kenntnisse

[1] P. Zühlke, Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten, Leipzig (Teubner) 1911.

[2] A. Adler, Der Unterricht in der darstellenden Geometrie an den Realschulen und Realgymnasien; E. Müller, Der Unterricht in der darstellenden Geometrie an den technischen Hochschulen, Wien (Hölder) 1911.

[3] J. Jarosch, Methodik des Unterrichtes in der darstellenden Geometrie und im geometrischen Zeichnen, Wien (Pichler) 1913.

sind aber im allgemeinen in dem Maße weniger gründlich, als das Seminar mit seinem mathematischen Stoff unter dem Niveau der höheren Schule blieb.

Immerhin war die Frage noch nicht so sehr verwirrt in einer Zeit, wo der reine Mathematiker allein die Welt der Schule beherrschte. Neben ihn ist aber inzwischen der angewandte Mathematiker getreten, der es über sich gewonnen hat, trotz des Erstaunens mancher Hochschulprofessoren alter Schule, während seines Studiums zu Reißbrett und Zirkel zu greifen. Dieser Mathematiker, ob er nun wirklich in der „Angewandten" eine Fakultas erworben hat oder nicht, kann, was der Mathematiker älterer Zeit meist nicht konnte, selbst zeichnen. Ihm sind Tusche und die Erzeugung des beliebten „lichten Farbentones", mit dem der Zeichenlehrer früher den reinen Mathematiker aus dem Felde schlug, nicht unbekannte Dinge. Er ist ein wirksamer Konkurrent des Zeichenlehrers geworden.

Jedenfalls ist der gegenwärtige Zustand in Preußen tatsächlich der, daß von zwei Seiten um die darstellende Geometrie heftig gekämpft wird. Die Unterrichtsbehörden haben versucht, das Gebiet zwischen die beiden Parteien aufzuteilen. Der Mathematiker soll mathematisches Linearzeichnen, der Zeichenlehrer künstlerisches Linearzeichnen treiben. Die Folge ist eine große Buntscheckigkeit des Betriebes.

Die Dinge liegen, wenn ich den krassesten Fall nehme, tatsächlich so: An einer Oberrealschule hört der Schüler im obligatorischen Mathematikunterricht zuerst in der Untersekunda von schräger Parallelperspektive und Grundriß-Aufrißverfahren, wenn nicht etwa, was auch vorkommen soll, in dem fakultativen Linearzeichnen schon in Obertertia von diesen Dingen schon die Rede war. In Obersekunda behandeln dann sowohl der Zeichenlehrer in seinem künstlerischen, wie der Mathematiker in seinem mathematischen fakultativen Linearzeichnen die Methoden der darstellenden Geoetrie von neuem, diesmal freilich wohl mit der Darstellung der unbegrenzten Gebilde beginnend. Einer allein darf sich nicht mit der mathematischen Grundlegung begnügen, denn jeder muß für sich vollständig sein, da der Schüler ebenso gut nur einen Kurs wie beide besuchen kann. Dann kommt in Prima, diesmal obligatorisch für alle Schüler, noch einmal die lehrplanmäßig vorgeschriebene Einführung in die Methoden der darstellenden Geometrie. Genau so, wie in Obersekunda für den Mathematiker und für den Künstler ein Übergehen der Theorie nicht möglich war — nur Gradunterschiede werden natürlich vorhanden sein —, so ist hier natürlich ein Übergehen der Praxis unpädagogisch. Die Schüler, die am fakultativen Unterricht nicht teilgenommen haben, sollen doch auch etwas von der Sache erfahren.

Das sind offenbar unhaltbare Zustände. Das beste ist ein obligatorischer Unterricht in Linearzeichnen, den entweder der Mathematiker, der dann — ob geprüft oder nicht geprüft, ist gleichgültig, auf das Können kommt's an — „Angewandter" sein muß, oder aber der Zeichenlehrer bestreitet; dieser müßte dann aber, was heute nicht zutrifft, die Mathematik etwa im Umfange der mittleren Fakultas beherrschen. Damit fallen alle die doppelten und dreifachen Wiederholungen weg, die bei nicht obligatorischem Linearzeichnen notwendig sind. Will man freilich der Mathematik und dem Zeichnen diese in den letzten Jahren von den Vertretungen unseres Faches immer wieder geforderte Stundenvermehrung nicht zubilligen, nun dann mag man verlangen, daß beide Fächer diesen Stoff in ihren verbindlichen Lehrgang auf-

nehmen. Nur muß dann gegenseitige Abstimmung beider Fächer stattfinden und eine anderweite Entlastung des Lehrplanes eintreten, wenn man tatsächlich in der darstellenden Geometrie etwas leisten will. Sollte schließlich letzten Endes doch an dem fakultativen Lehrplan festgehalten werden, dann sollte man wenigstens ganz allgemein die darstellende Geometrie im Lehrplan des obligatorischen Mathematikunterrichtes von Prima nach Obersekunda legen, damit in dem fakultativen Unterricht diese Dinge vorausgesetzt werden können. Das ist schon vor vielen Jahren an einzelnen Schulen geschehen und später auch allgemein vom preußischen Ministerium zugelassen worden. Aber im amtlichen Lehrplan steht es eben immer noch anders.

Ich habe soeben von der Oberrealschule gesprochen. Am Gymnasium ist es weit schlimmer. Dort wird zwar vom preußischen Lehrplan eine propädeutische Einführung in die darstellende Geometrie gefordert, aber böse Leute behaupten, daß diese Einführung vielfach nur im Lehrplan steht. Was zum mindesten verlangt werden muß, schon mit Rücksicht auf das tägliche Leben, ist ein Verständnis der schrägen Parallelperspektive und des Grundriß-Aufrißverfahrens bei einfachen Körpern, etwa in dem Umfange, wie wir es in dem propädeutischen Kursus der Stereometrie vorgeschlagen haben.

Es ist nun einiges über den Umfang des Lehrstoffes zu sagen, der im pflichtmäßigen Mathematikunterricht der Realanstalten zur Behandlung kommen kann. Da die Schüler in propädeutischer Form bereits in Untersekunda mit der Grundidee der schrägen Parallelperspektive und der Orthogonalprojektion bekannt gemacht sind, kann man in der Oberstufe sofort mit den unbegrenzten Gebilden, mit Geraden und Ebenen beginnen. Man kann dieses Gebiet mit der Stereometrie in der Weise verschmelzen, daß die von der Stereometrie angeregten Konstruktionen im Zweitafelverfahren ausgeführt und in schräger Paralleldarstellung erläutert werden.

Ganz falsch ist es nun aber, hierbei stehen zu bleiben. Man muß unbedingt bis zu der Darstellung von Körpern und von ebenen Schnitten durch Körper vordringen. Einige einfache Durchdringungen kann man hinzufügen, doch ist zu raten, im allgemeinverbindlichen Unterricht nicht allzu weit zu gehen.

Auf Axonometrie wird wohl nirgends ausführlicher eingegangen. Zentralperspektive und Schattenlehre kann bei genügender Zeit erwähnt werden, ohne daß man ausführlicher wird. In dem Linearzeichenunterricht hingegen wird man die eine oder andere dieser Teildisziplinen noch etwas weiter entwickeln; das auszuführen wird Aufgabe des 3. Bandes sein. Es ist vorgeschlagen worden, die Zentralperspektive, als die natürlichste Art der Projektion, als erste zu behandeln.[1] Ich kann mich nicht damit befreunden. Man kann sie sehr wohl bei ebenen Gebilden, etwa in der Kegelschnittlehre, in umfassender Weise verwenden, ohne nun auch bei der zeichnerischen Darstellung die mathematisch durchaus nicht einfache Zentralperspektive an die Spitze zu setzen. Ganz anders liegen die Dinge, wenn man vom künstlerischen Linearzeichnen her an sie herantritt. — Ich hatte bei diesen Ausführungen

[1] C. Thaer, Ist die Zentralperspektive der Parallelperspektive bei der Darstellung der Körper im stereometrischen Unterricht in Untersekunda vorzuziehen? Ubl 21 (1915) S. 25ff. und 43ff.

hauptsächlich die preußischen Verhältnisse im Auge. Wesentlich verschieden davon ist die Sachlage in einigen süddeutschen Staaten, wo ähnlich wie in Österreich und der Schweiz seit alters her der darstellenden Geometrie ein weit größeres Stundenausmaß eingeräumt ist.

Über die Art und Weise der methodischen Behandlung der darstellenden Geometrie ist zunächst zu sagen, daß die geometrische Aufgabe vorwiegt. Man kann sogar die ganze darstellende Geometrie, die wir auf der höheren Schule treiben, in Aufgaben zergliedern. Freilich darf man dabei nicht auf die Begründung der angewandten Verfahren verzichten, Beziehungen, die immer und immer wieder benutzt werden, sorgfältig mit stereometrischen Beweismitteln als richtig zu erweisen. Ich sehe gerade hier ein wirksames Anwendungsgebiet der in der systematischen Stereometrie abgeleiteten allgemeinen Sätze über die Lage von Geraden und Ebenen im Raum. Daß die beiden Projektionen eines Punktes auf einer Senkrechten zur Achse liegen, daß die Projektionen einer Senkrechten zu einer Ebene senkrecht zu deren Spuren sind, solche und ähnliche einfache Tatsachen sollten nicht aus der Anschauung entnommen, sondern regelrecht bewiesen werden.

Es bedarf keiner weiteren Ausführungen, daß die einzelnen Aufgaben nicht etwa nach vorgegebenem Schema gelöst werden sollen, nach dem Vortrag des Lehrers,

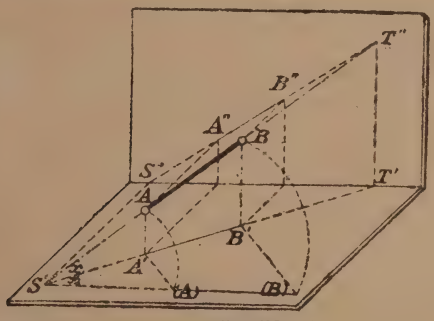


Fig. 56.
Grundkonstruktionen von Strecke u. Gerade.

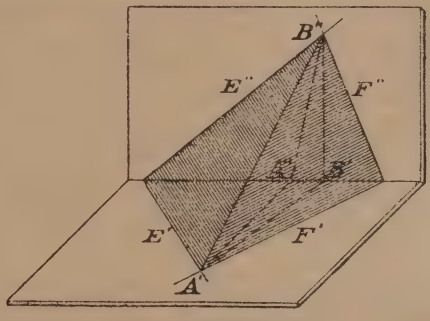


Fig. 57.
Schnitt zweier Ebenen.

Skizzen zu Modellen für die darstellende Geometrie von Prof. Schmehl, Darmstadt. Verleger: Emil Roth, Gießen.

die dieser womöglich an vorgedruckte Tafeln anschließt. Auch hier, wie überall in der Mathematik, soll das zweckmäßigste Verfahren mit den Schülern erarbeitet werden. Es wird dabei immer und immer wieder notwendig sein, vom Modell auszugehen. Zu dem Zweck muß[1] eine geeignete Klapptafel zur Verfügung stehen, dazu Stäbe, die die Geraden, Kugeln, etwa aus Kork, die die Punkte andeuten, Flächen zum Darstellen der Ebenen mit ihren Spuren, Modelle von Körpern usw. Derartige

[1] Der um die Methodik der darstellenden Geometrie in Deutschland sehr verdiente P. Zühlke strich in seinen Bemerkungen zu den Fahnen dieser Arbeit das Wort „muß" an und schrieb hinzu: „Ich bin immer ohne diese ausgekommen, dagegen habe ich Heftdeckel und andere ganz einfache Dinge benutzt, und zwar reichlich und lange". Ein guter Methodiker wird auch damit auskommen, wie er überhaupt vielfach das Schaumodell durch ein glücklich und schnell hergestelltes Freihandmodell ersetzen kann. Trotzdem empfehle ich, wenn irgend angängig, die Anschaffung einer Klapptafel mit dem nötigen Zubehör.

Apparate müssen nicht nur vom Lehrer, sondern recht häufig auch vom Schüler bedient werden. Ein Nebeneinander von räumlichem Modell und ebener Zeichnung — und zwar auch hier wieder der schrägen Paralleldarstellung neben dem Grundriß-Aufrißverfahren — kann gar nicht oft genug verlangt werden. Mit der in den methodischen Anweisungen gern gestellten Forderung, die Schüler sollten recht bald dazu gebracht werden, Zeichnungen ohne räumliches Modell zu „lesen", sollte man nicht allzu früh Ernst machen.

Es bedarf oft längerer Überlegung des Lehrers, wenn er seine Aufgaben so einrichten will, daß sie auf der begrenzten Zeichenebene ohne Beschwer lösbar sind. Nun soll man ganz gewiß die Schüler nicht immer bloß mit der zweckmäßigsten Lage der gegebenen Stücke bekannt machen, insbesondere nicht etwa alles in den praktischsten Quadranten fallen lassen. Es tut ganz gut, wenn der Schüler an selbst gewählten, beliebig gegebenen Stücken die „Tücke des Objektes" kennen lernt.[1] Bei solchen Aufgaben aber, die zu besonders sorgfältiger Ausführung vielleicht in häuslicher Arbeit bestimmt sind, wird der Lehrer gern die gegebenen Stücke ganz bestimmt legen wollen, einmal damit Proben auf die Richtigkeit der Ausführung leichter sind, dann aber auch tatsächlich, damit der Schüler mit seinem Blatt auskommt. In dieser Hinsicht sind z. B. die Aufgaben wertvoll, die Beyel in seiner Sammlung gibt.[2]

Die Angabe der Lage der Stücke geschieht bei Beyel durch rechtwinklige Raumkoordinaten. Es liegt daher der Gedanke nahe, die darstellende Geometrie mit der analytischen Geometrie des Raumes zu verbinden. Allerdings ist dabei zu bedenken, daß bei uns in Deutschland, abgesehen wohl nur von Württemberg, allein die analytische Geometrie der Ebene Pensum der höheren Schulen ist; man macht sich also einer Grenzüberschreitung schuldig, die erlaubt sein mag, aber kaum erwünscht, jedenfalls nicht notwendig. Eine Fusion beider Gebiete behandeln vier Programmabhandlungen von Rudolphi.[3]

Auf die technische Ausführung der Zeichnungen im Linearzeichnen und auf die Auswahl der Aufgaben gehe ich hier nicht ein. Das muß uns im 3. Teilband ausführlich beschäftigen.

Zum Schluß aber noch ein Wort über Ratgeber für den Lehrer. Von Vorlagen für die Zeichnungen nenne ich aus der großen Zahl vorhandener Werke mathematischen Charakters nur zwei: die recht beliebten, dünnen Bändchen von Eggers[4] mit

[1] Vgl. hierzu A. Baruch, Die verschiedenen Methoden zur Lösung von Aufgaben der darstellenden Geometrie bei ungünstigen Lageverhältnissen, ZmnU **53** (1922) S. 126ff.

[2] Chr. Beyel, Darstellende Geometrie, Leipzig (B. G. Teubner) 1901.

[3] W. Rudolphi, Analytische Geometrie des Raumes in Verbindung mit darstellender Geometrie, 4 Teile, Programm Gymnasium und Oberrealschule Neumünster, Ostern 1911, 1912, 1913 und 1914. Man vergleiche dazu die von den württembergischen Verhältnissen ausgehende Programmabhandlung: W. Dietmann, Über die Verbindung der darstellenden mit der analytischen Geometrie auf den Württembergischen Oberrealschulen, Oberrealschule Eßlingen 1914.

[4] W. Eggers, Lehrbuch des Zirkelzeichnens, 4. Aufl., Leipzig (Seemann u. Co.) 1905; Lehrbuch des Projektionszeichnens, 3. Aufl., ebenda 1905; Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 1. Teil: Die Elemente, 3. Aufl., 1906, 2. Teil: Durchschnitte und Durchdringungen der Körper, ebenda 1900; Lehrbuch der Schattenkonstruktion, ebenda 1902. — Ich habe die Auflagen genannt, die mir gerade vorlagen.

Tafeln dringen nicht tief in die Anwendungen ein, sondern halten sich mehr an die abstrakten Körper. Umfangreicher und schwieriger in den Aufgaben ist das an österreichische Verhältnisse anschließende, über den Rahmen der höheren Schule weit hinausgehende Tafelwerk von E. Müller[1]. Was die zeichnerische Seite des Linearzeichnens anlangt, so möge die Angabe der Bücher von Grothmann und Stiehler[2] genügen, die den Standpunkt des Zeichenlehrers nach meiner Meinung etwas einseitig vertreten und methodischen Charakter haben. Auch bei den für Mathematiklehrer in Betracht kommenden Lehrbüchern der darstellenden Geometrie ziehe ich es vor, statt einer langen eine kurze Reihe anzugeben. Ich empfehle zunächst als mehr elementar die viel benutzten Werke von Schlotke und von Weishaupt.[3] Von den umfangreichen, rein wissenschaftlichen Werken nenne ich E. Müller, G. Hauck, F. v. Dalwigk, Rohn-Papperitz, und aus neuester Zeit Scheffers[4]. Leitfadencharakter haben die beiden Bändchen von Großmann.[5]

---

[1] E. Müller, Technische Übungsaufgaben für darstellende Geometrie, 5 Hefte, Leipzig und Wien (Deuticke) 1910/11 und 1921.

[2] H. Grothmann, Das Linearzeichnen, Berlin (F. Ashelm) 1912; G. Stiehler, Lehrbuch der freien Perspektive, Leipzig (Dürr) 1914.

[3] J. Schlotke, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 4 Teile in höheren Auflagen, Dresden (Kühtmann); H. Weishaupt, Das Ganze des Linearzeichnens, 4 Abt. Neue Aufl. von M. Richter, Leipzig (Thoß).

[4] E. Müller, Lehrbuch der darstellenden Geometrie für Technische Hochschulen, I. Bd., 2. A. 1918; II. Bd., 1. Teil, 2. A. 1919, 2. Teil, Leipzig (Teubner); G. Hauck, Vorlesungen über darstellende Geometrie, herausgeg. von A. Hauck, I. Bd., 1912, Leipzig (Teubner); F. v. Dalwigk, Vorlesungen über darstellende Geometrie, 2 Bände, Leipzig (Teubner) 1911 und 1914; K. Rohn und E. Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 3 Bände, 3. Aufl. 1906, Leipzig (Veit); G. Scheffers, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 1. Bd. 1919, 2. Bd. 1921, Berlin (Springer).

[5] M. Großmann, Elemente der darstellenden Geometrie, 1917; ders., Darstellende Geometrie, 1915, Leipzig (Teubner).

FÜNFTES KAPITEL.

Trigonometrie.

1. Ebene Trigonometrie, erste Stufe.

Die ebene Trigonometrie schließt inhaltlich an die Ähnlichkeitslehre an. Die Lehrpläne schalten freilich regelmäßig zwischen beide Gebiete die Kreisberechnung und die sog. algebraische Geometrie ein. Daß beides durchaus nicht notwendig ist, hatten wir in dem Kapitel über Planimetrie gesehen. — Auch die Frage bliebe noch zu erwähnen, ob man nach dem Abschluß der Planimetrie in der Mittelstufe erst die Stereometrie oder erst die Trigonometrie behandeln soll. Die Entscheidung ist von keiner größeren Bedeutung. Es ist ziemlich gleichgültig, ob man die Stereometrie vorweg nimmt, um dann bei der ebenen Trigonometrie nicht nur Beispiele aus der Planimetrie, sondern auch solche aus der Stereometrie zur Verfügung zu haben, oder ob man die andere Reihenfolge wählt und dann die Stereometrie auch mit trigonometrischen Berechnungen belebt.

In vielen Fällen wird die ebene Trigonometrie in zwei Stufen erledigt. Noch weniger aber als bei der Stereometrie hat hier dieser Vorkursus einen propädeutischen Charakter in dem Sinne, daß man auf eine logisch-deduktive Form des Lehrsatzsystems verzichtet. Es handelt sich einfach um zwei konzentrische Kreise, von denen der engere am besten dadurch gekennzeichnet wird, daß der Begriff der trigonometrischen Funktionen auf Winkel, wie sie im Dreieck vorkommen, also bis zu zwei Rechten beschränkt bleibt. Man beherrscht damit das ebene Dreieck und im allgemeinen auch das Viereck.

Die zweite Stufe definiert dann die Funktionen für beliebige Winkel, beschäftigt sich mit den Additionstheoremen u. dgl. und wendet sich dann wieder dem Dreieck und Viereck zu. Hier wird die Zahl der Lehrsätze ergänzt und das Gebiet der Anwendungen erweitert. Als dritte Stufe folgt später die sphärische Trigonometrie.

Die Definition der trigonometrischen Funktionen knüpft in der Regel an das rechtwinklige Dreieck an, beschränkt sich zuerst also auf spitze Winkel. Im allgemeinen ist es üblich, mit dem Sinus zu beginnen. Schuster beginnt mit dem Tangens, da diese Funktion nicht durch 1 begrenzt, praktischer und für den Anfänger anschaulicher sei. Höfler (in seiner „Didaktik"), Eckhardt und andere sind der gleichen Ansicht.[1] Wo in der Ähnlichkeitslehre praktische Höhen und Schattenmessungen vorgenommen worden sind, wird man in der Tat den Tangens als die nächstliegende

[1] E. Eckhardt, Die Tangente als Grundlage der Goniometrie, ZmnU 35 (1904) S. 262ff. Der alte Stoy in Jena soll schon vor vielen Jahrzehnten die Tangensfunktion vorangestellt haben.

Funktion ansehen dürfen. Daß wir mit dem Sinus beginnen, wird eine an sich unnötige Befolgung des biogenetischen Grundgesetzes sein.[1] Von der Chorda der Alten war der Weg zum Sinus der nächste. Der Gedanke H. Graßmanns, den Kosinus an die Spitze zu stellen, weil dieser „ein Verhältnis darstellt, in welchem nur Stücke der beiden Schenkel des Winkels vorkommen", wird heute meines Wissens nirgends praktisch befolgt. Er hat vielleicht dann Wert, wenn man von vornherein den Richtungsbegriff berücksichtigt.

Man kann sich auch hier wieder, wie ähnlich in anderen Fällen der Planimetrie, die Aufgabe stellen, alle beim rechtwinkligen Dreieck vorhandenen Möglichkeiten von Funktionen auszuschöpfen. Dann hat man zu den üblichen Funktionen noch sec und cosec hinzuzunehmen. Mit Recht ist man aber von dem Gebrauch dieser Funktionen in der Schule ganz abgekommen, obwohl sie z. B. in der Nautik sehr viel verwendet werden. Auch den Kotangens könnte man entbehren, wenigstens dann, wenn man logarithmisch rechnet. Trotzdem wird er meist beibehalten, vielfach mehr aus formalen Gründen; man denke z. B. an den übersichtlichen Bau der Formeln und die Einrichtung der Logarithmentafeln.

Ein Wort muß auch über Name und Schreibweise der Funktionen gesagt werden. Ganz zu verwerfen ist meiner Ansicht nach der Ausdruck „die Tangente" zur Bezeichnung der Tangensfunktion, weil er andauernd zu Mißverständnissen Anlaß gibt, sobald auch Kreistangenten auftreten. Viele sagen „die Sinus", „die Tangens" usf. und ergänzen wohl das Wort Funktion. Am häufigsten gibt man aber doch diesen Funktionen, ebenso wie anderen, das männliche Geschlecht.

Hinsichtlich der Abkürzung bei symbolischer Schreibweise ist eine Einigkeit immer noch nicht erzielt. Euler, der Schöpfer der symbolischen Schreibweise, braucht in seinen Schriften nebeneinander *tang*, *tag*, *tg*, *tng*. Die spätere Zeit hat dann auch noch *tan* hinzugefügt; die Engländer z. B. schreiben wohl durchweg so. Ähnlich, wenn auch nicht ganz so schlimm, ist die Mannigfaltigkeit bei anderen Funktionen. Ich habe einmal vorgeschlagen, man sollte systematisch die Funktionen mit drei Buchstaben, am besten den ersten drei, bezeichnen.[2] Das ließe sich auch bei den anderen, nicht trigonometrischen Funktionen durchführen, nur müßte man auch Paare von drei Buchstaben zulassen, z. B. arc sin oder sin hyp usf. Ich bin mit meinem Vorschlag in der Kommission, die seinerzeit der Deutsche Ausschuß ernannt hatte, um feste Vorschläge für die Vereinheitlichung der mathematischen Bezeichnungen im Schulunterrichte[3] auszuarbeiten und dem preußischen Unterrichtsministerium auf dessen Wunsch vorzulegen, nicht ganz durchgedrungen. Die Vorschläge geben für die trigonometrischen Funktionen an: sin, cos, tang oder tg, cotg. Man sieht, auch hier war eine vollständige Einigung beim Tangens nicht zu er-

[1] Da Höhenmessungen schon in den Anfängen der Mathematik von Bedeutung waren, so könnte es jemand verwunderlich finden, daß nicht der Tangens, sondern der Sinus zuerst auftritt. Das wird aber erklärlich, wenn man bedenkt, daß man die Höhenberechnung mit der Regeldetri, d. h. mit der linearen Gleichung meistern kann.

[2] W. Lietzmann, Über Vereinheitlichung der Bezeichnungsweisen in der Mathematik, Ubl 18 (1912) S. 61ff.

[3] Vgl. Vorschläge zur Vereinheitlichung der mathematischen Bezeichnungen im Unterricht, Heft 17 der Schriften des DAMNU, Leipzig (Teubner) 1913, vgl. ZmnU 44 (1913) S. 395ff. und Bd. I dieser Methodik S. 190ff.

zielen. Ich füge mich natürlich jetzt durchaus diesen Vorschlägen. Denn schließlich ist die Hauptsache bei allen diesen Bezeichnungen nicht, daß jeder die ihm am besten erscheinende wählt, sondern daß alle eine und dieselbe brauchen.

Von vornherein sollte man darauf achten, daß die Schüler den ziffernmäßig gegebenen Winkeln jedesmal die Gradbenennung hinzufügen, daß sie sin 1^0, nicht sin 1 schreiben. Außerordentlich häufig wird von sin 90 oder von cos $(90 - \alpha)$ u. dgl. gesprochen und geschrieben. Das sollte mit Rücksicht auf die spätere Einführung des Bogenmaßes von Anfang an unterbunden werden.

Bekanntlich faßte man früher die Funktionen als Strecken, nicht als reine Zahlen auf. Der ältere Standpunkt begegnet einem zuweilen noch in Büchern aus der Mitte des vorigen Jahrhunderts.[1] Es ist nicht unwichtig, die Schüler ausdrücklich auf diese frühere Art der Definition hinzuweisen, ebenso wie man — nebenbei gesagt — gut tut, die bei den Griechen an Stelle des Sinus zunächst benutzte Chorda-Funktion gelegentlich zu erwähnen. — Bei vielen Ableitungen, ich erinnere z. B. an das Additionstheorem, kann man die Schreibarbeit wesentlich dadurch vereinfachen, daß man bestimmte Strecken der Einheit gleichsetzt. Dann müssen aber die Schüler ausdrücklich vor der Annahme gewarnt werden, daß der Sinus oder der Kosinus eine Strecke sei; sie müssen darauf hingewiesen werden, daß die Funktionen nur durch Strecken gemessen werden, weil in dem Quotienten der beiden Strecken hier die Strecke im Nenner die Einheit ist. Besonders nahe liegt eine falsche Auffassung bei der Darstellung der Funktionen am Einheitskreis, auf die wir gleich kommen. Freud[2] hat eine erste Definition des Sinus durch die Maßzahl der Fläche eines Rhombus vorgeschlagen. sin α ist der Inhalt eines Rhombus mit der Seitenlänge 1 und einem Winkel α. Man sieht dann unmittelbar, daß sin α = sin $(180^0 - \alpha)$ ist. Auch das scheint ein, wenn auch interessanter, so doch überflüssiger Seitenpfad.

In allen Lehrbüchern wird nun für gewisse ausgezeichnete Winkel die Berechnung der Funktionswerte wirklich ausgeführt. Man begnügt sich meist nicht mit 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, sondern nimmt auch die Fälle hinzu, die man mit Hilfe des goldenen Schnittes erledigen kann. Für die ebengenannten, oft gebrauchten Werte aber läßt man zumeist die Funktionen auswendig lernen. Daneben wird man gleichzeitig verlangen, daß die Schüler jederzeit imstande sind, die Werte auch abzuleiten. Da erfahrungsgemäß gerade hier recht viel Gedächtnisfehler vorkommen, empfiehlt sich die Angabe eines bekannten mnemotechnischen Hilfsmittels. Es ist

$$\begin{aligned}
\sin\ 0^0 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{0} = 0\\
\sin\ 30^0 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{1} = \tfrac{1}{2}\\
\sin\ 45^0 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\\
\sin\ 60^0 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\\
\sin\ 90^0 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{4} = 1.
\end{aligned}$$

[1] Ein 1917 erschienenes Buch, J. Pfau, Erste Einführung in die Dreiecksrechenlehre, Wien (Pichler) hat neuerdings aus methodischen Gründen auf die Streckendefinition zurückgegriffen — wie mir scheint mit wenig Glück.

[2] Ph. Freud, Eine Einführung in die Trigonometrie, Lehrproben und Lehrgänge 1919, 3. Heft (140. Heft) S. 70ff.

Man möge den Schülern auch nicht verschweigen, daß nach unserer (vorläufigen) Definition der trigonometrischen Funktionen Werte für 0^0 und 90^0 eigentlich nicht in Betracht kommen, da es rechtwinklige Dreiecke mit derartigen Winkeln an der Hypotenuse nicht gibt. Es handelt sich hier um Grenzprozesse, von deren Zulässigkeit und Zweckmäßigkeit freilich der Schüler sehr leicht zu überzeugen sein wird.

Es wäre nun ganz verfehlt, sich mit den wenigen berechneten Funktionswerten zu begnügen und gleich zur Tafel zu greifen. Man muß schon hier zum mindesten den Schülern zeigen, daß man mit Hilfe des Winkelmessers jeden Funktionswert graphisch bestimmen kann. Man läßt solche Bestimmungen am besten für eine Folge von Werten, etwa 10^0, 20^0 usf. wirklich ausführen. Der Schüler wird dann von selbst auf eine möglichst günstige Anlage der Figuren kommen, er wird schließlich auf die bekannte Kreisfigur verfallen. Da der Schüler mit dem Wesen der graphischen Darstellung bereits vertraut ist, wird er auch den Funktionsverlauf im Anschluß an jene graphischen Bestimmungen festlegen wollen. Man geht dann am besten vom Einheitskreis aus und wählt auf der Abszissenachse irgendeinen zweckmäßigen Maßstab, in dem man die Winkel aufträgt. Natürlich bricht diese Darstellung zunächst mit dem ersten Quadranten ab.

Wenn man so eine Tabelle der Funktionswerte gefunden hat, kann man auf gleichem Wege die umgekehrte Aufgabe lösen, also etwa die Winkel α bestimmen, deren Sinus 0,1, dann 0,2 usf. ist.

Mit dem bisher Behandelten beherrscht man die Geometrie des rechtwinkligen Dreiecks. Ich halte es für sehr erwünscht, wenn eine Zeitlang Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck, die am besten in der Praxis wurzeln (Höhen- und Entfernungsbestimmungen), auf Grund der graphisch gefundenen Funktionswerte angestellt werden, ehe überhaupt von den Tafeln die Rede ist. Erst danach soll man den Schülern auch die Tafeln in die Hand geben, ich meine, um es noch ausdrücklich zu sagen, zunächst die sog. „natürlichen" trigonometrischen Funktionen.

Wenn man jetzt zum allgemeinen Dreieck übergeht, so genügt hier vorderhand die Ableitung des Sinus- und des Kosinussatzes. Welche Ableitung man bei dem zuletztgenannten Satz wählt — beim Sinussatz wird wohl durchweg eine Höhe in doppelter Weise ausgedrückt[1] — bleibe dahingestellt. Ist der sog. verallgemeinerte pythagoreische Lehrsatz behandelt, so gibt der sofort auch den Kosinussatz. Ist das nicht der Fall — und nach meiner Meinung ist jene Verallgemeinerung sehr wohl zu entbehren — so drückt man wieder eine Höhe in doppelter Weise aus, diesmal unter Verwendung des pythagoreischen Lehrsatzes.[2]

Nun schließen sich Berechnungen an. Man soll diese Berechnungen wieder erst ganz mit den Funktionswerten ausführen lassen unter Verwendung der abgekürzten

[1] Übrigens ist die Bestimmung des Proportionalitätsfaktors beim Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

gleichfalls wichtig.

[2] Ich bemerke aus Anlaß einer Äußerung hierzu in einer Besprechung der ersten Auflage: Ich meine mit den letzten Zeilen nur das Beweismittel. Der Unterricht wird das Problem, aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite zu finden, als Ausgangspunkt nehmen.

Rechenmethoden.[1] Man lasse statt vierstellig auch einmal dreistellig rechnen. Am besten ist es, wenn der Schüler in diesem Stadium die Logarithmen noch garnicht kennt. Auf keinen Fall ist es gestattet, gleich von Anfang an zu den Logarithmen überzugehen, ohne daß der Schüler die wirklichen Funktionswerte kennen gelernt hat.[2]

Bei den allgemeinen Dreiecken mußte man sich naturgemäß, solange die Funktionen nur im rechtwinkligen Dreieck definiert waren, auf spitzwinklige Dreiecke beschränken. Der Schüler wird von selbst das Bedürfnis fühlen, diese Schranken zu beseitigen. Der Sinussatz gibt den Weg an, wie der Sinus, der Kosinussatz den Weg, wie der Kosinus auf stumpfe Winkel erweitert werden kann. Wieder haben wir hier, wie so oft in der Arithmetik, eine Anwendung des Permanenzprinzipes vor uns. Dem Schüler muß zur Erkenntnis gebracht werden, daß hier eine neue Definition nötig ist — daß man es nicht mit einem Lehrsatz zu tun hat — er muß ebenso sehen, daß die Art und Weise der neuen Definition zweckmäßig ist. Wird er jetzt noch zur graphischen Darstellung der neu definierten Funktionswerte veranlaßt, so sieht er, daß sich bei der Sinus- wie bei der Kosinuskurve das definierte Funktionsstück ohne Unterbrechung und auch ohne unstetige Änderung der Richtung an das alte anschließt.[3] Selbstverständlich tut bei der Erweiterung des Funktionsbegriffes von spitzen auf stumpfe Winkel auch die Erklärung am Kreis gute Dienste, um so mehr, wenn der Schüler von der Algebra her mit den Vorzeichen in den verschiedenen Quadranten vertraut ist. Übrigens ist es mir gelegentlich vorgekommen, daß einem Schüler Bedenken entstanden, daß der Radius als wesentlich positive Größe auftritt. Er meinte, der Radius müsse auch je nach seiner Lage positiv oder negativ genommen werden. Man übersehe also diesen Punkt bei der Erklärung nicht.

Bei der Anwendung auf die Dreieckslehre macht sich in der praktischen Rechnung die Notwendigkeit fühlbar, alle Funktionswerte auf Funktionen von Winkeln zu reduzieren, die zwischen 0^0 und 45^0 liegen. Man tut gut, hier zunächst einmal festzustellen, wie es jüngst von Gennimatas[4] vorgeschlagen ist, daß bei zwei Winkeln α und β, für die die Beziehung

$$\alpha \pm \beta = 90^0$$

gilt,

$$|\sin\alpha| = |\cos\beta| \text{ und } |\cos\alpha| = |\sin\beta|$$

ist; wenn aber

---

[1] Vgl. hierzu: R. Glauer, Die trigonometrische Aufgabe in Untersekunda, Programm Realschule Erfurt 1902; Schülke, Trigonometrie ohne Logarithmen, Lehrproben und Lehrgänge, Heft 51 (1897); Schuster, Trigonometrie ohne Formeln, ebenda 52 (1897). Dagegen: W. Janisch, Die formelarme und logarithmenlose Methode der Auflösung trigonometrischer Aufgaben, ZmnU 33 (1902) S. 551ff.

[2] Vergl. hierzu A. Witting, Einführung in die Trigonometrie (MPhB 43) Leipzig, Teubner, 1922.

[3] Vgl. über diese Frage die folgenden zwei Arbeiten: Th. Häbler, Die Ausnahmslosigkeit beim Definieren trigonometrischer Funktionen, ZmnU 37 (1906) S. 81ff. und R. Güntsche, Ein allgemeiner Beweis für das Additionstheorem der trigonometrischen Funktionen, ebenda 33 (1902) S. 176ff.

[4] Vgl. N. Gennimatas, Methodische Bemerkungen zur ebenen Trigonometrie, ZmnU 47 (1916). — Ich habe die Regeln in mein Unterrichtswerk aufgenommen.

$$\alpha + \beta = 180^0$$

ist, so ist

$$|\sin\alpha| = |\sin\beta| \text{ und } |\cos\alpha| = |\cos\beta|.$$

Darüber hinaus geben dann die allgemeinen Regeln über die Vorzeichen der Funktionen in den verschiedenen Quadranten Auskunft. Man kann die Regel leicht auf alle vier Quadranten verallgemeinern.

Das Verhalten der Funktionen tang und cotg wird durch das der Funktionen sin und cos festgelegt, wenn man an der Beziehung

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

festhält. Bei der Diskussion der Funktionen fällt den Schülern wohl der Sprung des Tangens bei 90^0 auf. Sie lernen hier einen Fall kennen, wo ein Grenzwert verschieden ausfällt, je nachdem man sich der kritischen Stelle von rechts oder links nähert. Auch diesen Punkt, der den Vätern einer systematischen Trigonometrie nicht wenig Schwierigkeiten gemacht hat, sollte man heute nicht im Eiltempo übergehen.

2. Ebene Trigonometrie, zweite Stufe.

Nicht an allen Schulen geht dem eigentlichen Trigonometriekursus in einer vorhergehenden Klasse eine Vorstufe voraus. Wo das nicht geschieht, wird man aber doch ganz in der Art und Weise, wie es in dem vorangegangenen Kapitel auseinandergesetzt ist, mit der Trigonometrie beginnen; man wird also nicht gleich den allgemeinen Winkelbegriff zugrunde legen — wie es wohl manche Lehrbücher, ich vermute aus systematischen Gründen, tun — sondern auch mit spitzen Winkeln beginnen, um dann zu stumpfen überzugehen und danach erst zu beliebigen Winkeln; und so ähnlich auch in den anderen Dingen.

Sind aber tatsächlich zwei Kurse vorgesehen, dann soll der zweite nicht mit einer systematischen Wiederholung des ersten beginnen, vielmehr den Stoff des ersten Kurses voraussetzen. Es wird noch genug Gelegenheit zu immanenter Wiederholung geben.

Der zweite Kursus der Trigonometrie setzt mit einer Definition der trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel ein. Dabei ist es erwägenswert, ob man nicht von vornherein neben dem Gradmaß das Bogenmaß einführt. Zeit zur Einführung des Bogenmaßes ist aber immerhin noch später, wenn es sich um die Differentiation und damit um eine erneute Diskussion der transzendenten Funktionen handelt. Nachdem die Funktionen für beliebige positive und negative Winkel definiert und graphisch dargestellt sind, wird eine erste Frage wieder die Reduzierung der absoluten Werte der Funktionen auf die Werte im Bereich von 0^0 bis 45^0 sein. Diese Formeln machen den Schülern Schwierigkeiten, weil sie große Anforderungen an das Gedächtnis stellen, wenn sie aus der Erinnerung heraus reproduziert werden sollen. Ich hatte eben schon (S. 174) eine Regel genannt, die die Aufgabe für die absoluten Werte sehr einfach löst. Man braucht nur noch über die Vorzeichen der Funktionen selbst orientiert zu sein.

Früher merkte man sich das Vorzeichen an der Hand der Figur, die die Funktionen durch Strecken am Kreis versinnbildlichte. Heute zieht man es vor, dem Schüler

die Gestalt der vier Funktionskurven einzuprägen. Man lasse sich aber mit einem von beiden Verfahren genügen. „Doppelt hält besser", gilt hier nicht! Mir wollen die Kurven praktischer erscheinen. Sie sind gewissermaßen etwas Fertiges, während bei der Kreisdarstellung der Schüler erst jedesmal im Kopf die zugehörige Strecke einzeichnen muß. Außerdem aber werden bei späteren Anwendungen doch die

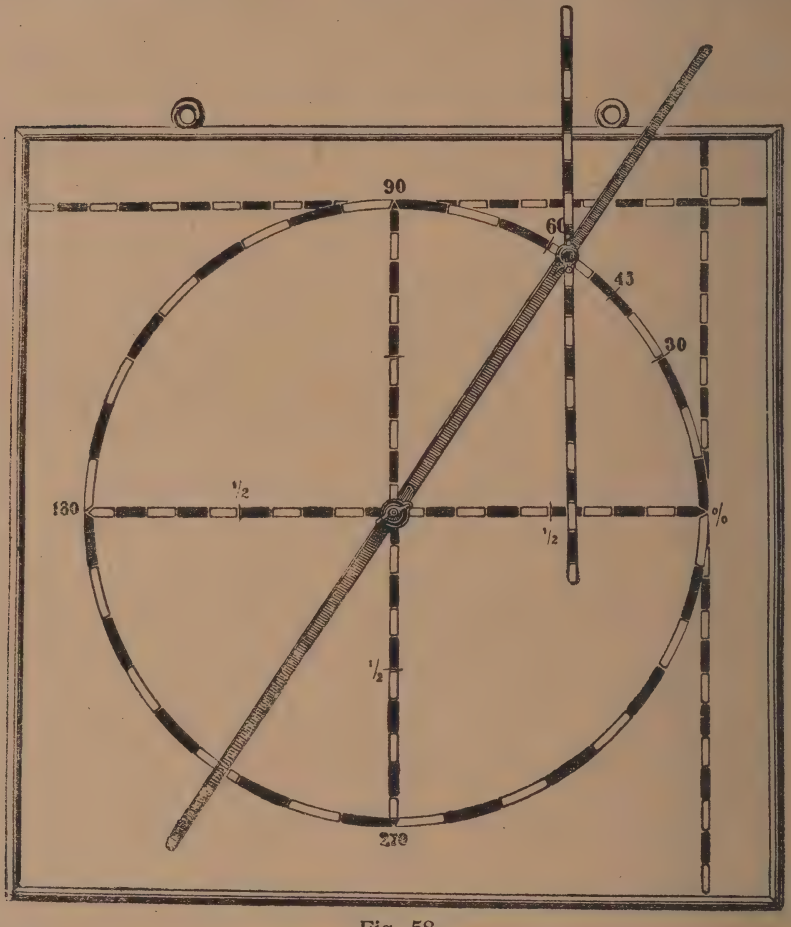


Fig. 58.
Funktionsanzeiger. Ausführung der Firma Günzel, Kötzschenbroda.

Kurven gebraucht. Der Lehrer, der den Schülern die Kurven einprägen will, muß nun aber auch auf eine recht ausführliche Diskussion Wert legen. Wie eine Sinuskurve durch Verschiebung in eine Kosinuskurve, eine Tangenskurve durch Spiegelung in die Kotangenskurve übergeht und umgekehrt, wie es mit der axialen und der zentralen Symmetrie der Kurven steht, solche und ähnliche Dinge sind ausführlich zu erörtern.

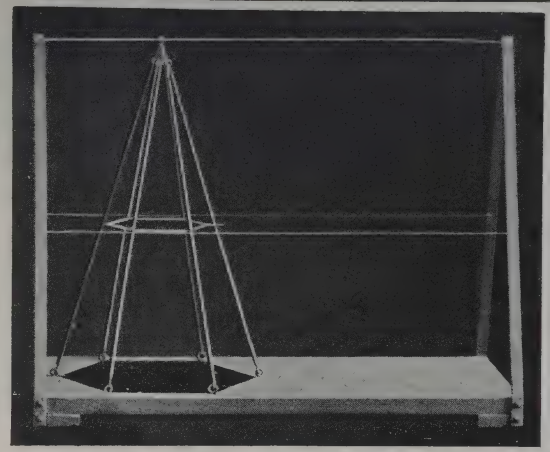
Mit dieser Grundlage kommt man nun an die Goniometrie heran. Hier steht im Vordergrund das Additionstheorem. Die Ableitung geschieht meiner Meinung nach

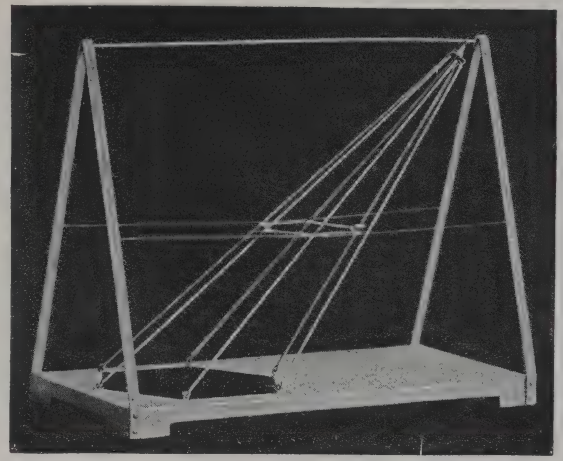
Die drei wichtigsten Rotationskörper, erzeugt mit der Schwungmaschine durch Drahtfiguren.

Anordnung nach Leppin & Masche, Berlin.

Durchsichtige Kugel zum Zeichnen von Dreiecken und Zusammensetzen der zugehörigen Ecken. Nach Rühlemann.

Herstellung von Schulze, Halle a. S.





Modell zur Erklärung des Cavalierischen Satzes von Kremer.

Ausführung von H. Hilgers in Bonn a. Rh.

am besten mit Hilfe der bekannten Figur 59, bei der an den Winkel α der Winkel β bei der Addition nach außen, bei der Subtraktion nach innen abgetragen wird. Dann lassen sich Ausdrücke für $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ ableiten. Man macht in der Ableitung meistenteils die stillschweigende Voraussetzung, daß nicht bloß die Winkel α und β spitz sind, sondern daß auch der Winkel $\alpha+\beta$ spitz ist. Die Ausdehnung auf beliebige Winkel ist zwar leicht zu erledigen[1], wird aber oft ganz unterschlagen. Am besten ist das Verfahren der vollständigen Induktion. Man sollte jedenfalls wenigstens bei einer Formel die vollständige Ableitung bringen. Einen Beweis, der gleichzeitig alle Fälle umfaßt, hat Böger jüngst gegeben.[2] Eine andere beliebte und historisch wichtige Methode zur Ableitung der Additionstheoreme schließt an den Satz von Ptolemäus an. Man kann schließlich auch von der Dreiecksformel $a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$ ausgehen.

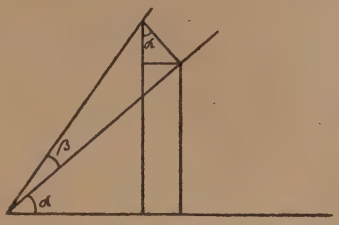


Fig. 59.

Das Additionstheorem liefert nun eine Fülle goniometrischer Formeln, beginnend mit Ausdrücken für den Tangens und den Kotangens von Summen und Differenzen, den Summen und Differenzen zweier Funktionen ($\sin\alpha+\sin\beta$ usf.), die durch Spezialisierung wieder neue Formeln liefern, wie etwa die Beziehungen zwischen den Funktionen eines Winkels und seines Doppelten. Die Kunst besteht hier darin, sich mit dem Nötigsten zu begnügen. Was wir eben anführten, genügt vollauf. Die Gefahr, durch Entwicklung immer weiterer Formeln zum „Tapetendrucker" zu werden — dieses böse Wort ist einmal Grunert von Baltzer angehängt worden —, ist hier für den Lehrbuchschreiber sehr groß; und ähnlich so ergeht es dem Lehrer im Unterricht.

Es ist oft gesagt worden, daß das Additionstheorem eigentlich eine Art Prunkstück sei, das man wohl verehrt und deshalb nicht missen möchte, das man aber nie benutzt. Ja ich habe einmal gehört, daß jemand den Wert des Moivreschen Theorems darin sah, daß man endlich einmal dabei das Additionstheorem anwenden könne. Ganz so schlimm liegen die Dinge nun wirklich nicht. Man sollte z. B. die Gelegenheit benutzen, die das Additionstheorem einem bietet, die Funktionen beliebiger Winkel auszurechnen. Wir können einmal auf Grund der Kreisteilung die Funktionswerte von einer gewissen Anzahl von Winkeln wirklich ausrechnen. Diese Winkel können wir genügend dicht aneinanderreihen. Andererseits kann man auf Grund geometrischer oder sonstiger Überlegung die Tatsache ableiten, daß für kleine Winkel der Sinus eines Winkels mit dem Bogen übereinstimmt. Wenn man will, kann man schon hier den Ausdruck $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ bestimmen oder zunächst nur aus der graphischen Darstellung ablesen. Unter Benutzung dieser beiden Tatsachen gibt dann das Additionstheorem die Möglichkeit, von jedem anderen Winkel den

[1] R. Böger, Die trigonometrischen Summenformeln, ZmnU 45 (1914) S. 421ff.

[2] Vgl. u. a. das sehr empfehlenswerte Göschen-Bändchen: G. Hessenberg, Ebene und sphärische Trigonometrie, 3. A. Berlin (Göschen) 1917.

Funktionswert, zunächst den Sinus, tatsächlich mit der nötigen Genauigkeit auszurechnen.

In der Dreieckslehre wird man nun den bisherigen Sätzen noch eine Reihe anderer an die Seite stellen, die Halbwinkelsätze, den Tangenssatz, die Mollweideschen Formeln.[1] Es stehen beim Beweise dieser Sätze zwei Möglichkeiten offen. Man kann sie aus früheren Sätzen entweder goniometrisch oder geometrisch herleiten. Da es für die Schüler ganz gleichgültig sein kann, ob man die Gesamtheit der Dreieckssätze aus einem einzigen Satz, meinetwegen dem Kosinussatz, ableiten kann, oder ob das nicht möglich ist, so braucht man sich an dieser Stelle jedenfalls nicht von Gründen eines Purismus leiten zu lassen, der Aufgabe der wissenschaftlichen Trigonometrie sein mag. Also ist meine Meinung, man nehme die Beweismittel, wie sie sich am ungezwungensten bieten, bald dieses, bald jenes, bald alle beide.

Wenn man ein wichtiges Ziel der Trigonometrie in der rechnerischen Lösung derjenigen Konstruktionsaufgaben sieht, bei denen allerlei Dreieckstücke auftreten, die in der praktischen Geometrie kaum Bedeutung haben, als da sind Mittellinien, Winkelhalbierende, Abschnitte von Winkelhalbierenden auf der Gegenseite, irgendwelche Summen und Differenzen aus solchen Abschnitten usf., dann wird man sich genötigt sehen, eine gewisse Systematik in die Lösung solcher Aufgaben zu bringen. Das leistet die sog. r-Methode. Man drückt alle Stücke, die irgendwie in Betracht kommen, durch den Radius r des Umkreises und die Winkel aus. Sind also jetzt irgend drei Stücke gegeben, so kommt das Ganze darauf hinaus, aus den Gleichungen r und die Winkel zu berechnen; damit sind dann natürlich auch die Seiten bekannt.

Allerdings muß der Schüler, der diese Methode benutzen will, die Ausdrücke für die verschiedenen Stücke des Dreiecks zur Verfügung haben, also etwa für den Radius des Inkreises ρ und für den halben Umfang s

$$\rho = 4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}, \qquad s = 4r \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Heute lehnt man dergleichen als Formelkram ziemlich einmütig ab, wenn ihm auch eine Bedeutung für die systematische Erledigung der trigonometrischen Berechnungen zugestanden wird. Das Ideal von heute, das freilich in den Lehrbüchern vielfach noch nicht verwirklicht ist, ist eine formelarme, dafür aber anwendungsreiche Trigonometrie.

3. Sphärische Trigonometrie.

Wir halten die sphärische Trigonometrie für eine notwendige Ergänzung der ebenen. Nicht immer aber zeugen die Lehrpläne von derselben Anschauung bei ihren Verfassern. So fehlte, um nur ein Beispiel zu nennen, die sphärische Trigonometrie im Lehrplan der preußischen Volksschullehrer-Seminare. In der Tat sollte es die Rücksicht auf eine mathematische Erfassung der Erd- und Himmelskunde überall, wo überhaupt Trigonometrie getrieben wird, zu einer selbstverständlichen Forderung machen, daß auch auf Raumprobleme eingegangen wird. Man braucht ja, wenn man sich mit dem Minimum begnügt, nur zwei Lehrsätze.

[1] Vgl. z. B. W. Weber, Tangenssatz, Mollweidesche Formel, Kosinussatz, acht Additionssätze an einer Figur, ZmnU 49 (1919) S. 212.

Sind auf einer Kugel irgend drei Punkte gegeben und durch sie größte Kugelkreise gelegt, dann entsteht ein sphärisches Dreieck. Man kann drei verschiedene Dreiecksbegriffe unterscheiden. Im Eulerschen Dreieck sind alle Seiten und Winkel kleiner als zwei rechte. Habe ich drei Punkte auf der Kugel angegeben, so ist immer — von Grenzfällen abgesehen — mindestens eines der durch sie bestimmten Dreiecke Eulersch. Im Möbiusschen Dreieck sind alle Seiten und Winkel kleiner als vier Rechte. Schneide ich etwa aus einer Kugel einen Oktanten heraus, so bildet der Rest ein Möbiussches Dreieck, nicht aber ein Eulersches Dreieck. Im Studyschen Dreieck können gegenüber dem Möbiusschen Dreieck noch beliebige positive oder negative Vielfache von vier rechten bei Seiten und Winkeln hinzukommen. Die Schule kann sich grundsätzlich auf Eulersche Dreiecke beschränken.[1] — Eine allgemeine Theorie der sphärischen Vielecke ist noch nicht entwickelt.

In der Regel beginnt man die sphärische Trigonometrie mit der Ableitung einer Reihe von Sätzen über das rechtwinklige sphärische Dreieck. Man kann bekanntlich alle die 10 Formeln in eine einzige Gedächtnisregel zusammenfassen, die sog. Nepersche Regel. Die übliche Formulierung der Regel ist die: Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist der Cosinus eines Stückes gleich dem Produkt der Sinus der nichtanliegenden Stücke oder gleich dem Produkt der Kotangens der anliegenden Stücke, wenn man den rechten Winkel nicht mitzählt und die Katheten durch ihre Komplemente ersetzt. In einem holländischen Schulbuch[2] fand ich statt dessen die Hypotenuse und die ihr anliegenden Winkel durch ihre Komplemente ersetzt. Dann wird der Sinus eines Stückes gleich dem Produkt der Tangens der anliegenden oder der Cosinus der gegenüberliegenden Stücke. Will man den Schülern, was sehr zu empfehlen, diese Regel geben, so muß man alle Fälle durchgehen.[3] Es ist dann aber auch eine weitgehende Übung im Umgang mit der Regel nötig, sonst bleibt sie Wort ohne Inhalt. Es kommt nämlich nicht bloß darauf an, daß die Formel, die man hinschreibt, richtig ist, sondern auch, daß man sie gebrauchen kann. Man gebe also dem Schüler irgend zwei Stücke des rechtwinkligen Dreiecks und lasse ihn dann selbst aus der Regel die nötigen Formeln herleiten; das wiederhole man — natürlich auch an eingekleideten Beispielen — nicht zu selten. Andere halten „die Nepersche Regel für entbehrlich, schon wegen der „weitgehenden" Übung, die zur Einprägung erforderlich ist; man merkt sich die Formeln für das rechtwinklige sphärische Drei-

[1] Als Literatur gebe ich an den von W. Jacobsthal bearbeiteten Abschnitt im II. Bd. (S. 341ff.) der Enzyklopädie von Weber-Wellstein, ferner F. Schilling, Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarzschen s-Funktion, Mathematische Annalen **44** (1894) S. 161ff.; A. Schoenflies, Über Kreisbogendreiecke und Kreisbogenvierecke, Ebenda S. 105ff.; E. Study, Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitution und elliptische Funktionen, Abhandl. d. math.-phys. Klasse d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. **20**, schließlich die autographierte Vorlesung: F. Klein, Hypergeometrische Funktionen.

[2] J. Versluys, Bol-Driehoeksmeting, 7. druk, Amsterdam (Ve sluys) 1909.

[3] Man pflegt die Fälle getrennt zu beweisen; Neper und Lambert stellten aus dem vorgelegten rechtwinkligen Dreieck ein überschlagenes sphärisches Fünfeck her, Gauß nannte die Figur später Pentagramma mirificum, und bewiesen so die Regel einheitlich. Vgl. darüber den Artikel III. A B 9 in der großen Math. Enzyklopädie: M. Zacharias, Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung, S. 1044ff. Auch bei G. Hessenberg (vergl. S. 177 Anm. 2) findet sich ein Hinweis auf die Figur.

eck besser durch die Analogie mit den Formeln des ebenen rechtwinkligen Dreiecks." Das trifft gewiß für einige Formeln zu, aber nicht für alle. Ich möchte deshalb die Nepersche Regel nicht missen. Eine kleine Bemerkung noch: Der Schüler begegnet hier meist zum ersten Male der zyklischen Vertauschung. Man malt ihm eine bestimmte Figur an die Tafel, etwa einen Kreis, und er denkt womöglich: „Aha, den Kreis merke dir, das ist die Hauptsache". Später hört er nichts mehr von der zyklischen Vertauschung, wenigstens ist es mir selbst einst so in der Schule gegangen. Man lasse den Begriff nicht in dieser einmaligen Anwendung verkümmern. Man erläutere ihn hier etwas genauer und komme später — in der Gleichungslehre, in der analytischen Geometrie — recht oft darauf zurück. Noch besser ist es natürlich, wenn man schon in der Planimetrie bei der Dreieckskonstruktion und in der ebenen Trigonometrie bei der Dreiecksberechnung den Begriff der zyklischen Vertauschung einübt.

Auch für das rechtseitige Dreieck lassen sich aus der Neperschen Regel sofort Formeln durch Übergang zur Polarecke gewinnen. Man leitet sie wohl selten in ihrer Gesamtheit ab. Braucht man, was gelegentlich vorkommt, eine Formel, so kann man sie für diesen Zweck unmittelbar aus der Neperschen Regel umschreiben.

Vom allgemeinen sphärischen Dreieck nimmt man zuerst den Sinussatz und dann den Seitenkosinussatz. Beide Sätze kann man genau in der gleichen Weise wie die entsprechenden Sätze in der Ebene durch Rückgang auf rechtwinklige Dreiecke herleiten. Zuweilen werden auch, z. B. in dem Unterrichtswerk von Schwab-Lesser, die Sätze für die allgemeine Ecke erst abgeleitet und daraus dann durch Spezialisierung die Sätze der Neperschen Regel gewonnen. Wenn man auch auf diese Weise eine Anzahl von Beweisen — denen die Schüler erfahrungsgemäß nicht besonders hold sind — spart, so will mir dieser Weg doch nicht zweckmäßig erscheinen. Darin, daß Satzfolge und Beweisgang in der sphärischen Trigonometrie des allgemeinen Dreiecks vollkommen der Entwicklung in der ebenen Trigonometrie nachgebildet werden kann, liegt ein wertvolles heuristisches Hilfsmittel für die Schule.

In vielen Fällen wird diese erste Dosis von sphärischer Trigonometrie vollauf genügen. Es ist jedenfalls weit wichtiger, daß der Schüler auch die wertvollen Anwendungen der sphärischen Trigonometrie auf Erd- und Himmelskunde kennen lernt, als daß man möglichst viel Dreieckssätze entwickelt und dann auf jene Dinge verzichten muß, weil die Zeit fehlt. Allerdings alle einfachen Dreiecksfälle kann man noch nicht auflösen, auch wenn man den Seitenkosinussatz noch hinzunimmt. Das ist hier anders als in der Ebene.

Hat man hinreichend Zeit, so möge man bei guten und anstelligen Generationen auch die zweite, stärkere Dosis verabreichen. Man wird die Halbwinkelsätze, die Gaußschen Formeln und schließlich die Neperschen Analogien hinzunehmen. Darüber noch hinauszugehen, etwa den Inkreis oder den Umkreis des sphärischen Dreiecks zu berücksichtigen, möchte ich auf keinen Fall befürworten.

Man muß sich allerwärts in der sphärischen Trigonometrie auf eine gute Grundlegung in der Stereometrie, auf bestimmte Lehrsätze ebenso wie auf die räumliche Anschauung überhaupt, stützen können. Einmal müssen die Schüler mit der Geometrie der räumlichen Ecke vertraut sein. Sätze, wie die über die Polarecke, müssen wirklich verstanden sein, um als Beweismittel und in Aufgaben als nützliche Hilfe

zur Hand zu sein. Zuweilen wird die sphärische Trigonometrie geradezu an die Lehre von der Ecke angeschlossen. Ich möchte aber doch nicht dazu raten, die sphärische Trigonometrie damit der Stereometrie einzugliedern; es dürfte vorteilhafter sein, erst die Stereometrie vollständig abzuhandeln, danach mit allen ihren Anwendungen die sphärische Trigonometrie.

Zum andern muß man natürlich aus der Stereometrie die Vertrautheit mit der Kugel voraussetzen dürfen. Der Fehler, daß ein Breitenkreis als Begrenzung eines sphärischen Dreiecks eingeschmuggelt wird, ist unausrottbar, wenn der Begriff des größten Kugelkreises nicht von vornherein klar herausgestellt wird. Die Stereometrie pflegt auch die Formel für den Inhalt des Kugelzweiecks und des Kugeldreiecks herzuleiten. Man sollte vielleicht schon hier die Gelegenheit benutzen, die Schüler auf die mannigfachen Formen des sphärischen Dreiecks und auf die Einschränkung des Begriffes im Sinne Eulers hinzuweisen.

Allerdings erscheint es mir unbedingt notwendig, bei den Berechnungen aus der sphärischen Trigonometrie eine in allen Dingen vollständige Diskussion an der Hand der Formeln vorzunehmen. Man kann gewiß in einigen einfachen Fällen eine solche Diskussion durchführen, in anderen aber sich damit begnügen, die Rechnung durch eine möglichst zweckmäßige, an die gegebenen Werte sich anlehnende Figur zu begleiten und diese dann bei der Erörterung des Ergebnisses und seiner etwaigen Mehrdeutigkeit zu benutzen. Nicht alle werden dem zustimmen: „Die vollständige Diskussion der 6 Grundaufgaben des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks gehört m. E. in die höhere Schule; es gibt Fälle, in denen auch eine „zweckmäßige" Figur nicht den Entscheid liefert, denn das Zeichnen von maßhaltigen Figuren in der Sphärik ist oft ein Kunststück," so schreibt ein Kritiker der ersten Auflage.

Damit komme ich auf die Figuren zu sprechen, die alle sphärischen Lehrsätze, ebenso wie die Aufgaben begleiten sollen. Vielfach wird man sich mit einer ganz rohen Faustskizze begnügen können. Aber auch dabei sollte man Schnabelellipsen nicht dulden. Für die genaue Ausführung der Figuren in schräger Parallelperspektive besteht bekanntlich die Schwierigkeit, daß der scheinbare Umriß der Kugel nicht, wie er meistens gezeichnet wird, ein Kreis, sondern eine Ellipse ist. Da die sorgfältige Durchführung einer genauen Zeichnung nicht wenig Zeit in Anspruch nimmt, kann man sich damit begnügen, in einigen wenigen Fällen solche Zeichnungen herstellen zu lassen — bei den Figuren in den Lehrbüchern kann man freilich schon eher das Verlangen stellen, daß alle Figuren einwandsfrei sind.[1] In dieser Hinsicht wird nicht nur in der Schulstube, sondern auch

Fig. 60.
Holzkugel mit Kreisen aus Draht zum Zeichnen von Kugelkreisen. Modell der Firma Martin Schilling, Leipzig.

[1] Vgl. hierzu aber eine Notiz von H. Wieleitner, Zeichnung der Figuren in der Erd- und Himmelskunde. ZmnU 46 (1915) S. 379 ff.

im Arbeitszimmer der Autoren viel gesündigt. Völlig einwandsfreie Abbildungen von Kugeldreiecken in den Lehrbüchern sind geradezu eine Seltenheit.

Man wird sich bei der Ableitung der Lehrsätze vielfach nicht damit begnügen können, die Überlegungen durch ebene Zeichnungen zu unterstützen; man wird auch räumliche Veranschaulichungen hinzunehmen müssen. Recht empfehlenswert ist da wirkliches Zeichnen auf einer Kugel, sei es mit Kreide auf einer schwarz angestrichenen Holzkugel, sei es mit Bleistift auf einer Kugel aus Gips; daneben gibt es als Aushilfe mannigfache Modelle, in denen die Kreise durch Drähte angedeutet sind.

Ein sehr geeignetes Mittel, den Schülern wirklich die Dinge im Raum zu zeigen, scheint mir auch das Stereoskop zu sein.[1]

Einen gewissen Abschluß der Trigonometrie kann man später darin finden, daß man von den Formeln der sphärischen Trigonometrie durch Grenzübergang zurückkehrt zu denen der ebenen Trigonometrie. Ein solcher Rückblick, der sich als eine schöne Anwendung der Infinitesimalrechnung gibt, kann Anlaß werden, noch einmal die Grundgedanken der Trigonometrie von einem etwas höheren Standpunkte aus zu betrachten. Auch ein Blick von der sphärischen Trigonometrie auf die nichteuklidische Geometrie — vgl. die S. 100 genannten Arbeiten von Dieck — hat manches Verlockende.

4. Die trigonometrischen Aufgaben.

Ich nehme eine Gruppe von Aufgaben vorweg, die man nicht als trigonometrische im engeren Sinne bezeichnen kann: die Lösung goniometrischer Gleichungen. Aufgaben dieser Art waren früher recht beliebt, sind in neuerer Zeit aber etwas zurückgetreten. Ich sehe ihren Hauptwert darin, daß sie den Schüler mit den goniometrischen Funktionen und ihrer geometrischen Bedeutung vertraut machen. Deswegen scheint es mir erwünscht, wenn die rechnerischen Lösungsmethoden möglichst von graphischen begleitet werden. Diese graphischen Methoden lassen sich sehr mannigfach gestalten; man braucht durchaus nicht an den Kurven der goniometrischen Funktionen und den daraus durch graphische Addition oder Subtraktion gebildeten zu kleben. Ich erinnere nur daran, daß bei den einfachen Gleichungen, deren Lösung uns die Optik aufgibt, also etwa bei der Bestimmung eines Winkels, wenn in dem Brechungsgesetz $\sin \alpha : \sin \beta = n$ der andere Winkel und n gegeben sind, bei der Totalreflexion, bei dem Durchgang eines Luftstrahles durch ein Prisma usw., geometrische Konstruktionen schnell zum Ziel führen. Weniger bekannt scheinen geometrische Lösungen von Gleichungen des Typus $a \sin \alpha + b \cos \alpha = c$ zu sein, bei denen die Wurzeln durch Schnitt der Geraden $a\,y + b\,x = c$ mit dem Kreise $x^2 + y^2 = 1$ gefunden werden,[2] da ja die Beziehung $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ gilt.[3] In ähnlicher Weise kann man auch noch andere goniometrische Gleichungen

[1] Angewandt z. B. in H. Capelle, Die mathematische Geographie und ihre Nutzanwendung, Berlin (Mittler) 1913, mit 56 Stereoskopbildern.

[2] Eine andere graphische Lösung hat W. H. Veldhuis in der Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde III S. 315ff. gegeben.

[3] Gauß schreibt in einem Brief an Bessel: „Das $\sin^2 \varphi$ ist mir jedesmal fatal, obgleich auch Laplace es gebraucht; fürchtet man, daß $\sin \varphi^2$ zweideutig werden könne (was doch vielleicht nie oder höchst selten eintritt, wenn man von $\sin (\varphi^2)$ spräche), ei nun, so schreibe

lösen, wobei dann an die Stelle der Geraden gleichseitige Hyperbeln, Parabeln u. dgl. treten können. Nur ist die vollständige graphische Durchführung dann nicht mehr so einfach. Der Wert des graphischen Verfahrens besteht hier in der Hauptsache darin, daß sofort ein Überblick über die Anzahl der Lösungen möglich ist. Die rechnerischen Lösungen sind demgegenüber nicht selten unvollständig; man begnügt sich oft mit einem Wert, etwa dem spitzen Winkel, ohne zu untersuchen, ob noch andere Winkel in Betracht kommen.

Neben den eigentlichen goniometrischen Gleichungen empfehle ich auch einige Kurvendiskussionen. Ich komme darauf noch an späterer Stelle zurück, wenn von den transzendenten Funktionen im Bereiche der Analyse die Rede ist. Hier muß aber schon gesagt werden, daß es mit der einfachen Kurve $y = \sin x$ nicht getan ist. Gebraucht wird die allgemeinere Kurve $y = a \sin (bx + c)$. Man tut gut, solche Kurven für eine Anzahl von Konstanten a, b, c zeichnen zu lassen und auf ihre Verwendbarkeit in der Physik zu achten. Gerade mit Rücksicht auf die Physik rate ich, auch einige Additionen von Sinuskurven, vielleicht auch die eine oder andere Multiplikation graphisch ausführen zu lassen. Es kommt nicht so sehr auf die technisch einwandfreie Durchführung als darauf an, daß die wesentlichen Eigenschaften der sich ergebenden Kurven klar erkannt werden.

Nun zu den trigonometrischen Aufgaben im engeren Sinne. Man ist wohl einig darüber, daß es verfehlt ist, erst die bei der Berechnung von Dreiecken zu verwendenden Sätze sämtlich abzuleiten, um erst danach sie anzuwenden. Man zieht vielmehr ein gemischtes Verfahren vor, bei dem die Aufgaben den ganzen Lehrstoff durchsetzen und bei dem jeder neue Satz sofort nach Möglichkeit für die Behandlung von Aufgaben ausgewertet wird. Demgemäß werden schon in denjenigen Teilen der Trigonometrie, die sich noch auf Funktionen spitzer Winkel und auf rechtwinklige Dreiecke beschränken, Aufgaben über das rechtwinklige und gleichschenklige Dreieck, aber auch über regelmäßige Vielecke, Kreissehnen und -tangenten ihre Stelle haben. Erst später kommt dann das allgemeine Dreieck an die Reihe, wobei vielleicht gerade eine solche Aufgabe Ausgangspunkt zur Ableitung des Sinussatzes oder eines anderen Satzes wird.

Bei der Auswahl der Stücke, aus denen Dreiecke zu berechnen sind, hat man sich im wesentlichen von den gleichen Erwägungen leiten zu lassen wie bei den Konstruktionsaufgaben der Planimetrie. Auch hier ist vor unzweckmäßigen Stücken zu warnen. Wenn auch durch die Einführung der r-Methode, von der wir schon sprachen, die Gefahr, in Spitzfindigkeiten zu versinken, geringer ist als in der Planimetrie, so liegt doch gar kein Grund vor, schwierigere Berechnungsaufgaben zu bevorzugen. Der Unterrichtswert der trigonometrischen Aufgaben wird besser in anderer Richtung gesucht.

Es ist eine oft gehörte Klage, daß unsere Untersekundaner nicht rechnen gelernt haben. Während in den Unterklassen der Rechenbetrieb in formaler Hinsicht hier und da vielleicht gar zu weit getrieben wird, fehlt es in den Mittel- und Oberklassen

---

man (sin φ)^2, aber nicht sin$^2\varphi$, was der Analogie nach nur sin (sin φ) bedeuten sollte." Der Schulgebrauch hat sich an diesen Einwand von Gauß nicht gekehrt. Kambly hat die französische Schreibweise benutzt und, wie einmal v. Lühmann gesagt hat: Kambly hat über Gauß den Sieg davongetragen.

vielfach an der unbedingt notwendigen Auffrischung der Rechenfertigkeit. Gelegenheit dazu ist ja genügend vorhanden; sie wird aber oft nicht ausgenutzt. Was der nach dem Besuch der Untersekunda ins Leben tretende Schüler ebenso wie der Abiturient, der sich vielleicht einem naturwissenschaftlichen oder technischen Berufe zuwendet, braucht, ist neben mechanischer Rechenfertigkeit eine Art Zahlengefühl. Dazu rechne ich eine ungefähre Voraussicht des Ergebnisses seiner Größenordnung nach, eine Beurteilung, welcher Gang der Rechnung unter den gegebenen Verhältnissen der zweckmäßigste sein möchte, schließlich und vor allem eine Einsicht in den Grad der in Anbetracht der gegebenen Größen oder der bei der Rechnung im Auge zu haltenden Ziele erstrebenswerten Genauigkeit. In allen diesen drei Dingen ist es mit unseren Schülern schlecht bestellt.

Der Nachdruck wird im mathematischen Unterricht vielfach gar nicht auf die Rechnung, sondern auf die Zusammenstellung der zur Auffindung der Größen nötigen Formeln gelegt. Man zeigt dem Schüler gewissermaßen den Weg, man macht einen Reiseplan, um die Reise selbst aber kümmert man sich nachher nicht oder begnügt sich doch damit, daß sie nach hergebrachten Regeln stumpfsinnig ausgeführt wird. Unzweifelhaft tragen unsere Logarithmentafeln da einen Teil der Schuld. Sie zwingen jeder Aufgabe die vier- oder fünfstellige Genauigkeit auf, gleichgültig, ob sie angängig ist oder nicht. Ich sagte schon an früherer Stelle, man sollte viel mehr als jetzt mit den trigonometrischen Funktionen selbst rechnen lassen. Diejenigen Fälle, auf die es im praktischen Leben häufig ankommt, wo dreistelliges Rechnen am Platze ist, wo also die Benutzung von Logarithmen ein Unsinn wäre (es sei denn, daß man zum Rechenstab greift) fallen bei dem normalen Betrieb von heute ganz aus. Wie wenig Lehrbücher bringen eine Tabelle der dreistelligen Werte der trigonometrischen Funktionen!

Auf der anderen Seite sollte man, wenn genügend Zeit vorhanden, auch der Frage, wie man eine trigonometrische Aufgabe mit größerer Genauigkeit am praktischsten rechnet, geeignete Aufmerksamkeit schenken. Dahin gehört z. B., daß man den Kosinussatz, den man bei Überschlagsrechnungen sehr wohl benutzen kann, beim logarithmischen Rechnen durch andere Formeln ersetzen wird. Der Grundgedanke der Geometrographie sollte auch auf die Trigonometrie übertragen werden. Natürlich will ich damit nicht zu einem systematischen Betrieb einer noch zu schaffenden „Trigonometrographie", oder wie man das Ding nennen möchte, geraten haben. — Bei alledem bleibt Stoff genug, wenn man sich auf die naheliegenden Dreiecksberechnungen beschränkt, wenn man nur darauf achtet, daß mit dem Grad der Genauigkeit auch der Gang der Rechnung sich ändert.

Eine recht empfehlenswerte Übung, bei der der Begriff der Genauigkeit im Vordergrund steht, ist die Untersuchung von Näherungskonstruktionen; am besten eignen sich Kreisteilungsaufgaben oder Näherungskonstruktionen zur Winkeldreiteilung, auch Kreisquadraturen, bei denen der Grad der Genauigkeit freilich vielfach schon mit Benutzung des pythagoreischen Lehrsatzes beurteilt werden kann.

Wir sprachen bisher nur von der gewissermaßen theoretischen Aufgabe. Bei den praktischen Anwendungen der ebenen und sphärischen Trigonometrie haben wir es mit der niederen Geodäsie und der mathematischen Erd- und Himmelskunde zu tun. Ich verzichte an dieser Stelle darauf, den Komplex dieser Aufgaben zu besprechen,

da sich der dritte Teilband damit zu beschäftigen haben wird. Wenige Andeutungen müssen genügen.

Der Mathematiker wird es gern sehen, wenn die Anwendungen sich mit einer gewissen Gleichmäßigkeit über die einzelnen Teile der Trigonometrie verteilen. Schon bei der Lehre vom rechtwinkligen Dreieck wird er Anwendungen wünschen, ich meine die mannigfaltigen Methoden der Höhenmessung, dann die Bestimmung des Böschungswinkels nach den Höhenkurven auf dem Meßtischblatt u. dgl. Beim allgemeinen ebenen Dreieck ist kein Mangel an Aufgabenstoff. Die wichtigsten Feldmeßaufgaben, das Hansensche und das Pothenotsche Problem, erfordern auch eine längere mathematische Erörterung, wie die Rechnung am besten durchzuführen ist. Wertvoll will es mir erscheinen, wenn die eine oder andere Aufgabe nicht bloß rechnerisch, sondern auch graphisch, d. h. durch geometrische Konstruktion in verkleinertem Maßstabe, gelöst und der bei beiden Lösungswegen erzielte Genauigkeitsgrad beurteilt wird.

Bei der sphärischen Trigonometrie wird die Auswahl der Dreiecksaufgaben, die man erörtert, ja vielfach auch der ganze Schatz an Sätzen, lediglich bestimmt durch die Anforderungen der Anwendungen. Ich sprach schon davon, daß man den Umfang je nach Zeit und Schülergeneration verschieden wählen kann. Handelt es sich lediglich darum, zu zeigen, daß die wichtigen Aufgaben der mathematischen Erd- und Himmelskunde systematisch lösbar sind, dann genügt in der Hauptsache Nepersche Regel, Sinussatz und Seitenkosinussatz. Legt man darüber hinaus Wert auf besonders praktische Rechenverfahren, so braucht man entsprechend mehr Sätze.

Die Sachlage sollte bei den Anwendungen der Trigonometrie auf die mathematische Erd- und Himmelskunde eigentlich dieselbe sein wie bei allen anderen Anwendungen der Mathematik: Der Mathematiker setzt das rein Stoffliche als bekannt voraus. Aber mit dem Grundsatz, den man wohl beim Rechenunterricht oder bei physikalischen Anwendungen in der Gleichungslehre einhalten kann, daß jede Aufgabe, die allzu lange Sacherklärung nötig macht, ausschaltet, kommt man hier nicht weiter. Der Mathematiker muß selbst Hand anlegen, solange andere es nicht tun. Er muß sich davon überzeugen, daß die Schüler mit den Begriffen, mit denen sie arbeiten, auch lebhafte Anschauungen verbinden, und wenn das nicht der Fall ist, dann darf er nicht resigniert ganz verzichten oder die Dinge laufen lassen, wie sie wollen, sondern muß selbst erst Astronomie treiben, ehe er nachher wieder Mathematik treibt.

Das ist das Schöne an der Trigonometrie, daß wir hier den Schüler mitten in seine Umwelt hineinstellen können, ihn hier die mathematische Aufgabe herauslesen lassen, um sie dann, wenn sie auch rechnerisch bezwungen, wieder in die Welt der Wirklichkeit zu übertragen. Gewiß, mit anderen Zweigen geht es ähnlich so, aber bei keinem sind die Anwendungen so mit Händen zu greifen wie in der Trigonometrie.

SECHSTES KAPITEL.

Neuere Geometrie.

1. Neuere Geometrie des Dreiecks, Vierecks und Kreises.

Das Planimetriepensum der Unter- und Mittelstufe pflegt eine Erweiterung in der Weise zu finden, daß man mit den der euklidischen Geometrie eigenen Methoden eine Reihe von Sätzen entwickelt, die sich auch auf die typischen Figuren Euklids, auf Dreieck, Viereck, Kreis, beziehen, die aber in ihrem Inhalt über das hinaus gehen, was sich bei Euklid findet. Manches von diesen Sätzen ist noch in der Literatur der Alten anzutreffen, daneben stehen Sätze aus neuerer und gelegentlich neuester Zeit. Ich nenne zunächst die Stoffe, um die es sich handelt.

Die eine Stoffgruppe wird durch die Sätze von Ceva und Menelaus und ihre Umkehrungen eingeleitet, sie bringt dann den Satz von Pascal am Kreis, den Desarguesschen Satz, weiter Sätze aus der neueren Dreieckslehre, wie den vom Feuerbachschen oder Neunpunkte-Kreis, über die Eulersche Gerade, auf der die Schnittpunkte der Höhen, der Mittellinien und der Mittelsenkrechten eines Dreiecks liegen usf.

Die zweite Gruppe von Sätzen beginnt mit der Einführung der harmonischen Punktreihe und des harmonischen Strahlenbüschels — zuweilen wird wohl auch noch das harmonische Ebenenbüschel hinzugenommen. Diese Sätze werden angewandt auf vollständiges Viereck und Vierseit, wobei sich Gelegenheit findet, auf gewisse einfache Konstruktionen mit dem Lineal allein einzugehen, und auf den Kreis.

Die dritte und letzte Gruppe von Sätzen endlich beginnt mit der Einführung von Pol und Polare am Kreis, der Potenz und der Potenzlinie oder Chordale, der Ähnlichkeitspunkte. Als Zielpunkt erscheint etwa der Satz von Monge, nach dem die Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise zu je dreien auf Geraden liegen.

Als die Krönung dieses ganzen Kapitels wird von vielen das sog. Apollonische Berührungsproblem angesehen, die Aufgabe, mit Zirkel und Lineal die Kreise zu zeichnen, die drei gegebene Kreise berühren. Dabei werden auch alle die Grenzfälle berücksichtigt, bei denen die Kreise in Punkte oder Geraden ausarten. Man erledigt das Problem in systematischer Entwicklung mit Benutzung des ebengenannten Potenz- und Chordalenbegriffes. Dieser Weg ist jedenfalls immer dann zu empfehlen, wenn in der Schule die Polaren- und Chordalentheorie entwickelt ist. Als Lösung kommt weiter die erst jüngst von Bodenstedt gefundene in Betracht, die eine sehr klare Darstellung von Hagge gefunden hat.[1] Es ist dringend anzuraten, die durch

[1] H. Bodenstedt, Das Berührungsproblem des Apollonius, ZmnU 37 (1906) S. 89ff. und K. Hagge, Die Berührungsaufgabe des Apollonius, ebenda 38 (1907) S. 328ff.

die verschiedenen Grenzfälle gegebenen Vereinfachungen der allgemeinen Lösung einzeln durchzugehen, trotzdem ja alle diese Grenzfälle unabhängig von der Hauptlösung auf einfachere Weise zu erledigen sind. Ich erinnere mich einer schönen Arbeit, die mir einmal ein Schüler abgeliefert hat, der die Bodenstedtsche Lösung behandelt und dann für die einzelnen Grenzfälle spezialisiert hatte. Dabei ließ sich viel lernen. Bekanntlich gibt es noch einen dritten, vielbegangenen Weg zu dem Apollonischen Berührungsproblem: hat man den Mittelpunkt eines der gesuchten Kreise, so findet man sofort einen konzentrischen Kreis, der durch den Mittelpunkt des einen der gegebenen Kreise geht und zwei den beiden anderen Kreisen konzentrische, leicht zu konstruierende Kreise berührt. Damit ist der allgemeine Fall darauf zurückgeführt, einen Kreis zu finden, der zwei Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

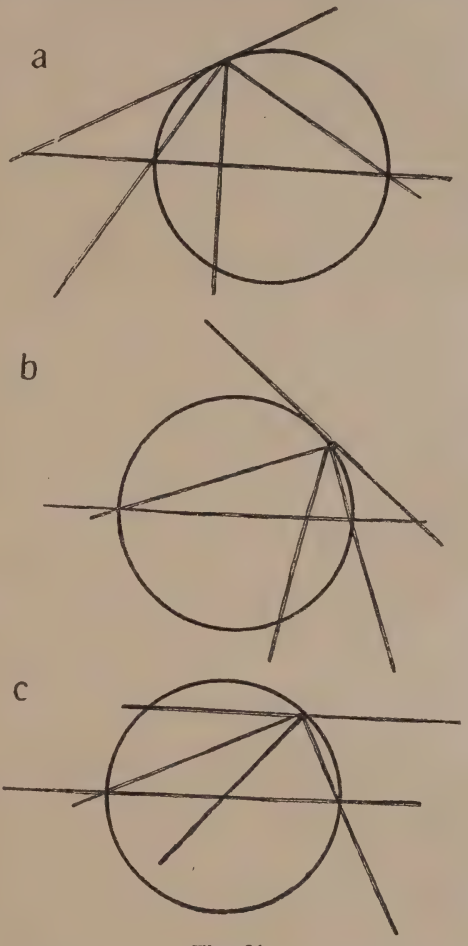


Fig. 61.
Bewegliches Modell zur Veranschaulichung der Sätze über harmonische Punkte und Strahlen von Heinrich in drei Stellungen. Ausführung der Firma H. Hilgers, Bonn a. Rh.

Wir sind damit an einer Stelle schon auf das didaktische Detail eingegangen. Es ist in dieser Hinsicht vor allem noch ein Wort über die Anordnung der verschiedenen Gebiete zu sagen. Die Reihenfolge, die wir oben angaben, ist in den Lehrbüchern wohl die übliche; erst kommen die Transversalensätze, dann die harmonischen Gebilde, schließlich Polaren und Chordalen. Man kann die Stellung der beiden ersten Gruppen auch vertauschen und dann die Sätze von Ceva und Menelaus unter Benutzung der harmonischen Gebilde beweisen.

Ehe wir uns der didaktischen Beurteilung dieses Kapitels zuwenden, noch ein Wort über die Beweismethode. Sie unterscheidet sich, das muß mit Rücksicht auf die Erwähnung etwa des Desarguesschen oder des Pascalschen Satzes noch einmal ausdrücklich gesagt werden, in nichts von der vorher bei der eigentlichen euklidischen Planimetrie üblichen Weise. Selbstverständlich wird der Unterricht im Gegensatz zu Euklid auch hier möglichst das Hilfsmittel der Bewegung der einzelnen Gebilde heranziehen. Der Lehrer wird einen Punkt zwischen den Endpunkten einer Strecke wandern lassen und sehen, wie sich dann der zugeordnete

vierte harmonische Punkt bewegt, ebenso beim vierten harmonischen Strahl, bei Pol und Polare, bei der Chordalen usf. Auf einige andere Mittel, die dem Gebiet einen etwas modernen Anstrich geben, komme ich noch in einem späteren Abschnitt zu sprechen.

Meine Beurteilung dieses Gebietes der Geometrie will ich zunächst einmal etwas kraß aussprechen. Es könnte nichts schaden, wenn das Kapitel als solches ganz verschwände und, soweit es wertvollen Stoff enthält, in andere Gebiete der Geometrie aufgeteilt würde. Dabei sei aber vorweg bemerkt, daß dazu gewisse Vorbedingungen erforderlich sind, die heute erst zum Teil erfüllt sind. Übrigens legen bei einem solchen Vorgehen vorderhand noch die amtlichen Lehrpläne ein Veto ein.

Ich beginne mit den harmonischen Gebilden. Nach meiner Meinung könnten sie ohne Schaden der Ähnlichkeitslehre auf der Mittelstufe einverleibt werden. Wenn, was ja meist schon in der Mittelstufe geschieht, eine Strecke in vorgegebenem Verhältnis innerlich und äußerlich geteilt wird, so ist es eben nur noch ein neuer Name, wenn nun auch von harmonischer Teilung gesprochen wird. Der sog. Apollonische Kreis wird ja fast immer schon für Konstruktionen im Anschluß an die Ähnlichkeitslehre ausgenutzt. Auch solche Dinge wie der Feuerbachsche Kreis[1] sind durchaus nicht zu hoch gegriffen für diese Klassen; sie passen viel besser hierher als dort, wo sie immer etwas isoliert stehen. Wenn man will, kann man auch Ceva- und Menelaus-Satz schon in der Ähnlichkeitslehre erwähnen.

Damit haben wir schon einigen Sätzen der ersten Gruppe eine ihrem Inhalte besser entsprechende Stelle angewiesen. Es bleiben noch einige Kreissätze übrig, wie etwa der von Pascal, von Brianchon, der Satz von Desargues, dann die Polarentheorie mit ihren Fortsetzungen. Gerade an dem Satz von Pascal und ebenso dem ihm dual entsprechenden des Brianchon sieht man mit voller Deutlichkeit, daß sie in ihrer Beschränkung auf den Kreis gänzlich unwichtig sind. Ihre Bedeutung liegt doch darin, daß sie uns ein wunderschönes Mittel an die Hand geben, Kegelschnitte aus vorgelegten Punkten oder Tangenten zu konstruieren — wir kommen noch darauf zurück. Wenn wir den Kegelschnitt dabei auf den Kreis einschränken, dann wird diese Bedeutung ganz hinfällig. Und ganz das Entsprechende gilt von der Polarentheorie.

Das Apollonische Berührungsproblem konnte bis vor kurzem als eine praktisch belanglose Aufgabe gelten. Sie hat im Kriege durch das Schallmeßproblem ungeahnte Bedeutung gewonnen.[2] Dadurch ist das Interesse an der Aufgabe neu geweckt worden.[3] Von ähnlichen Aufgaben nenne ich die Malfattische: In ein Drei-

[1] Eine Zusammenstellung von 20 Beweisen für den Feuerbachschen Satz enthält J. Lange, Geschichte des Feuerbachschen Kreises, Programm Friedrich Werdersche Oberrealschule Berlin, 1894.

[2] Eine umfassende mathematische Behandlung des Schallmeßproblems ist meines Wissens noch nicht veröffentlicht worden. Der Inhalt der Aufgabe geht schon aus einer Reihe von Bemerkungen hervor, deren Fortsetzung seinerzeit die Zensur unterbinden mußte: E. Haentzschel, Eine artilleristische Aufgabe ZmnU 47 (1916) S. 18ff. Äußerungen dazu von Brües, Santer und Steckelberg Ebenda S. 231ff.

[3] E. Salkowski, Die Apollonische Berührungsaufgabe, ZmnU 51 (1920) S. 224 f.; A. Lanner, Das Apollonische Berührungsproblem in stereometrischer Behandlung, Ebenda S. 231ff.

eck sind drei Kreise so zu zeichnen, daß jeder die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt,[1] und die Castillonsche: In einen gegebenen Kreis ist ein Dreieck einzubeschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen, sowie die dazu duale.[2] Der Wert dieser Aufgaben ist in erster Linie ein formaler. Es sind typische Beispiele für größere Konstruktionsaufgaben, bei der die vollständige Determination, die Berücksichtigung aller Spezialfälle nicht ohne Reiz ist. — Dabei wird übrigens die zeichnerische Seite der Aufgaben meist viel zu wenig beachtet. Wie viele Schulen mag es geben, bei denen die Figuren nur in Gedanken und „mit der Zunge", allerhöchstens mit einer Skizze erledigt werden? Wieviel Schulen machen sich wirklich die Mühe, die appollonische Konstruktion für eine Reihe von verschiedenen Lagen der Kreise wirklich zeichnerisch durchführen zu lassen? Wieviel Schulen finden Zeit, die Veränderung in Lage und Größe der Berührungskreise untersuchen zu lassen, wenn eines der gegebenen Elemente sich in bestimmter Weise stetig ändert? Ich kann es den vielen Schulen, die in dieser Hinsicht versagen, gar nicht so sehr verübeln; denn wenn man alles das beachtet — steht das Ergebnis wirklich im Einklang mit der darauf verwandten Mühe?

Meine Meinung geht dahin, daß man besser tut, die Kreissätze an dieser Stelle zu streichen. Ich sage „an dieser Stelle", denn möglicherweise werden sie an einer anderen Stelle nicht entbehrlich sein. Wenn man den Satz von Pascal bringt, dann soll man ihn für Kegelschnitte aussprechen. Allerdings ist der naturgemäße Weg dahin der, ihn erst für den Kreis auszusprechen und dann auf den Kegelschnitt zu übertragen. Aber dabei ist das Wesentliche die perspektive Auffassung. Es genügt, den Pascalschen Satz für den Kreis an jener Stelle abzuleiten. Er gehört in die projektive Geometrie, ebenso wie der Desarguessche Satz und andere.

So wäre das Schicksal also der sog. neueren Geometrie dieses: Zum einen Teil wird sie der Ähnlichkeitslehre überwiesen. Dahin gehören die Sätze über die harmonischen Elemente, die Ähnlichkeitspunkte bei Kreisen, wenn man will auch Ceva- und Menelaussatz, Potenzbegriff am Kreis, Chordale. Zum anderen Teil wird der Stoff der Geometrie der Kegelschnitte überwiesen. Eine dritte Gruppe von Sätzen und Aufgaben kann schließlich ohne Schaden ganz in Wegfall kommen, dahin rechne ich z. B. die systematische Erledigung des Apollonischen Problems.

Es darf natürlich nicht übersehen werden, daß diese Aufteilung gewisse Voraussetzungen hat. Einmal muß die Ähnlichkeitslehre in der Mittelstufe Zeit haben, die genannten Stoffe in sich aufzunehmen. Denn eine Stoffvermehrung, die tatsächlich ins Gewicht fällt, bedeutet es jedenfalls. Zweitens aber, und das ist noch wichtiger, es muß nicht nur eine analytische Geometrie der Kegelschnitte da sein. Wir werden darüber gleich noch zu sprechen haben.

Im 19. Jahrhundert hat die nähere Beschäftigung mit der Geometrie des Dreiecks zahlreiche neue Sätze zutage gefördert, Sätze von Gergonne, Nagel, Grebe, Brocard u. a. wurden gefunden, Grebescher Punkt, Brocardscher Punkt, Brocardscher Kreis, Brocardscher Winkel u. dgl. wurden eingeführt und studiert. Gerade

[1] Vgl. z. B. Koppe-Dieckmann II. Bd.; Thieme l. c. S. 164; M. Draeger, Transformation mittels reziproker Radien, Malfattische Aufgabe und Feuerbachscher Kreis im Geometrie-Unterricht, Lehrproben und Lehrgänge 1922, 2. Heft, S. 58 ff.

[2] Vgl. z. B. Spieker, Geometrie Ausg. A, S. 218ff., Thieme l. c. S. 163.

die Lehrerschaft an den deutschen höheren Schulen hat an dem Ausbau dieser neueren Dreiecksgeometrie, von der die genannten Sätze und Begriffe einen kleinen Ausschnitt bedeuten, tätigsten Anteil genommen. Ein Blick in das Aufgaben-Repertorium der Hoffmannschen Zeitschrift lehrt das. Die wichtigsten Ergebnisse findet man bei Thieme S. 126ff. zusammengestellt. Eine Gesamtdarstellung gibt der Artikel von G. Berkhan und W. Fr. Meyer, Neuere Dreiecksgeometrie, in der großen Math. Enzykl. (Bd. III A B 10). Die Schule sollte, so verlockend es besonders für den auf diesem Gebiete vielleicht selbst forschenden Mathematiklehrer sein möchte, zumindest im regelrechten Unterricht die Beschäftigung mit diesen Gebieten mathematischer Kleinforschung vermeiden.

2. Die synthetische Geometrie der Kegelschnitte.

Es gab eine Zeit, wo sich die Schulmathematik bei den ebenen Gebilden gänzlich auf die Behandlung von Kreis und Gerade beschränkte. Auch das hängt natürlich mit Euklids Elementen zusammen. Erst verhältnismäßig spät wurden Wünsche nach einer synthetischen Geometrie der Kegelschnitte laut. Der wichtigste Grund dafür war wohl die Absicht, auch in der Abschlußklasse die Geometrie als ein Gegengewicht gegen die dort vorherrschende Arithmetik zu Wort kommen zu lassen. Die Möglichkeit, auf diese Weise die Planimetrie der vorhergehenden Klassen immanent zu wiederholen, Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal an einen für die Schüler neuen Stoff anzuknüpfen, und nicht zum letzten die Gelegenheit, das geometrische Anschauungsvermögen lebendig zu halten, waren der Einführung des neuen Gebietes günstig.

Meist werden die Kegelschnitte nacheinander behandelt, wobei die Parabel in der Regel vorangeht, Ellipse und Hyperbel folgen. Nur einige wenige beginnen mit der Ellipse, um dann die Parabel oder zuvor noch die Hyperbel folgen zu lassen. Eine andere Möglichkeit der Gliederung ist die Zusammenordnung des Stoffes nach Lehrsatzgruppen, wobei in jeder einzelnen Gruppe alle drei Kegelschnitte zu Wort kommen.

Ich will im folgenden einer solchen natürlichen Disposition folgen. Damit soll aber nicht gemeint sein, daß dies der einzig gangbare Weg sei. Eine natürliche Disposition hat den Vorteil, daß das Gemeinsame und das Unterschiedliche der drei Kegelschnitte deutlicher in die Erscheinung tritt, daß die Schüler bei der Aneignung der Lehrsätze sich nicht einem unübersichtlichen Vielerlei gegenübersehen, daß in den Beweisen die Gleichartigkeit der Methode in den drei verschiedenen Fällen zum Ausdruck kommt. Diese Vorteile lassen sich aber zum großen Teil auch dann ausnutzen, wenn man erst einen Kegelschnitt, etwa die Parabel oder die Ellipse, eingehend behandelt, und dann bei den andern Kegelschnitten, die ersten Ausführungen zugleich wiederholend, ähnliche Lehrsätze und Beweismethoden wieder findet.

Man geht in der synthetischen Geometrie der Kegelschnitte von ihrer Definition in der Ebene aus. Die Verbindung mit der Raumdefinition, d. h. also der Entstehung der Kurven als ebene Schnitte eines geraden Kreiskegels, stellen die Dandelinschen Kugeln in bekannter Weise her. Die Beweise, die an das räumliche Anschauungsvermögen der Schüler, zumindest an die Zeichengewandheit, einigen Anspruch stellen, werden zuweilen am Schlusse, besser aber wohl am Anfang des ganzen

Kapitels gebracht, wobei dann natürlich die verschiedenen Kegelschnitte mit samt ihren Grenzformen gemeinschaftlich behandelt werden, auch dann, wenn sonst eine andere Anordnung vorgezogen ist.

Die Kegelschnitte werden bei diesem Lehrgang, wie gesagt, als geometrische Örter definiert. Es ist üblich, von den Brennpunktseigenschaften auszugehen. Die Ellipse ist also der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die einen gegebenen Kreis berühren und durch einen Punkt innerhalb dieses Kreises gehen. Bei der Hyperbel liegt der gegebene Punkt außerhalb, bei der Parabel ist der Kreis in eine Gerade ausgeartet. Häufiger noch ist die andere Fassung, die bei der Ellipse z. B. der bekannten Gärtnerkonstruktion zugrunde liegt: die Ellipse ist der geometrische Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten eine konstante Summe haben. Bei der Hyperbel tritt an die Stelle der Summe die Differenz.

Ich habe immer gefunden, daß eine inhaltlich und sprachlich richtige Fassung dieser Definition den Schülern schwer fällt. Ich gehe dabei selbstverständlich von der Voraussetzung aus, daß man die Schüler nicht einfach Lehrbuchdefinitionen auswendig lernen läßt, sie vielmehr anleitet, selbst den Wortlaut zu finden. Wenn der Lehrer auf die Fassung der Definition achtet, wird die Überwindung der kleinen Schwierigkeit schnell zu erreichen sein.

Bei der Parabel muß man eine von den andern abweichende Definition wählen, da ja der eine Brennpunkt ins Unendliche fällt. Man definiert sie als Ort der Punkte, die von einem Punkte und einer Geraden gleichen Abstand haben. Die Gleichartigkeit der drei Definitionen kann auch in der Weise gewahrt bleiben, daß man die Kegelschnitte definiert als Ort der Punkte, deren Abstände von einem festen Punkt und einer festen Geraden konstantes Verhältnis haben, wobei dann die drei Fälle zu unterscheiden sind, ob dieser Wert kleiner, gleich oder größer als 1 ist. Daß die beiden ersten Definitionen sich decken, ist trivial, daß aber die letzte Definition mit ihnen übereinstimmt, erfordert für Ellipse und Hyperbel einen ausdrücklichen Beweis.

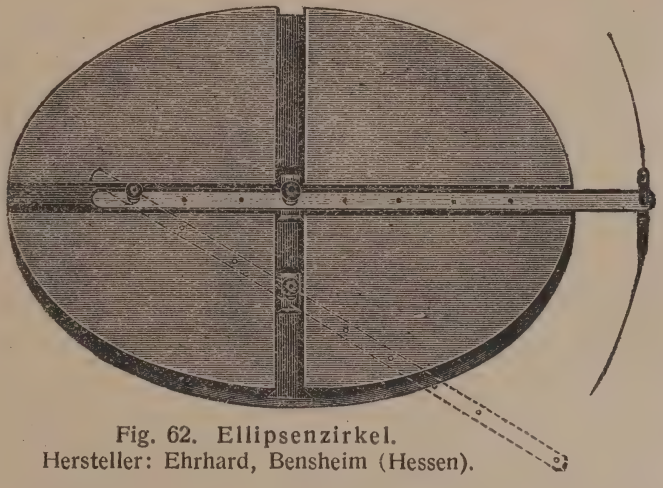


Fig. 62. Ellipsenzirkel.
Hersteller: Ehrhard, Bensheim (Hessen).

Die Definition der Kegelschnitte gibt nicht nur die Möglichkeit zur Diskussion der Kurvenpunkte und damit der Gestalt der Kurve, sie gibt gleichzeitig auch ein Kriterium für die Lage irgendwelcher Punkte der Ebene zum Kegelschnitt. Es ist recht nützlich, z. B. bei der Hyperbel durch geeignete Schraffierung anzudeuten, für

welche Gebiete der Zeichenebene die Differenz der Brennpunktsabstände eines Punktes größer oder kleiner als die Hauptachse 2a ist.

Eine andere Ergänzung der Ausführungen über die Kegelschnittdefinition sind Angaben über Kegelschnittzirkel, die sich auf die Ortsdefinition gründen. Man kann sehr wohl die Schüler anleiten, selbst die eine oder andere Vorrichtung zu ersinnen und danach Modelle herzustellen. Das gleiche gilt von anderen, aus irgendwelchen Sätzen sich ergebenden Methoden zur praktischen Herstellung von Kegelschnitten.

Wenn die Lage eines Punktes zu einem Kegelschnitt erörtert worden ist, handelt es sich weiter um die Lage einer Geraden. Die Konstruktion des Schnittpunktes einer Geraden mit dem Kegelschnitt und im besonderen Falle die Berührung von Gerade und Kegelschnitt ist zu erörtern. Auch hier gilt, was schon früher einmal hervorgehoben, daß auf die praktische Durchführung dieser durch die Benutzung besonderer Fälle des Apollonischen Berührungsproblems interessanten Aufgabe Wert zu legen ist. Es folgen nun Sätze über die Tangente, über die Bedeutung des Leitkreises, des Scheitelkreises u. dgl.

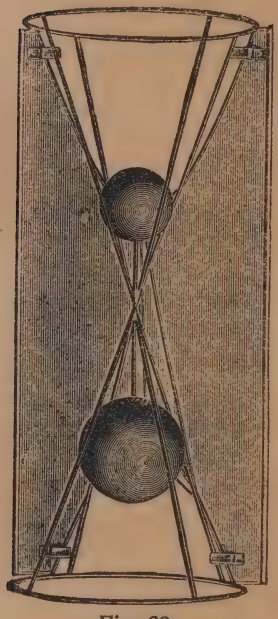


Fig. 63.
Doppelkegel mit Dandelinschen Kugeln. Fall der Hyperbel. Ausführung von F. Neustadt, Niederlößnitz-Dresden.

Eines besonderen Hinweises bedarf die Tatsache, daß eine Gerade einen Kegelschnitt höchstens in zwei Punkten schneidet und daß von einem Punkte an einen Kegelschnitt höchstens zwei Tangenten gelegt werden können. Auch hier wieder empfehle ich eine Diskussion der Punkte der Ebene hinsichtlich der Zahl der von ihr ausgehenden Tangenten. Bei Ellipse und Parabel leuchten die Dinge unmittelbar ein. Aber bei der Hyperbel sollen sogar Mathematiker von Fach irren. Man lasse also durch Schraffieren die Teile der Ebene unterscheiden, von denen man keine Tangente, zwei Tangenten an den einen, zwei Tangenten an den anderen, je eine Tangente an beide Äste der Hyperbel ziehen kann. Dabei wird auch die Bedeutung der Asymptoten als Grenzlage von Tangenten deutlich.

Von den weiteren Satzgruppen ist die über konjugierte Durchmesser zu erwähnen. Wichtiger als viele Sätze ist eine Einsicht in die Änderung der Lage des einen Durchmessers, wenn sich der andere um den Mittelpunkt dreht. Vielfach geht man auch noch auf harmonische Beziehungen am Kegelschnitt ein. Manchmal wird eine Theorie der Polaren entwickelt und auf die Bedeutung der Leitlinie hingewiesen.

Die Art und Weise, wie diese Sätze abgeleitet werden, unterscheidet sich in den Lehrgängen, die wir bisher im Auge hatten, in nichts von dem Verfahren Euklids. In der Tat handelt es sich um eine methodisch und zum größten Teil auch inhaltlich der Kegelschnittlehre von Apollonius[1] nachgebildete Darstellung.

[1] Apollonii Pergaei quae graece exstant cum commentariis antiquis. Herausgeg. von J. L. Heiberg, 2 Vol., Leipzig (Teubner) 1890/93.

Die synthetische Geometrie der Kegelschnitte tritt ganz naturgemäß vielfach in engere Verbindung mit der analytischen Geometrie der Kegelschnitte; schon bei Apollonius kann man an solche Zusammenhänge denken, obwohl er den Koordinatenbegriff noch nicht hat. Das kann im Unterricht bis zu einer regelrechten Fusion führen, worüber später noch einmal zu sprechen sein wird. Unerläßlich ist auch der Anschluß an die Stereometrie. Bei der Herleitung der Tatsache, daß die als geometrische Örter definierten Kurven tatsächlich Schnitte des geraden Kreiskegels sind, bedient man sich der Dandelinschen Kugeln, die dem Kreiskegel einbeschrieben werden und die ebenen Schnitte zu Tangentialebenen haben.[1] Recht wichtig erscheint auch die zeichnerische Behandlung des Schnittproblems mit den Methoden der darstellenden Geometrie. Man braucht, was schließlich auch im Gymnasium möglich, nur bis zum Schnitt des Kreiskegels mit Ebenen, die senkrecht zur Aufrißebene liegen, vorgedrungen zu sein, um alle notwendigen Hilfsmittel zur Verfügung zu haben.

Schon als wir über die Gründe für die Einführung einer synthetischen Kegelschnittlehre sprachen, die man mit Rücksicht auf die analytische Behandlung derselben Dinge vielleicht für überflüssig halten könnte, war besonders auf die Konstruktionen hingewiesen worden. Es fällt natürlich auch hier nicht schwer, Konstruktionen von Kegelschnitten aus möglichst unzweckmäßigen Stücken in großer Zahl zu erdenken. Es ist ebenso klar, daß wir solchen unfruchtbaren Denkübungen nicht das Wort reden wollen, daß wir uns also auf einige wichtige und wertvolle Fälle beschränken werden.

Wir haben schon gelegentlich darauf hingewiesen, daß gerade bei Kegelschnitten auf eine möglichst sorgfältige zeichnerische Durchführung der Aufgaben zu sehen ist. Die Kegelschnitte haben eine eminent praktische Bedeutung. Wir können uns aber nicht in der Praxis damit begnügen, Brennpunkte und große Achse einer Ellipse oder einer Hyperbel zu konstruieren, wir müssen die Kurven wirklich ausziehen. Wenn wir, um nur an eins zu erinnern, das Schrägbild eines Zylinders, eines Kegels, einer Kugel zeichnen wollen, immer treten Ellipsen auf, die wirklich kontinuierlich ausgezogen sein wollen. Wie man solche Kurven möglichst bequem und dabei möglichst genau zeichnet, ist eine wichtige, wenn man will, technische Frage, an der aber der mathematische Unterricht nicht vorübergehen darf. In der Architektur spielt der Ersatz von Ellipsen durch Korbbögen eine große Rolle.[2] Recht fruchtbar lassen sich allerdings solche Überlegungen erst gestalten, wenn man auch die Hilfsmittel der Analysis, wenn möglich auch der infinitesimalen Methoden zur Hand hat; die Näherungsmethoden zur Konstruktion von Kegelschnitten laufen ja im wesentlichen auf die Benutzung von Krümmungskreisen hinaus.

Und auch das mag zu den Aufgaben aus der Kegelschnittlehre noch wiederholt

[1] Die Zeichnungen zu diesem Satz sind nicht ganz einfach. A. Schulte-Tigges hat bei G. Reimer in Berlin zwei mathematische Wandtafeln herausgegeben: 1. Ellipse und Parabel als Zentralprojektionen des Kreises und 2. die Hyperbel als Zentralprojektion des Kreises. — In jedem Falle sollte man aber vor der Benutzung solcher Tafeln erst eigene Zeichnungen entwerfen bzw. vor den Schülern schrittweis entstehen lassen.

[2] Ich verweise z. B. auf den Anhang A (und bei dieser Gelegenheit auch auf B und C) in H. E. Timerding, Die Erziehung der Anschauung, Leipzig (Teubner) 1912.

werden, was wir für eine Planimetrie der Unter- und Mittelstufe ausführlicher erläutert haben: Man begnüge sich nicht mit fertig formulierten Aufgaben, man führe die Schüler an Probleme heran und versuche, ob sie sie selbständig lösen können. Nur ein Beispiel[1]: Man hat einen prismatischen Trog, dessen Querschnitt ein Dreieck ist (Fig. 66), dessen zwei Seitenwände den Winkel α bilden, mit roter Tinte gefüllt. Man stellt die untere Kante fest auf den Boden und wippt nun langsam hin und her. Dann zeichnet sich als Grenze der umhüllenden zylindrischen Fläche der verschiedenen Lagen des Flüssigkeitsspiegels an den Enden des Troges eine Kurve ab, der Querschnitt jener zylindrischen Fläche. Was ist das für eine Kurve?

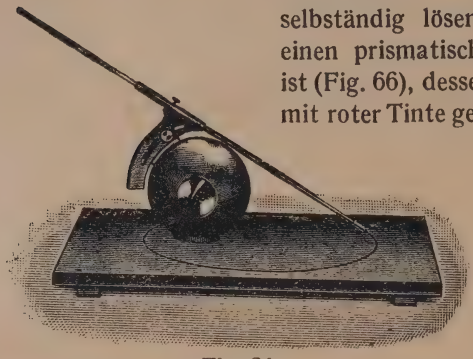


Fig. 64.
Erzeugung des Kegelschnittes auf Grund des Satzes von den Dandelinschen Kugeln. Modell von Martin Schilling, Leipzig.

Zum Schluß noch eine Bemerkung über die zeitliche Anordnung der Kegelschnittlehre. Die synthetische Geometrie der Kegelschnitte wird wohl — es handelt sich überhaupt nur um Realanstalten — durchweg in die Prima verlegt, ich wüßte jedenfalls nicht, wie man in

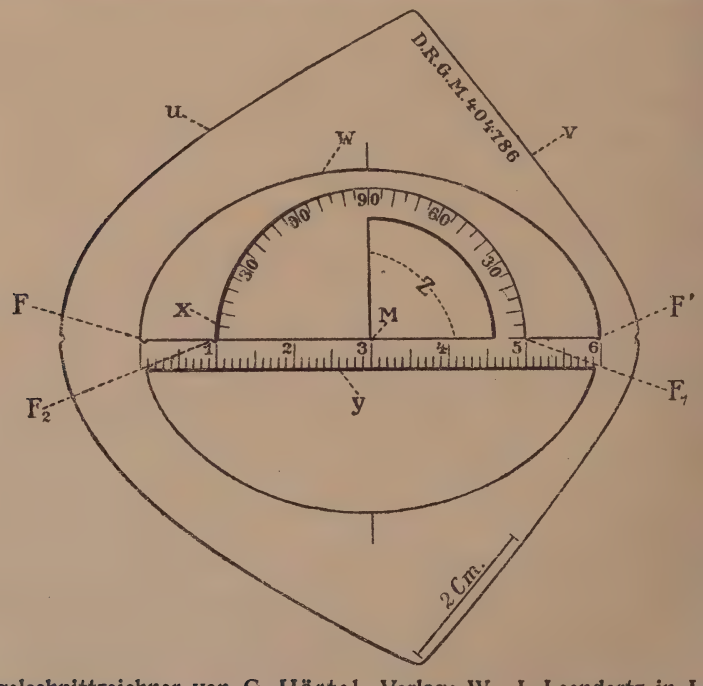


Fig. 65. Kegelschnittzeichner von G. Härtel. Verlag: W. J. Leendertz in Leer, Ostfr.

[1] Meines Wissens zuerst angegeben von E. Günther, Darstellung einer Hyperbel, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter 6 (1909) S. 4.

Obersekunda Raum für sie schaffen könnte. Es ist nun aber in Vorschlag gebracht worden, einfache Kegelschnitte, z. B. Parabel oder gleichseitige Hyperbel, schon in den Mittelklassen zu behandeln. Milinowski ist z. B. in einem eigenen Büchlein[1] auf die gleichseitige Hyperbel eingegangen, Max Simon hat auf die Parabel hingewiesen, und es ist noch nicht lange her, daß Weinmeister[2] erneut eine elementare Behandlung dieser Kurven empfohlen hat: „Nach meiner Ansicht treiben wir in der Schule im allzu engen Anschluß an Euklid viel zu viel Kreislehre!" sagt er. Nun ist der Wunsch durchaus berechtigt, daß auch die Tertianer und Untersekundaner schon erfahren, es gibt außer dem Kreis noch andere Kurven. Aber dem kommt, wie wir sehen werden, die Arithmetik mit ihren graphischen Darstellungen in weitgehendem Maße entgegen. In der Tat kann das Studium der Parabeln nicht bloß zweiten, sondern auch höheren Grades schon in Obertertia getrieben werden, und auch gleichseitige Hyperbeln kommen im Anschluß an die Potenzen mit negativen Exponenten, zusammen mit Hyperbeln höherer Grade, zur Erörterung. Deshalb kann auf eine ausdrückliche elementarsynthetische Behandlung, wie sie Milinowski wollte, nach meiner Meinung verzichtet werden.

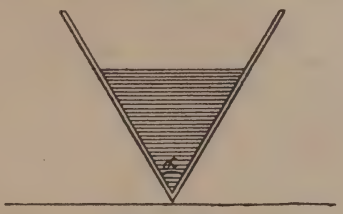


Fig. 66.

Die Behandlung der Kegelschnittlehre in diesem Abschnitt hängt mit einer anderen Frage zusammen. Soll man in die Schule die projektive Geometrie einführen? Von der Verneinung oder Bejahung dieser Frage wird auch die Darbietung der Apollonischen Kegelschnittlehre wesentlich beeinflußt. Das muß uns jetzt ausführlicher beschäftigen.

3. Einfügung einiger Grundgedanken der neueren Geometrie in die alte.

Seit nun schon mehr als fünfzig Jahren sind Bestrebungen am Werk, der projektiven Geometrie oder wenn man will der Geometrie der Lage Eingang in die höheren Schulen zu verschaffen. Im ersten Jahrgang der früher Hoffmannschen Zeitschrift hat Sturm, damals noch Oberlehrer (im heutigen Sinne) in Bromberg, eine Lanze dafür gebrochen. Und doch, wenn man das Ergebnis dieser fünfzig Jahre übersieht, so muß man sagen, eine eindeutige Stellungnahme zu dem damit für den mathematischen Unterricht gegebenen Problem ist noch nicht erkennbar. Ich habe daher gern 1914 eine Anregung gegeben, zur Klärung der Sachlage eine Art Meinungsaustausch in derselben Zeitschrift, in der einst jener Aufsatz von Sturm stand, herbeizuführen. Herr Böger, heute wohl der energischste Vertreter der projektiven Geometrie im Schulunterricht, hat diese Aussprache bald darauf eingeleitet[3], und es war möglich, kurze Zeit danach eine große Anzahl von Äußerungen zu der

[1] A. Milinowski, Elementar-synthetische Geometrie der gleichseitigen Hyperbel. Leipzig (Teubner) 1883.

[2] Ph. Weinmeister, Unendlichkeitsrechnung in der Schule. ZmnU 38 (1907) S. 1ff.

[3] R. Böger, Inhalt, Art und Name der neueren Geometrie, ZmnU 45 (1914) S. 19ff.

Frage in einem „projektiven Heft" zusammenzustellen.[1] Für den vorliegenden Abschnitt entnehme ich der Gesamtheit der Äußerungen zunächst eine Tatsache, auf die ich schon vor sechs Jahren bei anderer Gelegenheit hinwies: Daran, daß die euklidische oder metrische Geometrie durch die projektive Geometrie oder Geometrie der Lage schon auf der Unter- und Mittelstufe ersetzt werde, ist nicht zu denken. Wir werden auch für die Zukunft in Quarta mit Dreiecken, Vierecken und Kreisen anfangen und nicht mit Punktreihen und Strahlenbüscheln. Zu jener „wahren Einfachheit", „welche in der Einheit der Prinzipien beruht", die Hankel an der projektiven Geometrie rühmt, können wir uns also im geometrischen Anfangsunterricht nicht bekennen, wenn wir auch auf den „Zusammenhang geometrischer Gestalten in allem Wechsel und in aller Veränderlichkeit ihrer sinnlich vorstellbaren Lage" mehr achten werden, als vielleicht früher geschehen.

In der Tat wird die projektive Geometrie nicht ohne Einfluß auf Inhalt und Methode der Geometrie in den Unter- und Mittelklassen sein. Böger hat die Forderung aufgestellt: „Die euklidische Geometrie werde projektiv!" Gewisse Grundgedanken, die die neuere Geometrie geschaffen hat, müssen in die alte Geometrie eindringen und sie allmählich umwandeln. In diesem Umsetzungsprozeß sind wir gegenwärtig begriffen. Er ist noch keineswegs beendet. Es ist auch nicht abzusehen, wann er beendet sein wird.

Wir haben schon gehört, als wir uns im dritten Kapitel mit der Planimetrie beschäftigten, daß die gegenwärtige Lage des geometrischen Unterrichtes etwas Unbefriedigendes hat, daß man geradezu das Gefühl hat, sie sei in den Meraner Vorschlägen etwas vernachlässigt worden. Das hat drei Gründe, einen didaktischen, einen psychologischen und einen stofflichen. Die didaktische Schwierigkeit läßt sich überwinden, wenn man den Begriff der geometrischen Aufgabe weiter faßt als bisher, wenn man nicht bloß Konstruktionen verlangt, sondern geometrische Probleme verschiedenster Art behandelt. Die psychologische Schwierigkeit ist durch die strenge Axiomatik in den Geometrieunterricht hineingetragen worden oder doch erst recht deutlich geworden; ihr ist durch eine der kindlichen Entwicklung Rechnung tragende Auswahl der wissenschaftlichen Methoden zu begegnen. Die stofflichen Schwierigkeiten schließlich sind gegeben durch die unabweisbare Aufgabe, die alte Geometrie im Sinne der neueren umzuwandeln.

Wir geben einige Gesichtspunkte an, in welcher Richtung sich die Umwandlung abspielt. Es ist recht einfach, zu sagen, die alte Geometrie soll vom Geiste der neueren durchtränkt werden, wenn man sich nicht einmal darüber einig ist, was denn nun der ureigentliche Kern der neueren Geometrie ist. Die einen sagen: die Beweglichkeit der Gebilde, andere: die Berücksichtigung des Richtungssinnes, wieder andere: die uneigentlichen Gebilde, also der unendlich ferne Punkt, die unendlich ferne Gerade, wieder andere: die Auffassung der Geraden als Trägers der Punkt-

[1] Das Heft (Juli 1914) enthält folgende Aufsätze: H. Keferstein, Aus dem Unterricht in der Geometrie der Lage; M. Zacharias, Zur Frage des Unterrichts in der neueren Geometrie; P. Zühlke, Zur Frage nach der Bedeutung der projektiven Geometrie für den mathematischen Schulunterricht; R. Böger, Zur Umbildung der euklidischen Geometrie; ders., Die trigonometrischen Summenformeln; ders., Der Satz vom Umfangswinkel; W. Dieck, Der Geist der neuen Geometrie.

reihe und des Punktes als Trägers des Strahlenbüschels und damit im Zusammenhang das dualistische Prinzip. Ich habe noch lange nicht alle Meinungen, die ausgesprochen sind, wiedergegeben. Ich meine, ein Streit ist da gänzlich müßig. Alles was eben genannt ist, gehört zu den Grundgedanken der neueren Geometrie; da noch eine Rangordnung einzuführen, ist vollkommen überflüssig.

Ehe wir uns im folgenden Abschnitt der eigentlichen projektiven Geometrie zuwenden, wollen wir in diesem untersuchen, in welcher Weise man die genannten und einige andere Gesichtspunkte der neueren Geometrie beim Unterricht der alten Geometrie berücksichtigen kann. Wir werden in einzelnen Fällen uns mit erneuten Hinweisen auf das begnügen können, was bereits im dritten Kapitel gesagt ist. Unsere Bemerkungen werden jetzt aber auf die gesamte Geometrie, nicht bloß auf die dort besprochene Planimetrie der Mittel- und Unterstufe bezogen werden können, also beispielsweise auch auf die in diesem Kapitel eben erörterte Kegelschnittlehre, wenn man sie im Sinne von Euklid betreibt.

Die starre Geometrie Euklids kannte die Beweglichkeit der geometrischen Gebilde nicht; nur in der Verlegenheit erscheint einmal die starre Bewegung als deus ex machina. Ein Grundzug der neueren Geometrie ist es, daß die Gebilde veränderlich sind, daß sie ihre Lage ändern, daß der Punkt auf dem Strahl wandert usf. Wir haben im dritten Kapitel gesehen, wie die Ausnützung der Beweglichkeit der Gebilde immer mehr Fortschritte gemacht hat. Vor allem sind es Translation und Rotation und als spezielle Fälle wieder das Umklappen (bei der axialen) und das Herumdrehen um 180^0 (bei der zentralen Symmetrie), die vielfache Verwendung finden. Wir brauchen darauf nicht noch einmal einzugehen.

Die Einführung des Richtungsbegriffes bei der Geraden hat zur Folge, daß nach einer Drehung um 180^0 um einen ihrer Punkte noch keine Deckung eintritt, daß vielmehr die beiden dann übereinander liegenden Geraden einen Richtungsunterschied besitzen. Ebenso kann man bei dem Winkel die Richtung des Drehungssinnes benutzen. Es gibt Gebiete der Geometrie, wo das allgemein geschieht: in der analytischen Geometrie und in der Trigonometrie, freilich auch da wohl nicht immer ganz konsequent. Aber in anderen Gebieten sieht man von der Einführung des Sinnes ganz ab, vor allem in der Planimetrie. Ich möchte nun nicht raten, den Richtungssinn von Anfang an systematisch zu benutzen.[1] In der Quarta kommt man mit der Einführung des Strahles, der ja im Gegensatz zur Geraden eine bestimmte Richtung hat, schon aus.[2] Später aber dürfte sich die allgemeine Einführung gerichteter Strecken und Geraden, gerichteter Winkel dringend empfehlen. Über die Stelle, wo von dem Richtungssinn und damit von Strecken, die mit Vorzeichen behaftet sind, zuerst die Rede sein kann, läßt sich streiten. Mir will die Einführung am natürlichsten bei der Unterscheidung der inneren und äußeren Teilung einer Strecke erscheinen, also in der Ähnlichkeitslehre. Dann hat man den Begriff

[1] Wie es dann mit der ebenen Dreieckslehre stände, zeigt ein Aufsatz: M. Brües, Kongruenz und Ähnlichkeit im orientierten Dreieck. ZmnU **46** (1915) S. 607ff. Im übrigen sei für das sphärische Dreieck an die Auffassung von Möbius und Study erinnert.

[2] Den für den wissenschaftlichen Aufbau der Geometrie sehr wichtigen Begriff des Speeres (nach Study) kann ich für die Schule nicht empfehlen. Vielleicht schafft aber eine methodische Durcharbeitung dieser Theorie in dieser Hinsicht Wandel.

auch schon bei der ebenen Trigonometrie zur Hand.[1] Jedenfalls würde man auch bei der Definition des Potenzbegriffes am Kreise, bei den harmonischen Elementen usw. das Vorzeichen berücksichtigen müssen.

Der Erfolg einer solchen Einführung wäre eine wesentliche Vereinfachung der Beweise. Läßt man den Richtungssinn unberücksichtigt, so bleibt in vielen Fällen nichts anderes übrig, als von verschiedenen Lagen jede für sich zu erörtern. Handelt es sich nur um zwei Lagemöglichkeiten, so macht das nicht gar zuviel aus. Wenn aber eine Vielheit vorhanden ist, dann ist es etwas anderes. Böger hat in jenem „projektiven Heft" gezeigt, wie man z. B. bei dem Additionstheorem der trigonometrischen Funktionen mit Hilfe des gerichteten Winkels alle Fälle systematisch auf einmal erledigen kann. — Es gibt allerdings auch noch einen zweiten Weg, der noch einfacher ist und deshalb wohl in den meisten Fällen eingeschlagen wird: Man beweist das Problem für den einfachsten Fall und — schweigt über die anderen Fälle, indem man der Vernunft der Mathematik vertraut, daß in den anderen Fällen keine Dummheiten herauskommen. Ein solches Verfahren ist aber alles andere als mathematisch.

Es gibt nicht wenige wissensfreudige Mathematiker, die die Bedeutung der neueren Geometrie für das euklidische Lehrgebäude in der Einführung der uneigentlichen Elemente sehen, und die deshalb nichts Eiligeres zu tun haben, als schon in der Parallelenlehre in Quarta von dem unendlich fernen Punkt zu sprechen. Ich habe schon seinerzeit dieses Vorgehen lebhaft abgelehnt. Bei dem unendlich fernen Punkt kann sich der Quartaner nichts denken; zu der fruchtbaren Abstraktion aber, zu der Vereinfachung der mathematischen Sprache beim Formulieren von Sätzen und Fassen von Beweisen, wie sie die Einführung der uneigentlichen Elemente genau so wie die des Richtungsbegriffes mit sich bringt, ist der Schüler in diesem Alter noch nicht fähig. Für ihn ist es schon Abstraktion genug, sich drei beliebige Punkte in der Ebene und ihre Verbindungsstrecken zu denken; man mute ihm nicht noch zu, daß einer dieser Punkte ins Unendliche fallen kann. Auch diesen Begriff möchte ich gern hinausgeschoben wissen bis etwa zur Ähnlichkeitslehre, wo bei der harmonischen Punktreihe z. B. die Einführung zwanglos geschehen kann. Aber auch dann noch sehe man vielleicht von der unendlich fernen Geraden ab. Die Schwierigkeiten für das Verständnis sind hier doch recht groß. Warum führt man nur eine einzige unendlich ferne Gerade in der Ebene ein? wird der Schüler fragen. Die Erkenntnis der Zweckmäßigkeit der neuen Begriffsbildung setzt bereits eine starke mathematische Schulung voraus.

Schließlich erwähne ich noch die duale Verwandtschaft einzelner Probleme. Es will mir fraglich erscheinen, ob man schon in den Mittelklassen auf einfache duale Beziehungen, etwa zwischen dem Sehnen- und Tangentensatz, hinweist; von einer Begründung kann jedenfalls an dieser Stelle noch nicht die Rede sein. Aber bei manchen Fragen, die wir bei Gelegenheit der sog. neueren Geometrie besprochen haben, kann man doch schon näher auf die Sachlage eingehen. Die Beziehungen zwischen Pol und Polare bieten ein Beispiel dafür, das im allgemeinen wohl erwähnt,

[1] Vgl. hierzu den einen der in Anm. 1 S. 196 genannten Aufsätze von Böger.

aber selten vollständig durchgeführt wird.[1] Die Gegenüberstellung der Sätze von Pascal und Brianchon, der Sätze vom vollständigen Viereck und vollständigen Vierseit wird sich kaum jemand entgehen lassen, an welcher Stelle er auch diese Sätze bringt. Es ist immerhin beachtenswert, daß bei der Begründung dieser dualen Beziehung der eine wichtige Gesichtspunkt der projektiven Geometrie, die Gerade als Träger der Punktreihe ebenso anzusehen wie den Strahlenbüschel mit einem gewissen Anfangspunkt als Träger einer Geradenschar dem Schüler klar zum Bewußtsein gebracht wird.

Wir haben einige neuere Gedanken kennen gelernt, deren Einfügung in das euklidische Lehrgebäude im Sinne jenes Programmes: „Die euklidische Geometrie werde projektiv" wirken würde. Dieses Ziel wird aber noch besser erreicht werden, wenn sich der Lehrer von Anfang an vor Augen hält, was schon Seeger einmal vor vielen Jahren gesagt hat: „Die Elementargeometrie ist nicht und will nicht sein eine Geometrie des Dreiecks oder des Sehnenvierecks oder des Kreises. Sie kann sich überhaupt nicht darauf einlassen, die Eigenschaften einer speziellen Figur auch nur einigermaßen erschöpfend zu untersuchen. Die Elementargeometrie stellt sich vielmehr keine anderen Aufgaben als die, den Schüler mit den Grundzügen der Kongruenz-, Ähnlichkeits- und Kollineationslehre und mit den am nächsten liegenden Anwendungen dieser drei Lehren bekannt zu machen." Lassen wir hier das dritte, die Kollineationslehre, vorderhand noch beiseite, so haben wir also die große Zweiteilung der Planimetrie der Unter- und Mittelstufe: Die Lehre von der Kongruenz und, mit ihr durch den Begriff der Zerlegungsgleichheit verbunden, der Flächenlehre und dann die Ähnlichkeitslehre. Auch die Herausarbeitung dieser zwei Arten von geometrischen Verwandtschaften liegt auf dem Wege zur projektiven Geometrie.

Es bleibt mir noch übrig, ein Wort darüber zu sagen, wie sich die Lehrbücher zu den in diesem Kapitel gekennzeichneten Bestrebungen stellen. Um es kurz zu sagen: Ganz unbeeinflußt bleibt keines; die Einfügung des Bewegungsbegriffes z. B. ist ziemlich allgemein. Andererseits will es mir scheinen, als ob gerade hier die endgültige Form noch keineswegs gefunden ist. Die am weitesten in dieser Richtung vorgehenden Werke von Hubert Müller (in dem ersten vor nun schon vier Jahrzehnten erschienenen Lehrbuch; später hat Hubert Müller eine Reihe anderer kleiner Lehrbücher herausgegeben) und von Henrici und Treutlein, die ein außerordentliches Verdienst in dieser Frage haben, fanden doch nicht die nötige Resonanz, weil sie über das Ziel hinausschossen. Gerade das Buch von Henrici und Treutlein wird aber, wenn nicht alles täuscht, richtungweisend sein.

4. Projektive Geometrie und Kegelschnittlehre.

Wenn wir uns nun der Frage zuwenden, soll man die projektive Geometrie oder die Geometrie der Lage auf der Schule treiben, an welchem Stoff soll man sie treiben, wie soll man sie treiben, so läßt sich von vornherein sagen, daß als beherrschender Gegenstand die Kegelschnittlehre gewählt wird. Wenn Gallenkamp in seinen

[1] Vgl. die Arbeit: P. Epstein, Die dualistische Ergänzung des Potenzbegriffs in der Geometrie des Kreises, ZmnU 34 (1906) S. 499ff.

Elementen der Mathematik[1] bis zu den Flächen zweiter Ordnung vordrang, so überschreitet er damit sicherlich die Grenzen, die heute unseren höheren Schulen selbst im äußersten Falle gezogen sind; andererseits denkt wohl niemand daran, bei Gerade und Kreis halt zu machen.

Um einen Standpunkt zu gewinnen, will ich auf die geschichtliche Entwicklung des ganzen Gebietes zurückgreifen, wie sie uns in kurzer, auch für den Schüler lesbarer Form Zacharias in einem Bändchen der Mathematischen Bibliothek gegeben hat.[2] Wir haben da zuerst die durch die Namen Desargues und Pascal gekennzeichnete Periode der zentralperspektiven Auffassung der Kegelschnitte. Die unendlich fernen Elemente werden eingeführt, die Begriffe Pol und Polare. Das zweite Stadium möge durch die Einführung des Begriffes des Doppelverhältnisses angedeutet werden: Poncelet und Steiner. Der eine hat das Doppelverhältnis eingeführt, der andere setzt es als Fundamentalbegriff an die Spitze. Jetzt folgt als drittes Stadium die reine Geometrie der Lage von Staudts, der das letzte Überbleibsel aus der Welt des Maßes, das metrische Doppelverhältnis, über Bord wirft. Wenn man will, kann man dann noch als letztes Stadium jenes ansehen, in dem die projektive Geometrie als die allgemeine Geometrie erkannt wird, aus der man die euklidische ebenso wie die nichteuklidischen gewinnen kann; auch da zwei Namen: Cayley und Klein.

Von diesen vier Stadien scheiden für die höhere Schule nach meiner Meinung zwei ganz aus: Die Auffassungen von v. Staudt und erst recht von Klein sind für die Schule viel zu hoch genommen. Es bleiben nur die beiden ersten Möglichkeiten.

Manche Verfechter der projektiven Geometrie lassen die perspektivische Methode des ersten Stadiums nicht zu, selbst nicht als eine Vorstufe der projektiven Geometrie. Wir müssen aber gerade dieses Stadium hier würdigen, weil ja eine ganze Anzahl von Schulmännern so weit, aber nicht bis zur eigentlichen projektiven Geometrie gehen wird.

Ich will als Beispiel den Lehrgang von Lesser (Übungsbuch) wählen,[3] an den sich andere Bücher angeschlossen haben. Als Vorgänger Lessers sind Henrici und Treutlein zu nennen. Lesser benutzt den Begriff der ebenen Kollineation. Der Kegelschnitt wird als Bild des Kreises behandelt, die Sätze von Pascal und Brianchon, von Pol und Polare, werden vom Kreis auf den Kegelschnitt übertragen; es folgt die Behandlung der konjugierten Durchmesser, der Asymptoten usf. Wenn man will, kann man von hier aus auch die Brennpunktseigenschaften herleiten, wie Diehl gezeigt hat.[4] Dieser Lehrgang setzt also, um das Wesentlichste herauszuheben, die Sätze von Pascal und Brianchon für den Kreis voraus; sie werden dort mit den Mitteln der starren Geometrie bewiesen; dann werden sie auf

[1] 4. Teil, 2. Abteilung, Iserlohn (Baedeker) 1880.
[2] M. Zacharias, Einführung in die projektive Geometrie, MPhB 6, 2. A., Leipzig (Teubner) 1922.
[3] Außer dem Unterrichtswerk von Schwab und Lesser vgl. O. Lesser, Der Kegelschnitt als kollineare Kurve des Kreises unter besonderer Berücksichtigung harmonischer Verwandtschaft, Programm Klinger-Oberrealschule Frankfurt a. M., 1903.
[4] E. Diehl, Die Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte, abgeleitet mit Hilfe der Kollineation, ZmnU 53 (1922) S. 200 ff.

den Kegelschnitt übertragen und geben nun hier die Möglichkeit zu einer systematischen konstruktiven Beherrschung der Kegelschnitte.

Gerade die regsten Freunde einer projektiven Geometrie auf der Schule sehen nun aber diese „Vorstufe" nicht für voll an. Sie wollen einen Lehrgang, der mit der Einführung der Punktreihen und Strahlenbüschel beginnt und die projektive Verwandtschaft zwischen zwei Grundgebilden einführt. Ein älterer Versuch dieser Art ist das Buch von Hubert Müller.[1] Bei seinem Erscheinen hat Müllers Leitfaden zunächst lebhafte Debatten ausgelöst; die damit eingeleitete Bewegung für die neuere Geometrie ist dann aber leider im Sande verlaufen. In neuerer Zeit sind einzelne besondere Lehrbücher erschienen, die die Geometrie der Lage von neuem im Sinne einer Grundlegung von unten auf unter Hervorkehrung der Grundbegriffe und ihrer projektiven Verwandtschaft behandeln. Ich nenne einen kleinen Leitfaden von K. G. Volk[2] und das wichtigste Werk aus neuerer Zeit, das ganz aus langjähriger Schularbeit erwachsen und bis ins kleinste durchdacht ist, das von R. Böger.[3]

Denen, die zunächst einmal in kleinerem Umfange einen Versuch mit der projektiven Geometrie machen möchten, hat Böger in dem S. 195, Anm. 3, genannten Aufsatz dankenswerte Ratschläge gegeben. Man kann sich, wenn man will, lediglich auf den folgenden kleinen Exkurs beschränken: Es sind fünf Punkte gegeben, von denen nicht drei in gerader Linie liegen. Zwei Punkte faßt man als Ausgangspunkte von Strahlenbüscheln auf, die nun zunächst aus je drei Strahlen bestehen. Jetzt nimmt man einen beliebigen vierten Strahl des einen Büschels hinzu, sucht dann den ihm homologen Strahl im anderen Büschel. Dann erhält man als Schnittpunkt der beiden homologen Strahlen einen neuen Punkt. Solcher Punkte bestimmt man mehrere und läßt die Gesamtheit der so zu findenden Punkte beurteilen. Ändert man nun noch die Lage der Punkte, die als Ausgang gewählt sind, so hat man dem Schüler schon in kurzer Zeit einen Einblick in die projektive Erzeugung der Kegelschnitte gegeben. Natürlich können schon an diese Konstruktion weitere Überlegungen anknüpfen, die tiefer in die Geometrie der Lage hineinführen, z. B. daß der Kegelschnitt durch die fünf Punkte eindeutig festgelegt ist usf. Böger entwickelt in gleicher Weise noch weitere Stufen, die immer tiefer in die projektive Geometrie hineinführen. Man lese das im einzelnen an der angegebenen Stelle nach.

Nun ist noch eine dritte Stellungnahme zur Geometrie der Lage möglich. Auch sie will ich mit einem Beispiel belegen. Schafheitlin hat 1907 eine Kegelschnittlehre herausgegeben,[4] in der er den projektiven Gebilden zwar nicht aus dem Wege gehen will, in der er sich aber der Methoden der starren Geometrie bei der Ableitung der Tatsachen bedient. Er sagt: „So reizvoll für den Mathematiker die Methoden der Geometrie der Lage sind, so stoßen sie bei der Mehrzahl der Schüler nur auf ge-

[1] Hubert Müller, Leitfaden der ebenen Geometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule, 2. Teil, Leipzig (Teubner) 1875.
[2] K. G. Volk, Die Elemente der neueren Geometrie, Leipzig (Teubner) 1907.
[3] R. Böger, Projektive und analytische Schulgeometrie, Leipzig (Göschen) 1910. Daraus ist Kap. III besonders erschienen: R. Böger, Elemente der Geometrie der Lage, 2. Aufl., ebenda 1910.
[4] P. Schafheitlin, Synthetische Geometrie der Kegelschnitte, Leipzig (Teubner) 1907. Vgl. auch desselben Programmabhandlung: Die Kegelschnitte. Programm Sophien-Realgymnasium Berlin 1912.

ringes Verständnis. Zum Teil liegt das daran, daß das Messen und Vergleichen ihnen so unzertrennlich seit der ersten Geometriestunde mit diesem Wissenszweige verknüpft zu sein scheint, daß ihnen die Nichtberücksichtigung der Maßeigenschaften gesucht und unnatürlich vorkommt; ferner aber bringen die Schüler stets den Kegelschnittaufgaben das größte Interesse entgegen, die sich auf alles das beziehen, was mit dem Mittelpunkte, den Achsen und den Brennpunkten zusammenhängt, so daß sie in dem Gefühl bestärkt werden, daß die vorherige Vernachlässigung der Maßbeziehungen etwas Gekünsteltes sei." Seinen zwischen alter und neuer Geometrie vermittelnden Lehrgang kennzeichnet Schafheitlin selbst in folgender Weise: „Um Einfachheit und Einheitlichkeit zu erlangen, stelle ich den Doppelsatz des Pascal und Brianchon an die Spitze der Kegelschnittlehre. Zu seiner Begründung benutze ich die projektiven Eigenschaften der Strahlenbüschel, die ich aber unter fortwährender Benutzung von Maßbeziehungen behandle. Auch bei den zum Schluß besprochenen Involutionen und den polaren Eigenschaften ziehe ich beständig Maßbeziehungen zur Begründung und Erklärung heran." Einen ähnlichen Kompromiß wie bei Schafheitlin findet man auch in anderen Lehrbüchern, ich nenne z. B. das kleine Werkchen von Lange, das jetzt Zühlke herausgibt.[1]

Es stehen nun für die Behandlung der Kegelschnittlehre zwei Möglichkeiten offen. Entweder man entscheidet sich für einen der gekennzeichneten Wege Lesser, Böger, Schafheitlin, wozu von früher noch Apollonius kommt, und stellt sie so in einem einheitlichen Guß hin[2] — oder aber: Man zeigt am Beispiel der Kegelschnittlehre die verschiedenen Methoden geometrischer Forschung. Dann kann man auch noch die analytische Geometrie, und wenn man will die darstellende Geometrie in dieses große geometrische Gesamtgemälde einbeziehen. Die Geometrie der Oberklassen gewinnt damit einen Zusammenschluß zu einer Einheit, der ihr vordem fehlte. Die verschiedenen Untersuchungsmethoden geben die Gliederung ab. Wenden wir uns der zweiten Möglichkeit zu, der ich den Vorzug gebe! Auch da wieder möchte ich zwei Wege unterscheiden. Der eine ist gekennzeichnet durch das Bestreben, eine Verschmelzung des gesamten Stoffes herbeizuführen. Wir erwähnten schon, daß manche Schulmänner die synthetische mit der analytischen Kegelschnittlehre vereinigen unter Rücksichtnahme auch auf die darstellende Geometrie. Solche Einzelversuche haben unter voller Berücksichtigung der neueren Gesichtspunkte dadurch festere Gestalt angenommen, daß die bayerischen Lehrpläne für Oberrealschulen (1914) ihnen gefolgt sind.

Für Unterprima (VIII. Klasse) wird vorgeschrieben: „Systematische Zusammenfassung der in der Koordinatengeometrie bisher gewonnenen Resultate über die Bestimmung eines Punktes und der graphischen Darstellung von Funktionen. Die Gerade und das Geradenbüschel. Der Kreis und das Kreisbüschel. Tangente, Pol und Polare am Kreise. Harmonische Eigenschaften. Harmonische Lage von vier Punkten auf einer Geraden und vier Strahlen durch einen Punkt.

Allgemeines Doppelverhältnis von Punktreihe und Geradenbüschel, Gleichheit bei perspektiver Lage, Unveränderlichkeit bei der Zentralprojektion einer Ebene in eine andere."

[1] J. Lange, Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. 3. Aufl. von P. Zühlke. Berlin (H. W. Müller) 1908.

[2] Ich nenne an dieser Stelle noch, ohne näher darauf einzugehen, das für den Lehrer sehr wertvolle, während der Drucklegung erschienene Werk K. Rohn, Stereometrie, Borna-Leipzig, Noske, 1922.

Gleichzeitig wird in der darstellenden Geometrie behandelt: „Senkrechte Projektion eines Kreises. Darstellung von Zylinder, Kegel und Kugel. Schnitte der genannten Körper mit Ebenen. Einleitung in die Perspektive."

Und dann heißt es weiter für die Oberprima (IX. Klasse): „Die Kurven 2. Ordnung als ebene Schnitte eines geraden Kreiskegels (Quetelet-Dandelinscher Satz). Ableitung der Gleichungen für Ellipse, Parabel und Hyperbel aus den Brennpunktseigenschaften. Tangente, Pol und Polare. Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Strahlbüschel, abgeleitet aus der Erzeugung des Kreises durch kongruente Strahlbüschel. Pascalscher Satz. Konstruktion mittels des Pascalschen Satzes. Aufgaben über geometrische Örter, die auf Kegelschnitte führen."

Inzwischen bringt die darstellende Geometrie: „Fortsetzung der Übungen aus der darstellenden Geometrie. Perspektivische Darstellung einfacher Körper in gerader und schräger Ansicht."

Die nähere Ausführung, die diese kurzen Vorschläge gefunden haben, sind am besten in dem sehr ausführlichen Unterrichtswerk von Wildbrett[1] nachzulesen. Einen anderen, grundsätzlich gleich, in den Einzelheiten aber verschieden gearteten Weg hat Lesser in starker Abweichung von der Gliederung seines Lehrbuches angezeigt.[2] Und für Realgymnasien weist Gerlach[3] einen gegenüber den Oberrealschulen etwas gekürzten Lehrgang.

Allen diesen Lösungen des Unterrichtsproblems der Kegelschnittlehre gemeinsam ist die fusionistisch-eklektische Behandlung des Stoffes. Die Gliederung ist bedingt durch die verschiedenen Eigenschaften der Kegelschnitte. Diese aber werden behandelt nach den Methoden, die gerade für die Ableitung die zweckmäßigsten sind.

Grundverschieden davon ist der zweite Weg, den ich den historischen nennen möchte, wenngleich er sich nicht streng an die historische Entwicklung hält. Von der Definition der Kegelschnitte als ebene Schnitte des geraden Kreiskegels und ihrer Zeichnung nach der Grundriß-Aufrißmethode leitet man (Dandelinsche Kugeln) zu den Ortsdefinitionen und von da aus zu der Apollonischen Behandlung der Brennpunkts- und Tangenteneigenschaften über. Diese werden mit den Methoden der Descartesschen Geometrie auch analytisch erfaßt. Jetzt führt die perspektive Auffassung zur Gewinnung neuer Eigenschaften aus Kreissätzen (Pascal und Brianchon), wobei die Methode der Kollineation benutzt wird. Endlich wirft eine Betrachtung etwa im Umfange des ersten Bögerschen Vorschlages von vorhin auch ein Licht auf die projektive Methode. Dabei findet wieder der Pascalsche, wenn man weitergeht, auch der Brianchonsche Satz Anwendung. Auch bei diesem Wege, den ich auf Grund eigener Erfahrungen empfehlen kann, darf man schon der verfügbaren Zeit halber in jeder Etappe nur diejenigen Eigenschaften entwickeln, die durch das gerade behandelte Verfahren am leichtesten zu erreichen sind. Der vom deutschen Ausschuß in den revidierten Meraner Lehrplänen vorgeschlagene Plan schließt sich diesem zweiten Wege an.[4]

---

[1] A. Wildbrett, Analytische und projektive Geometrie. 2 Teile. Nürnberg, Korn, 1914.

[2] O. Lesser, Zur Behandlung der Kegelschnittlehre. ZmnU **47** (1916) S. 201ff.

[3] A. Gerlach, Die Kollineation in Prima, ZmnU **50** (1919) S. 131ff.

[4] Neue Lehrpläne für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht an den höheren Lehranstalten, II. Folge, Heft 8 der Schriften des DAMNU, Leipzig, Teubner, 1922.

Beide Lösungsarten des Problems, die fusionistische wie die historische, lassen den Neigungen des Lehrers weiten Spielraum; von einer bis in die Einzelheiten gehenden Festlegung der Gedankenreihe wie in anderen Unterrichtsgebieten ist nicht die Rede. Auf Schritt und Tritt ist der Lehrer auf eigene Überlegung und Entscheidung angewiesen.

Ich habe den Eindruck, daß wir in den letzten Jahren in der Klärung des Problems der neueren Geometrie auf der Schule vorwärts gekommen sind. Die Linien zeichnen sich weit deutlicher ab, als sie es taten, als ich die erste Auflage niederschrieb. Immerhin wird man die Erfahrungen der nächsten Zeit abwarten müssen, bis die Versuche eine feste Gestalt gewonnen haben.

SIEBENTES KAPITEL.

Arithmetik.

1. Die Grundbegriffe der Arithmetik und der Unterricht.

Die Bezeichnung der einzelnen Gebiete des mathematischen Unterrichtes ist nicht ganz eindeutig. Einige verstehen unter der Arithmetik den ganzen Umfang dessen, was andere in die drei Gebiete Arithmetik, Algebra und Analysis unterteilen. Wir schließen uns hier der zweiten Anschauung an. Wir fassen also Arithmetik als Lehre von den Operationen mit allgemeinen Zahlen auf, verweisen die Gleichungen, genauer gesagt die Bestimmungsgleichungen, in die Algebra und benennen mit Analysis alles das, dessen Besonderheit durch die Verwendung des Funktionsbegriffes gegeben ist. So ergibt sich also für die Arithmetik ein Stoffkreis, der durch die sieben Rechenoperationen im allmählich erweiterten Zahlbereich bestimmt ist, wozu dann noch vielleicht die endlichen arithmetischen und geometrischen Reihen, die Kombinatorik mit ihren Anwendungsgebieten und die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu zählen sind. Um das ausdrücklich noch zu sagen: Wir verstehen also unter der Arithmetik nicht das, was man in den französischen Schulen damit meint, eine Theorie des Ziffernrechnens. Wir rechnen andererseits zur Arithmetik auch einen großen Teil dessen, was andere, z. B. H. Schubert, als „Niedere Analysis" bezeichnet haben.

Nun ist vorweg eines nachdrücklich hervorzuheben, was für alle drei Gebiete Arithmetik, Algebra und Analysis gemeinsam gilt. Wir behandeln hier diese Dinge nacheinander. Im Unterricht ist das nicht so. Es ist eine wesentliche Forderung der gegenwärtigen Methodik, alle drei Gebiete zu verschmelzen, sie nicht nacheinander, sondern nebeneinander und aufs engste miteinander verbunden zu bringen. Wir trennen in diesem Buche nur aus Gründen der Stoffanordnung. Es wird aber trotzdem allerorten und ganz besonders bei der Besprechung der Analysis zum Ausdruck kommen, wie in die Arithmetik die Algebra und die Analysis eingreifen, wie alle drei einander in die Hände arbeiten. Es mußte aber ausdrücklich gesagt werden, daß die jetzt folgenden drei Kapitel stofflich ein Ganzes bilden, daß sie — es trifft zwar nicht ganz die Sache, aber doch angenähert — einen gewissen Lehrstoff von verschiedenen Seiten zeigen.

Bei der Geometrie hatten wir uns ausführlich mit der Grundlegung beschäftigt. Das war nötig, weil die Grundbegriffe und Axiome so oder so in jeden geometrischen Anfangsunterricht hineinspielen und weil die Stellungnahme bei den einzelnen Schulmännern dabei alles andere als einheitlich ist. Hier nun beim arithmetischen Unterricht fällt der zweite Grund weg. Der arithmetische Anfangsunterricht beginnt ganz allgemein mit den natürlichen Zahlen; wie weit dann bei der späteren Ausdehnung des Zahlbereiches Grundlagenfragen hinzukommen, geht uns im Augen-

blick nichts an. Die natürlichen Zahlen aber nimmt man in der Schule durchweg als etwas schlechthin Gegebenes hin, ebenso die einfachen Rechenoperationen und die für sie geltenden Axiome.

Man kann diese Grundlagen durch ein Axiomensystem festlegen, etwa im Anschluß an Peano ein System S von Elementen $x, y \ldots$ mit folgenden fünf Eigenschaften denken: (1) S enthält ein besonderes Element, das wir mit 1 bezeichnen, (2) Ist x ein Element von S, so gibt es ein weiteres zu S gehöriges Element x^+, das Nachfolger von x heißt, (3) Sind x und y zwei Elemente aus S, so folgt daraus, daß x^+ und y^+ übereinstimmen, daß auch x und y übereinstimmen, (4) Es gibt kein x in S derart, daß x^+ mit 1 übereinstimmt, (5) Jedes Element von S ist in der Reihe $1, 1^+, 1^{++}, \ldots$ enthalten.

Man kann die Unabhängigkeit dieser Axiome nachweisen, allerdings bis vor kurzem nicht ihre Widerspruchslosigkeit. Man konnte nur sagen, die Axiome gelten für unsere natürlichen Zahlen (übrigens z. B. auch für die Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$), und in dieser Angabe einen Beweis für die Widerspruchslosigkeit sehen. Aber damit war das Problem nicht gelöst. Erst neuerdings ist Hilbert an die Lösung des Problems herangegangen.[1]

Man wird dann eine Relation zwischen den Zahlen gleichfalls durch Axiome festlegen, etwa den Begriff der Äquivalenz ($\sim$) dadurch, daß es eine Relation ist, die determiniert ist (entweder ist $A \sim B$ oder nicht), reflexiv ($A \sim A$), symmetrisch (aus $A \sim B$ folgt $B \sim A$), transitiv (aus $A \sim B$ und $B \sim C$ folgt $A \sim C$) usf.

Auf diese Art erreicht man eine axiomatische Grundlegung.[2] Bei dem Beweis der Gesetze hat eine entscheidende Bedeutung das Gesetz der vollständigen Induktion, dessen Widerspruchslosigkeit zu den vorangehenden Axiomen nachzuweisen Hilbert gelungen ist. Dieses Axiom spielt ja auch in der Schule schon eine Rolle, worauf später zurückzukommen ist.

Es erscheint mir zweifelhaft, ob man selbst in Prima Gelegenheit nehmen wird, auf diese axiomatische Begründung der Arithmetik einzugehen. Sie hat doch, zumindest für den Schüler, etwas sehr künstliches. Das Vertrauen in die Standfestigkeit der Arithmetik ist noch viel stärker als bei der Geometrie.

Vielleicht steht es etwas anders mit der Mengenlehre.

In ihrer Eigenschaft als Grundlage der Arithmetik kann die Mengenlehre natürlich keinesfalls für den arithmetischen Anfangsunterricht in Frage kommen, genau so wenig wie die geometrische Axiomatik für den geometrischen. Der Versuch, die Mengenlehre in elementarer Form, d. h. also nur mit den allerersten grundlegenden Begriffen, die sich z. B. bei der Behandlung der rationalen, der algebraischen, der transzendenten Zahlen aufdrängen, in die Schule einzuführen, ist bisher kaum je gemacht worden. Wieweit das Lehrbuch von Friedrich Meyer[3], das schon auf der dritten Seite von wohlgeordneten Mengen spricht, wirklich ein Abbild des sehr

[1] D. Hilbert, Neubegründung der Mathematik, I. Mitteilung, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 1 (1922) S. 157ff.

[2] Als beste Einführung in dieses Verfahren empfehle ich A. Loewy, Lehrbuch der Algebra, 1. Teil: Grundlagen der Arithmetik, Leipzig (Veit) 1915.

[3] F. Meyer, Elemente der Arithmetik und Algebra, 2. Aufl., Halle a. S. (H. W. Schmidt) 1885.

gerühmten Unterrichtes seines verdienstvollen Verfassers gewesen ist, ist mir unbekannt. Einen neueren Versuch findet man in einem Vortrage von Wieleitner.[1]

Andererseits handelt es sich hier um ein Problem, das auch den Primaner lebhaft fesselt, den Begriff des Unendlichen. Der Begriff der Menge, der Äquivalenz von Mengen, der abzählbaren Menge, der Nachweis, daß die rationalen Zahlen, ja die algebraischen Zahlen abzählbar sind, daß ein- und zweidimensionales Kontinuum gleiche Mächtigkeit haben, doch nicht abzählbar sind — Beweis nach dem Diagonalverfahren —, alles das sind durchaus dem Primaner verständlich zu machende Sätze und vertieft seine Kenntnis vom Zahlbegriff.[2] Es ist hier, wie überall bei der rechten Erfassung eines Begriffes: Wie wir unseren euklidischen Raum erst dann recht verstehen, wenn wir ihn anderen gegenüberstellen, so den schon bei der Reihe der natürlichen Zahlen entgegentretenden Begriff der abzählbaren unendlichen Menge durch Gegenüberstellung von Mengen anderer Mächtigkeit.

Über das eben Angedeutete wird man selten hinausgehen können, höchstens kann man noch von einigen offensichtlichen Paradoxien der Mengenlehre sprechen, die nicht nur geeignet sind, das Interesse der Schüler anzuregen, sondern auch ihr logisches Denken zu schulen und ihnen zu zeigen, daß es für sie offene Probleme gibt.[3]

Noch ein anderes Gebiet, das in der modernen Mathematik zu reicher Entwicklung gekommen ist, ist bislang in keine Beziehung zur Schule getreten, die Lehre von den Gruppen und den Invarianten. Hier liegen, wenn wir von der besonders in Frankreich versuchten Einführung unendlicher Gruppen bei der Parallelenlehre absehen, praktische Erfahrungen für den Schulbetrieb eigentlich gar nicht vor. Und doch handelt es sich offenbar um Begriffe, die auch im Schulstoff eine besondere Bedeutung haben, in der Arithmetik ebenso wie in der Geometrie; wir kommen später darauf zurück.

Ich schließe diese Vorbemerkungen mit der Angabe einiger Werke über Arithmetik, die für die Hand des Lehrers in Betracht kommen. Zu den Klassikern, zu den Werken, die bestimmend für den heutigen Unterricht waren, gehören vier Bücher: Eulers Algebra, Graßmanns und Schroeders Lehrbuch der Arithmetik und Hankels komplexe Zahlsysteme.[4] Von neueren Werken, die die Arithmetik der Schule vom höheren Standpunkt aus beleuchten, nenne ich außer dem ersten Bande

[1] H. Wieleitner, Der Zahl- und Mengenbegriff im Unterricht, Ubl 12 (1906), S. 102.

[2] Als Darstellung empfehle ich für diesen Zweck A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, Berlin (Springer) 1919. — Im übrigen verweise ich den Lehrer besonders auf die Arbeit von G. Hessenberg, Grundbegriffe der Mengenlehre, Abhandlungen der Friesschen Schule 1 (1906) S. 611.

[3] Einige Trugschlüsse habe ich in die 3. Auflage meines Bändchens in der MPhB, W. Lietzmann, Trugschlüsse, Leipzig (Teubner) 1923, aufgenommen. Im übrigen verweise ich auf Fraenkel und etwa auf K. Grelling und L. Nelson, Bemerkungen zu den Paradoxien von Russel und Burali-Forti, Abhandlungen der Friesschen Schule 2 (1908) S. 301ff.

[4] Von L. Euler, Vollständige Anleitung zur Algebra, nenne ich die von H. Weber besorgte, die den 1. Band von Eulers Werken bildet (Leipzig, Teubner, 1911), und die billige, kleine Ausgabe bei Reclam. — H. Graßmann, Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten, Berlin 1861. E. Schroeder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, I. Band, Leipzig 1873. Der 2. Band ist nicht erschienen. H. Hankel, Theorie der komplexen Zahlensysteme, Leipzig 1867.

von Weber-Wellsteins Enzyklopädie[1] und der Elementarmathematik von Klein[2] ein kleines Bändchen von Max Simon[3] und den von Färber[4] verfaßten Band in den „Grundlehren der Mathematik". Schließlich ist auch die große Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit ihrem leider vergriffenen Band I, und noch mehr die ausführlichere (noch nicht vollständige) französische Ausgabe (Tome I, 4 Vol.) zu erwähnen.

2. Die vier Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen.

Es gibt sehr verschiedene Gliederungen, an die man sich bei der Darbietung der Arithmetik im Unterricht halten kann. Wir haben es in der Arithmetik mit einer stufenmäßigen Entwicklung einmal der Rechenoperationen von der Addition — oder wenn man will vom Zählen — bis zum Logarithmieren, dann des Zahlbegriffs von der natürlichen Zahl bis hin zu der komplexen Zahl, schließlich der Rechenausdrücke von den Monomen zu den Polynomen zu tun. Die Kombinatorik mag entscheiden, wieviel Lehrgänge möglich sind, die alle eine stufenmäßige Entwicklung zeigen und die doch insofern voneinander verschieden sind, als sie bald auf dem einen, bald auf dem anderen der eben genannten drei Wege aufwärts führen.

Das eine Extrem wäre — und man begegnet ihm tatsächlich in Büchern, wenn auch wohl nirgends im Unterricht —, erst alle sieben Rechenarten nacheinander mit natürlichen Zahlen zu behandeln und dann so fortzufahren. Auch der Weg, den Euler geht, indem er erst alle Operationen mit einfachen Größen, Monomen, vornimmt, erst dann mit Polynomen, wird heute im Unterricht nirgends eingeschlagen. Immer wird ein gemischtes Verfahren angewandt, wobei aber keineswegs Übereinstimmung in den Einzelheiten besteht.[5] Auch wir mußten uns hier für einen Weg entscheiden; er ist gewiß nicht der einzig zweckmäßige und praktische. Aber er ist jedenfalls gangbar, davon hat mich die eigene Unterrichtserfahrung überzeugt und die Tatsache, daß ihn viele Lehrer ebenso gehen. Wo es erwünscht schien, ist aber immer auf andere Möglichkeiten hingewiesen; jedenfalls möchte ich nicht irgend jemand auf den hier vorgeschlagenen Gang festlegen. Im übrigen wird der Weg, den man in der Prima bei der Wiederholung des Zahlbegriffes geht, wohl durchweg von dem in Untertertia eingeschlagenen abweichen.

Trotz aller Vorarbeiten, die der Rechenunterricht im Laufe dreier Jahre geleistet haben sollte, wird es notwendig sein, zunächst im Bereiche der natürlichen

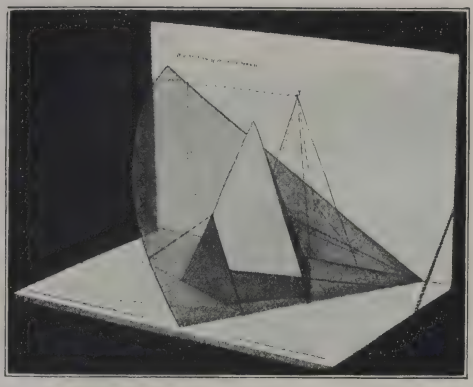
[1] Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band 1, 3. Aufl., Leipzig (Teubner), 1909.

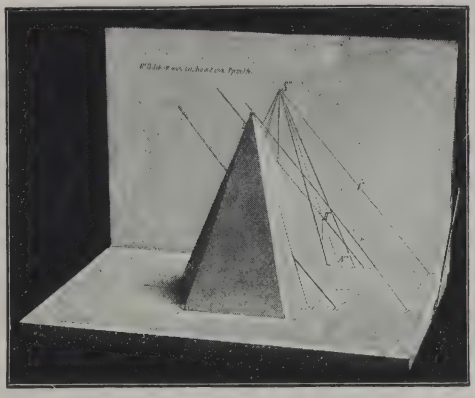
[2] F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Teil I, Leipzig (Teubner) 1908.

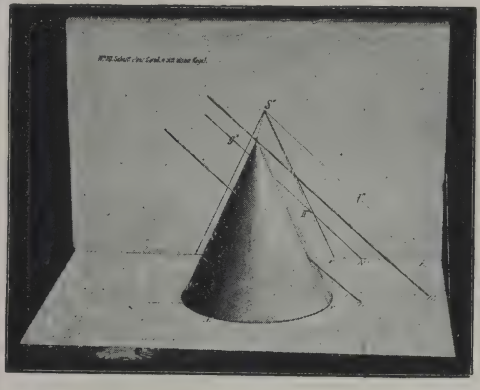
[3] M. Simon, Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis, Leipzig (Teubner) 1906.

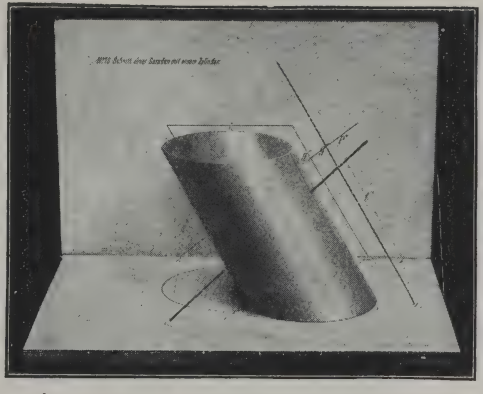
[4] C. Färber, Arithmetik, I. Teil, 1. Band der „Grundlehren der Mathematik", Leipzig (Teubner) 1911. C. Färber hat sich über seine Ansichten über den Zahlbegriff noch ganz kurz vor seinem Tode geäußert: C. Färber, Der Zahlbegriff in Lehrbüchern und im Unterricht, Archiv für Mathematik und Physik III, **20** (1913), S. 139.

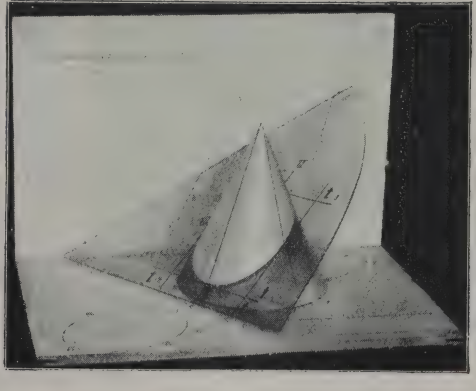
[5] Einer dieser Wege sei noch ausdrücklich genannt. Man nimmt die drei direkten Operationen Addition, Multiplikation, Potenzierung im Bereiche der natürlichen Zahlen vorweg. Dann kommt mit der Hinzunahme der Subtraktion die Erweiterung durch die negativen Zahlen usf.

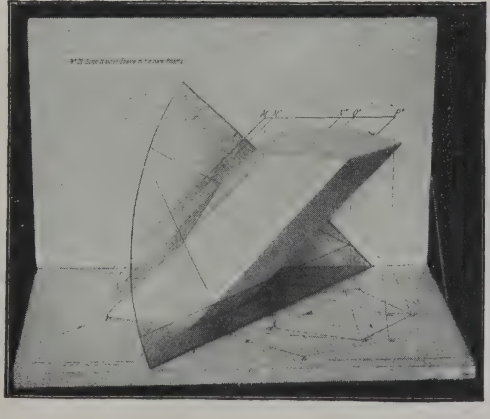






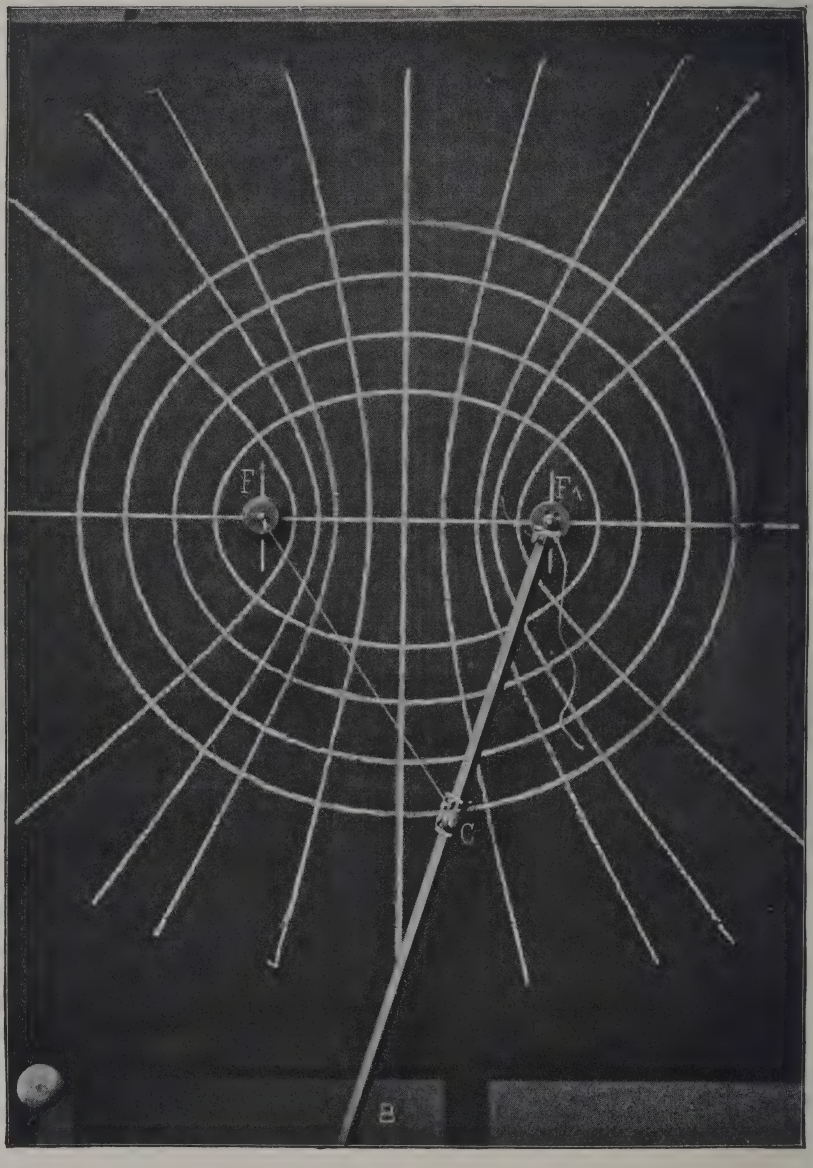






Schnitte von Ebenen und Geraden mit Pyramiden, Prismen, Kegeln und Zylindern. Modelle von J. Mattauch (Projektionsebenen: Holz; Linien: Metallstäbe; Flächen: Zellhorn).

Verlag von A. Pichlers Witwe & Sohn, Wien.



Kegelschnittzirkel nach F. Bußmann. An der Wandtafel ist mit dem Kegelschnittzirkel eine Schar konfokaler Ellipsen und Hyperbeln gezeichnet.

Firma Hans Hilgers, Bonn a. Rh.

Zahlen die vier dem Schüler bekannten Rechenoperationen zu behandeln, wobei nun systematisch an Stelle ziffernmäßig gegebener Zahlen Buchstaben treten. Ich lasse in diesem Kapitel die einzelnen Rechenoperationen nacheinander auftreten und bei jeder von ihnen aufeinanderfolgend Monome und Polynome.

Wenn gesagt ist, daß wir uns auf natürliche Zahlen beschränken, so ist damit nur gemeint, daß die Buchstaben als Vertreter natürlicher Zahlen auftreten. Die als Koeffizienten und dergl. daneben angewandten Zahlen können ruhig auch gemeine und dezimale Brüche sein. Das ist sogar erwünscht, damit bei den Umformungen auch die Bruchrechnung immanent weiter betrieben wird. Vielleicht stößt sich ein Freund strenger Systematik daran. Hier geht aber die Didaktik der Systematik vor.

Was ist nun in dem so umgrenzten Kapitel im einzelnen zu treiben? Wir beginnen wohl noch einmal mit der Definition der Addition, die den Schülern bereits bekannt ist, ebenso mit der Definition der Subtraktion. Bei der Addition und Subtraktion steht im Vordergrund die Möglichkeit der Änderung in der Reihenfolge der Operationen, also zunächst das kommutative Gesetz $a + b = b + a$ und was daran anschließt. Damit ist dann eine Möglichkeit gegeben, Buchstabenausdrücke zu vereinfachen. Man benutzt dabei am besten schon die Addition gleicher Monome mit verschiedenen Koeffizienten. Es ist aber angebracht, hier vor einem häufigen, durchaus nicht einwandfreien Verfahren zu warnen. Wenn der Ausdruck $3a + 4b - 2a + b$ vorliegt, so wird vielfach $3a - 2a = 1a$ und $4b + b = 5b$ nach dem Muster des Rechnens mit benannten Zahlen gebildet. Man sagt auch wohl, wenn der Schüler stockt: „3 Äpfel — 2 Äpfel sind?" Und doch ist das falsch! a und ebenso b steht für eine unbenannte Zahl, nicht für eine Benennung. Man müßte vielmehr so erklären: $3 \cdot 5 - 2 \cdot 5$ ist $1 \cdot 5$, ebenso $3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 1 \cdot 4$, allgemein $3 \cdot a - 2 \cdot a = 1 \cdot a$.

Der Addition und Subtraktion von Monomen wäre dann gleich die Addition und Subtraktion von Polynomen anzuschließen, also im einfachsten Falle die vier Gesetze:

(1) $m + (a + b) = m + a + b$, (3) $m - (a + b) = m - a - b$,
(2) $m + (a - b) = m + a - b$, (4) $m - (a - b) = m - a + b$.

Es ist nicht unwichtig, den Schüler darauf aufmerksam zu machen, unter welchen Umständen solche Rechnungen im Bereiche der natürlichen Zahlen überhaupt erst möglich sind. Bei (2) ist z. B. die Bedingung $a > b$, bei (3) $m > (a + b)$, bei (4) sind die Bedingungen $a > b$, $m > (a - b)$ stillschweigend hinzuzudenken.

Ich halte es für sehr erwünscht, wenn so die Einführung in die Klammerrechnung mit allgemeinen Zahlen sich fürs erste auf die beiden ersten Rechenoperationen beschränkt. Selbst wenn die Klammern dem Schüler nicht fremd sind, ist es doch gut, wenn er sich jetzt in der Arithmetik erst in einem möglichst engen Rahmen mit ihnen wieder vertraut macht.

Daß man sich dabei nicht allzu weit versteigt, daß man überhaupt in der Klammerrechnung allzu üble „Schachtelklammern" vermeidet, ist eine oft ausgesprochene Forderung. Auf der anderen Seite muß der Schüler aber doch wissen, wie in den Fällen vorzugehen ist, wo Klammern in Klammern auftreten. Der Lehrer muß sich hier vor dem Zuviel hüten, aber auch vermeiden, daß ihm später Unterlassungs-

sünden vorgeworfen werden können. Unbedingt zu unterlassen ist eine gesuchte Häufung von Schwierigkeiten in gänzlich unwahrscheinlichen Ausdrücken.

Ob man das assoziative Gesetz in dem Maße betont, wie das wegen seiner axiomatischen Stellung zu erwarten wäre, möchte ich dahingestellt sein lassen. Ich glaube, es wird genügen, das Gesetz als solches erst in höheren Klassen ausdrücklich auszusprechen.

Auch bei der Multiplikation, die wieder mit der Frage nach der Entstehung aus der Addition eingeleitet wird, steht zunächst die Vertauschbarkeit der Faktoren an der Spitze, also das kommutative Gesetz.[1]

Wer bei der Addition von der Mengenauffassung, also von der Kardinalzahl, nicht der Ordinalzahl ausgegangen ist, der wird bei der Multiplikation einige Schwierigkeiten haben. Was ist unter dem Produkt zweier Mengen, etwa a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3, b_4 zu verstehen? Nach der Mengenlehre ist das die Menge der Elementepaare $(a_1\,b_1)\,(a_1\,a_2)\,\ldots\,(a_3\,b_4)$. Am besten ordnet man sie in dem Schema

$$\begin{array}{cccc} (a_1\,b_1) & (a_1\,b_2) & (a_1\,b_3) & (a_1\,b_4) \\ (a_2\,b_1) & (a_2\,b_2) & (a_2\,b_3) & (a_2\,b_4) \\ (a_3\,b_1) & (a_3\,b_2) & (a_3\,b_3) & (a_3\,b_4) \end{array}$$

an. Dieser Definition der Mengenlehre entspricht die geometrische Darstellung durch flächenhafte Anordnung von Punkten, Quadratzentimetern oder dgl., wie wir sie früher kennen lernten (S. 23).

Die Division ist dann als Umkehrung der Multiplikation oder als Abkürzung der Subtraktion zu definieren. Es ist vielleicht ganz gut, den Schülern einmal drastisch zu zeigen, worin die „Abkürzung" bei der Einführung der neuen Operation höherer Stufe besteht. Es gibt da die schöne Geschichte von dem Jungen, der die Aufgabe erhält: Wie oft kann man 3 von einer Million abziehen? Er versucht es, und gegen Abend, als er immer noch nicht fertig ist, beteiligt sich die ganze vielköpfige Familie an der Lösung, und obwohl sie die halbe Nacht durcharbeiten, werden sie doch nicht fertig. — —

Die Multiplikation eines Monoms mit einem Polynom wird von den beiden Gesetzen

$$m \cdot (a + b) = ma + mb,$$
$$m \cdot (a - b) = ma - mb$$

auszugehen haben, daran schließen sich die vier einfachsten Fälle der Multiplikation zweier Polynome:

$$(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd,$$
$$(a + b)\,(c - d) = ac - ad + bc - bd,$$
$$(a - b)\,(c + d) = ac + ad - bc - bd,$$
$$(a - b)\,(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

mit den aus ihnen erwachsenden Sonderfällen, wenn $a = c$ und $b = d$ wird.

[1] In welcher Reihenfolge man die für die einzelnen Rechenoperationen, etwa für die Multiplikation, wichtigen Gesetze bringt, darüber kann man verschiedener Meinung sein. Die hier vorgeschlagene Reihenfolge deckt sich im wesentlichen mit der mehrfach von Schwering, z. B. im Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer, Leipzig (Teubner) 1907, empfohlenen: 1. Gesetz $a \cdot b = b \cdot a$; 2. Gesetz $a(b + c) = ab + ac$; 3. Gesetz $a(bc) = b(ac) = c(ab)$.; 4. Gesetz $a \cdot 0 = 0$.

Bei der Division ist zunächst die Division eines Polynoms durch ein Monom zu behandeln. Dann würde die Division eines Polynoms durch ein anderes Polynom folgen. Ich möchte jedoch raten, diese Aufgaben hier noch nicht durchzunehmen. Sie machen den Schülern ungleich mehr Schwierigkeiten als alle vorhergehenden Aufgaben; zudem bietet sich später gute Gelegenheit, das hier Unterlassene nachzuholen.

So haben wir jetzt den Umfang der in diesem Kapitel zur Sprache kommenden Aufgaben umrissen. Ehe wir uns der methodischen Darbietung im Einzelnen zuwenden, möge noch ein Wort über einige Äußerlichkeiten gesagt werden.

Hinsichtlich der Symbole und der Bezeichnungen, die bei den Operationen angewandt werden, herrscht wohl überall Einheitlichkeit. Es ist übrigens bei einem Rechenunterricht, wie er sein soll, vorauszusetzen, daß alle diese Dinge dem Schüler bereits zur Gewohnheit geworden sind. Bei den in den Aufgaben anzuwendenden Buchstaben ist möglichste Abwechslung anzuraten. Man rechne also nicht immer mit a und b, auch einmal mit p und q, x und y, m und n usf. Eine Frage, die vielleicht der Erörterung bedarf, ist die, ob man schon von Anfang an Buchstaben mit Indizes benutzen soll. Ich glaube nicht, daß da irgendwelche Bedenken vorliegen. Die Schüler sind ja auch vielfach in der Geometrie schon eine Klasse vorher bei kongruenten Dreiecken daran gewöhnt worden, Indizesbezeichnungen anzuwenden. Nur empfehle ich, dabei der Schreibweise der Schüler Aufmerksamkeit zuzuwenden. Man kann noch in höheren Klassen gelegentlich beobachten, daß Indizes in Zeilenhöhe geschrieben werden, dann wie Faktoren aussehen und womöglich zu Fehlern Anlaß geben.

Wenn auch bislang noch nicht vom Potenzieren die Rede gewesen ist, so möchte ich doch, gerade weil die systematische Potenzlehre noch sehr lange ausbleibt, raten, die Potenzschreibweise in einfachen Fällen zu benutzen. Oft wird ja schon der Rechenunterricht vorgearbeitet haben, etwa bei der Zerlegung von Zahlen in Primfaktoren. Es handelt sich nur darum, die Potenzschreibung als willkommene Abkürzung bei mehreren gleichen Faktoren einzuführen. Der Exponent ist dabei immer eine ziffernmäßig gegebene, kleine, natürliche Zahl; die Basis kann eine Buchstabengröße, ein Monom oder ein Polynom sein. Von der Benutzung irgendwelcher Potenzgesetze ist noch ganz abzusehen. Rechnet man mit Potenzen, so geht man immer auf ihre Bedeutung zurück.

Welcher Weg ist nun bei der Ableitung der arithmetischen Tatsachen, die den Inhalt des zur Besprechung stehenden Kapitels bilden, einzuschlagen? Der wichtigste Rat, den ich geben kann, ist der: Die Unterscheidung zwischen Axiom und Lehrsatz ist hier ganz aus dem Spiel zu lassen; die arithmetischen Regeln sind als Zusammenfassungen, oder wenn man will, kürzere Fassungen von Regeln anzusprechen, die aus dem Rechenunterricht her bekannt sind.

So soll also der Ausgangspunkt für einen arithmetischen Satz, eine arithmetische Formel das Rechnen sein, Anfang, aber wieder auch Ende. Jede Formel in ihrer Allgemeinheit soll wieder in zahlreichen Beispielen hinführen zu rechnerischen Einzelfällen. Man hat dieses Hinundher vom Buchstabenausdruck zur ziffernmäßig gegebenen Zahl verglichen mit dem Hinundher zwischen der logisch-deduktiven Ableitung und der anschaulichen an einer gezeichneten Einzelfigur in der Geometrie.

Mit Recht. Was in der Geometrie die Anschauung leistet, das tut in der Arithmetik das Zahlenbeispiel. Aber noch mehr. Genau so wie ich an eine Figur die Schlüsse, die zu einem Satze führen, anknüpfen kann, wenn auch die Figur naturgemäß nur eine Einzelfigur ist, genau so kann ich die Ableitung eines arithmetischen Satzes an ein Zahlenbeispiel anknüpfen, wenn auch dieses Beispiel nur ein Einzelfall ist. Eines ist freilich beide Male nötig, daß nämlich bei der Figur ebenso wie beim Zahlenbeispiel besondere, aus der zufälligen Wahl des Beispiels sich ergebende Schlüsse vermieden werden. Wobei dann der strenge Mathematiker in der Erfüllung dieser Forderung — oder vielmehr in der Begründung, daß sie im vorliegenden Falle erfüllt ist — sich wieder auf die strenge Logik angewiesen sieht. Das steht aber jedenfalls fest, eine Arithmetik, die sich zur Ableitung ihrer Sätze auf die Zahlenbeispiele beruft, ist nicht weniger streng als die Geometrie, die sich an eine Figur hält.

Eine andere Methode zur Erklärung der Gesetze ist ihre Darstellung am Zahlstrahl. Hinsichtlich der Rechenoperationen erster Stufe ist da dem nichts hinzuzufügen, was wir bereits beim Rechenunterricht gesagt haben. Bei der Ableitung der Multiplikationsgesetze sollte man durchweg den Flächeninhalt von Rechtecken benutzen, bei dem Gesetz $a(bc) = (ab)c$ geht man vielleicht auch in den Raum. Die Figuren, die den auf S. 210 genannten einfachsten Fällen der Multiplikation von Polynomen entsprechen, und ebenso die aus ihnen sich ergebenden Spezialfälle sind ja bekannt — sie stehen schon bei Euklid. Wie $(a + b)^2$, sollte man — mit Rücksicht auf die spätere Quadratwurzelausziehung — gelegentlich auch $(a + b + c)^2$, $(a + b + c + d)^2$ geometrisch darstellen.

Ein großer Teil der Zeit, welche der Durchnahme unseres Kapitels vorbehalten ist, wird der tüchtigen Einübung der abgeleiteten Sätze und der aus ihnen sich ergebenden Möglichkeiten zur Abänderung oder wohl auch Vereinfachung von Rechenausdrücken zu widmen sein. Man soll diese Aufgaben recht häufig auch in eingekleideter Form geben. Zunächst wird man „Wortaufgaben" stellen, z. B.: „Berechne die Summe aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen," oder: „Schreibe und berechne: Die Summe von 124 und 368, vermehrt um 62." Noch besser ist es, gelegentlich noch weitergehende Einkleidungen zu geben. Nur ist leider die Zahl der sich bietenden Aufgaben nicht sehr mannigfaltig. Sehr beliebt sind bei den Schülern Anweisungen, wie man eine Zahl errät, oder Regeln, die von einer beliebigen Zahl ausgehen, aber immer zu einer bestimmten, dem Fragesteller bekannten Zahl hinführen. Solcher Zahlbeispiele sind viele im Umlauf; es gibt ihrer schon welche mit ansehnlichem Alter: In Schwenters „Erquickstunden" aus dem Jahre 1636 z. B. findet man mehrere Anweisungen.[1]

Von Bedeutung für den Rechner sind die mannigfachen Rechenvorteile, die sich namentlich aus der Anwendung der Gesetze über die Multiplikation von Polynomen ergeben. Dahin gehört jenes S. 25 erwähnte Verfahren des Fingerrechnens, die Multiplikation der Zahlen von 6 bis 9 auf diejenige der Zahlen bis 5 zurückzuführen. Es ist für die Schüler eine nützliche, übrigens gar nicht einfache Aufgabe, den Beweis in allgemeinen Zahlen zu führen. Hier handelt es sich nämlich um das,

[1] Einige von ihnen habe ich in meine Bearbeitung der Bardeyschen Aufgabensammlung aufgenommen. — Im übrigen vgl. über solche Aufgaben W. Lietzmann, Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen, Leipzig (Hirt) 1922.

was ihnen immer so schwer fällt, um das Umsetzen von Anweisungen aus der gewöhnlichen Sprache in diejenige der Mathematik. Es wäre verfehlt, mit diesen Dingen zu warten, bis man an die von den Mathematikbegabten früherer Zeiten so hochgeschätzten, von den Unbegabten so oft als unüberwindlich empfundenen „Eingekleideten Gleichungen ersten Grades" kommt.

Bei dem „Fingerrechnen" war dem Schüler die Regel angegeben; seine Aufgabe bestand darin, die Gültigkeit der Regel in allgemeinen Zahlen zu beweisen. In anderen Fällen handelt es sich darum, die arithmetische Form für die Zahlenrechnung fruchtbar zu machen, so insbesondere bei den Formeln für $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$.

Es ist ja heute eine allgemein als berechtigt anerkannte didaktische Forderung, daß man mit den Gleichungen nicht erst wartet, bis die in ihnen auftretenden Rechenmethoden sämtlich erledigt worden sind, sondern Arithmetik und Gleichungslehre miteinander verbindet. Wir haben uns mit den Methoden zur Lösung von Gleichungen in einem späteren Kapitel zu beschäftigen. Hier nun handelt es sich noch nicht um die Lösungsmethoden, sondern nur darum, daß die in die eigentliche Arithmetik eingestreuten Gleichungen Anlaß zur Anwendung der Rechenoperationen geben. Es ist nicht viel mehr, als man im Rechenunterricht auch schon tut, wenn man die sog. algebraischen Aufgaben unter Verwendung einer Unbekannten x löst.

Man kann freilich auch weiter gehen. Wenn man sagt, die Division ist die Umkehrung der Multiplikation, so heißt das, die Division löst die Gleichung $ax = b$. Man kann dann also die Sätze über die Division zurückführen auf diejenigen der Multiplikation, indem man die beiden Ausdrücke

$$a\,x = b;\quad x = \frac{b}{a}$$

für gleichbedeutend erklärt. Hier kommt dann der Gleichung eine wesentliche Rolle in der Systematik der Rechenoperationen zu, und eine Erörterung, welche Operationen mit Gleichungen erlaubt sind, welche nicht, erscheint schon hier unumgänglich notwendig.

Dabei muß eines Punktes gedacht werden, auf den man schon vom Anbeginn des arithmetischen Unterrichtes an achten sollte. Wenn man in der Arithmetik im Verlaufe irgendeiner Aufgabenlösung einen Schüler etwas fragt, und er weiß es nicht, dann stottert er doch wenigstens „gleich .." Der Schüler glaubt eben, in der Arithmetik fange alles mit „gleich" an. Man sollte sorgfältiger eine „Gleichung" und einen „Ausdruck" unterscheiden. Es ist nicht dasselbe, eine Gleichung lösen und einen Ausdruck umwandeln. Der Unterricht pflegt beides leider recht häufig durcheinander zu würfeln. Richtig ist es, bei einem Ausdruck, um ihn in eine andere Form zu bringen, die nacheinander erhaltenen Änderungen durch Gleichheitszeichen zu verbinden. Man schreibt:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) =$$
$$a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab.$$

Anders aber, wenn es sich um eine Gleichung handelt wie das nebenstehende Beispiel. Hier wäre es falsch, vor die zweite Zeile, schriftlich oder mündlich, ein Gleichheitszeichen zu setzen. Ich pflege den Schülern einzuprägen: Eine Gleichung hat nur zwei Seiten, nicht drei oder vier. Sie können mich später Lügen strafen, wenn sie auf Gleichungen wie

$$\begin{aligned} 31 - 7x &= 41 - 8x \\ -7x + 8x &= 41 - 31 \\ x &= 10. \end{aligned}$$

$$x + y = xy = x^2 + y^2$$

stoßen, sie werden aber verstehen, daß das nur eine abgekürzte Schreibweise für zwei Gleichungen ist.

Nun wird schon mancher Leser die Einwendung auf der Zunge haben: Ja, man muß doch die identischen und die Bestimmungsgleichungen unterscheiden. — Gewiß, was ich von Gleichungen gesagt habe, gilt von den Bestimmungsgleichungen, und was ich von Ausdrücken gesagt habe, bezieht sich auf die identischen Gleichungen. Ich lasse dahingestellt, ob es nicht besser wäre, das unschöne Wort „identische Gleichungen" fallen zu lassen und dafür von der Umformung von Rechenausdrücken zu sprechen. Was aber jedenfalls nötig ist, das ist ein nachdrücklicher und oft wiederholter Hinweis auf diese Unterschiede in dem Bau und in der Aneinanderreihung von identischen und Bestimmungsgleichungen.

Es ist eine bekannte Tatsache, daß der Schüler bei einem wichtigen Satz aus der Gleichungslehre zu sagen pflegt: Die Gleichung ist durch $(x - x')$ teilbar. Wenn man dann dem Schüler entgegenhält: Ja, ich denke, jede Gleichung ist durch $(x - x')$ teilbar? so macht er ein verdutztes Gesicht. Vielleicht kommt er sogar auf die unglückliche Idee, daß $(x - x')$ Null werden könnte und verrennt sich dann noch mehr. Die Antwort, der „Ausdruck" auf der linken Seite der auf Null gebrachten Seite sei durch jenen Faktor ohne Rest teilbar, wird dann erleichtert mit der gegen die elementarsten Schülergebote verstoßenden Antwort quittiert, „das meinte ich ja". Ich empfehle also, das Wort „Ausdruck" wieder zu Ehren kommen zu lassen. Wenn die Gleichung

$$\frac{(a-x)^2 + (x-b)^2}{(a-x)^2 - (x-b)^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

vorliegt, so ist es sehr viel zweckmäßiger, erst den „Ausdruck" auf der linken Seite für sich zu nehmen, ihn zu vereinfachen und dann weiterzurechnen, als bei jeder Vereinfachung immer die rechte Seite zu wiederholen, wie es bei Bestimmungsgleichungen im allgemeinen üblich ist.

Zunächst eine recht gute Übung an sich, dann aber auch eine Vorarbeit für später ist die Untersuchung der Abhängigkeit eines Rechenausdruckes von einer in ihm vorkommenden Größe. Man kann in dem Ausdruck $a + b$ der Zahl a einen festen Wert geben, etwa 3, der Zahl b dagegen veränderliche Werte, am besten eine Reihe aufeinander folgender natürlicher Zahlen. Ebenso kann man es mit $a \cdot b$ und anderen einfachen Ausdrücken machen. Man kann auch untersuchen, wie man in der Gleichung $a + b = c$ die Zahl c ändern muß, wenn b sich in vorgeschriebener Weise ändert und so für die anderen Rechenoperationen. Es dürfte auch zweckmäßig sein, solche Abhängigkeiten etwa auf der Zahlgeraden zur Darstellung zu

bringen, indem man die Reihe der abhängigen Zahlen und die Reihe der unabhängigen Zahlen mit verschiedenen Farben verzeichnet. Ich möchte aber warnen, bei einem solchen Vorgehen schon in Untertertia das Wort Funktion fallen zu lassen oder gar an graphische Darstellungen in einem cartesischen Koordinatensystem zu denken. Es soll sich nur um Vorarbeit handeln, die dem Verständnis der Rechenoperationen selbst förderlich ist. In der Tat gibt es beispielsweise eine sehr gute Einsicht in das Verhältnis von Addition und Multiplikation, wenn man dem Wachstum von $a + b$ bei konstantem a und wachsendem b das Wachstum von $a \cdot b$ unter gleichen Umständen gegenüberstellt. Auch die Vergleichung einer Rechenoperation mit ihrer inversen bekommt auf diese Weise neue Farben.

Schließlich noch eine Anregung. Ein sehr fruchtbares Prinzip in der Mathematik besteht darin, in einem Ausdruck eine Größe durch eine andere zu ersetzen. Substitutionen spielen ja gemeinhin zuerst bei der Lösung der Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten eine Rolle. Der Schüler nimmt sie da als etwas sehr Einfaches und Selbstverständliches hin. Eigentümlich ist nun aber, daß unter gewissen Umständen noch dem Primaner Substitutionen Schwierigkeiten machen. Es wird die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ behandelt, man hat die Lösung gefunden. Jetzt soll in Gleichung und Lösung statt des Wertes p der Wert $-p$ substituiert werden. Das geht noch. Nun liege eine kubische Gleichung mit Zahlenkoeffizienten vor; der Koeffizient von x sei negativ. Ich sage, ich ziehe jetzt die zweite Form, also $x^3 - px + q = 0$ vor. Ist jetzt p positiv oder negativ? Todsicher kommt die Antwort: Negativ. Also Unsicherheit im Substituieren, verbunden mit Unsicherheit in der Auffassung negativer Zahlen.[1] Auch dieser Fehler weist auf eine Unterlassungssünde im Anfangsunterricht hin. Es möchte ja nun genügen, den Begriff der Substitution etwa bei der Durchnahme der Rechenoperationen mit negativen Zahlen einzuführen. Dort nämlich ist er gut zu gebrauchen: Es fällt durchaus nicht jedem ein, daß nach der Einführung der negativen Zahlen die Formeln für $(a + b)^2$ und $(a - b)^2$ die gleiche Bedeutung haben, daß also eigentlich eine genügt. Die eine geht ja aus der anderen durch Substitution hervor. Auch in der ersten Formel kann b eine negative Zahl sein, ersetze ich sie durch $-b$, wo b jetzt eine positive Zahl ist, so erhalte ich die zweite Formel. Also bei den negativen Zahlen wollen wir die Substitutionen unbedingt gebrauchen, schon um von vornherein solchen Fehlern wie den oben gerügten entgegenzutreten. Ich möchte aber empfehlen, mit den Substitutionen noch früher einzusetzen, sie schon dann zu erwähnen und in einfachen Aufgaben zu üben, wenn es sich nur erst um die natürlichen Zahlen handelt. Es ist z. B. eine recht gute Anwendung bekannter Formeln, wenn in $x^2 + 1$ die Substitution $x = y - 1$ oder eine ähnliche ausgeführt wird.

3. Die vier Grundrechenarten mit relativen und mit gebrochenen Zahlen.

Nach der mehr oder weniger wiederholenden Durchnahme der vier ersten Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen ist nun der Zahlbereich durch die Hinzunahme

[1] Ein Grund mag auch der sein, daß man gewöhnlich Begriff und Schreibweise der absoluten Zahlen im Unterricht (jedenfalls der Mittelklassen, vielfach auch der Oberklassen) vermeidet. Nach meiner Meinung schadet es gar nichts, wenn schon der Schüler in der Mittelstufe den Ausdruck $|a|$ verstehen und gebrauchen lernt.

der negativen und gebrochenen Zahlen zum rationalen Zahlkörper zu erweitern. Der Bereich der natürlichen Zahlen wird erst zu einem Zahlkörper, d. h. zu einem Gebilde, in dem jede auf Angehörige von ihm ausgeübte rationale Rechenoperation wieder auf Angehörige von ihm führt, durch Hinzufügen der negativen und gebrochenen Zahlen. Dieser einfachste aller Zahlkörper, der rationale, gibt also einen natürlichen Ruhepunkt, weil er in sich ein Ganzes bildet.

Für die Gliederung des Stoffes entscheidend ist die Frage, ob man mit der Einführung der negativen oder der gebrochenen Zahlen beginnt. Systematischer ist die Vorwegnahme der negativen Zahlen, weil ihre Einführung durch die Subtraktion bedingt wird, während die Brüche erst durch die Forderung der Ausführbarkeit jeder Division gegeben sind. Historisch ist die Entwicklung umgekehrt gewesen; gebrochene Zahlen treten uns schon in den ältesten Dokumenten mathematischer Beschäftigung entgegen, negative Zahlen sind dagegen erst unvergleichlich viel später mit Bewußtsein benutzt worden. Die phylogenetische Regel möchte also eine Vorwegnahme der gebrochenen Zahlen auch im Unterrichte nahelegen. Dazu kommt, daß der Rechenunterricht die Schüler schon mit den Brüchen, nicht aber mit den negativen Zahlen bekanntgemacht hat. Trotzdem möchte ich mich der besonders von Schülke[1] vertretenen Forderung: „Erst die Brüche, dann die negativen Zahlen!" nicht anschließen. Schülke legt besonderen Nachdruck auf die Tatsache, daß im arithmetischen Anfangsunterricht zwei Schwierigkeiten auf einmal an den Schüler herantreten, die Buchstabenzahlen und die negativen Zahlen; er folgert, also lasse man die eine Schwierigkeit zunächst weg und führe erst in der nächsten Klasse die negativen Zahlen ein. Ich habe bei der Besprechung des Rechenunterrichtes dargelegt, wie ich mir eine geeignete Vorbereitung der Buchstabenschreibweise schon in den unteren Klassen denke. Ich glaube, daß diese Übungen so weit ausgedehnt werden können, daß die eine Schwierigkeit des arithmetischen Anfangsunterrichtes damit wesentlich gemildert ist. Dann wird man aber den Schülern auch die Bewältigung der anderen Schwierigkeit zumuten können, zumal wenn man die abstrakte Einführung der negativen Zahl durch konkrete Bilder erleichtert.

Die erste Erweiterung, die man mit dem Zahlkreis vornimmt, ist die Hinzufügung der 0 zu den bisher behandelten natürlichen Zahlen. Durch die Null wird die bisher unlösbare Aufgabe $a - a$ lösbar. Der Auffassung dieses Symbols als einer Zahl stehen irgendwelche Schwierigkeiten nicht entgegen. Auch die Definition der Rechenoperationen mit ihr, also die Gesetze: (1) $a + 0 = a$, (2) $a - 0 = a$, (3) $a \cdot 0 = 0$, (4) $0 : a = 0$, wo a eine natürliche Zahl ist, sind ohne weiteres klar; sie erscheinen dem Schüler selbstverständlich, ihre ausdrückliche Formulierung ist aber doch wünschenswert. Von den Operationen $0 - a$ und $a : 0$ wird man zunächst noch sagen, sie sind im Bereiche der uns bekannten Zahlen unausführbar.

Die Erwe terung des Zahlbereiches geschieht unter dem Zeichen des Permanenzgesetzes. Man führt die Null und die negativen Zahlen als neue Symbole ein, da-

[1] A. Schülke, Über die Einführung negativer Zahlen, ZmnU 37 (1908), S. 102ff. — Übrigens ist der Standpunkt Schülkes nicht gar so sehr von dem meinigen verschieden, insofern ich die Forderung aufgestellt habe, erst im Bereiche der natürlichen Zahlen (unter Zulassung von Brüchen als Koeffizienten usw.) die vier Grundrechenoperationen zu behandeln, ehe man sich den relativen Zahlen zuwendet.

mit die Subtraktion stets ausführbar sei; man führt die Brüche ein, damit die Division möglich sei. So einfach liegen nun allerdings die Dinge in theoretischer Beziehung keineswegs. Zunächst ist es eine Frage, ob ich überhaupt die neuen Symbole einführen darf. Ich kann auch nicht sagen: Da die beiden Gleichungen $x + 2 = 5$ und $x + 3 = 5$ von keiner natürlichen Zahl x gleichzeitig erfüllt werden, führe ich neue Zahlen ein, die das leisten. Das ist deshalb nicht möglich, weil dann die Widerspruchslosigkeit der Arithmetik nicht mehr gewahrt bliebe. Nun kann es für die Schule nicht in Frage kommen, das Problem der Widerspruchslosigkeit bei der Einführung negativer und gebrochener Zahlen aufzurollen. Wohl aber wird der Schüler an geeigneten Beispielen nachweisen, daß die neuen Zahlen genau so in Beziehung zur Wirklichkeit stehen wie die natürlichen Zahlen.

Dann definiert man die Rechengesetze mit den neuen Symbolen. Auch das sind keine Selbstverständlichkeiten. Es wäre sehr wohl möglich, daß die bekannten Rechenoperationen sich gar nicht für die neuen Zahlen definieren ließen: Beispiel die Subtraktion bei den Cantorschen Kardinalzahlen oder die Potenzierung mit einer benannten Zahl als Exponent — und es wäre weiter möglich, daß sie sich nicht so definieren ließen, daß alle bisherigen Gesetze erhalten blieben: Beispiel die Hamiltonschen Quaternionen und das kommutative Gesetz der Multiplikation.

Beide Schritte bedürfen auch im Unterrichte ausführlicher Erläuterungen. Dem Schüler ist mit dem abstrakten Kern allein nicht gedient, er will sich dabei auch etwas denken; und er hat Recht. Wie er sich die Welt der abstrakten natürlichen Zahlen angewandt und vielfach innig verbunden denkt mit der Welt der realen Wirklichkeit[1], so will er auch mit den neuen Zahlbegriffen Dinge aus der Wirklichkeit in Verbindung bringen, will auch die neu zu behandelnden Rechenoperationen irgendwie deuten. Für ihn hat die Erweiterung nur Bedeutung, wenn sie auch einen Schritt weiter in der Beherrschung der Wirklichkeit führt. Er fordert also mehr, als die mathematische Wissenschaft bietet, er ist nicht mit dem Symbol zufrieden, er will damit konkrete Vorstellungen verknüpfen.

Die Einführung der negativen Zahlen in Untertertia wird durch eine lächerliche Äußerlichkeit gewaltig erschwert. Wir bezeichnen die negativen Zahlen dadurch, daß wir ihnen das Operationssymbol der Subtraktion vorsetzen. Das Zeichen „—" ist also zweideutig. Gewiß ist diese Wahl zweckmäßig, wenn man erst zu der Erkenntnis durchgedrungen ist, daß es gleichgültig ist, die Zahl a zu subtrahieren oder die Zahl $-a$ zu addieren, oder daß ein Operieren mit der Zahl $-a$ einem Operieren mit der Differenz $0 - a$ gleichkommt. Aber das soll doch erst noch kommen. Ich gebe also sehr zu bedenken, ob man nicht dem mehrfach gemachten Vorschlage zustimmt, die negativen Zahlen zunächst durch ein anderes Zeichen kenntlich zu machen, durch a' oder $\dot{a}$ oder, wie es Mohrmann in einer neuen Bardey-Ausgabe getan hat, indem er $\overrightarrow{a}$ und $\overleftarrow{a}$ unterscheidet.

Die negativen Zahlen müssen nun in der Wirklichkeit aufgesucht werden. Früher operierte man mit Vorliebe mit Vermögen und Schulden. Neuerdings bevorzugt

[1] Der Schüler ist immer sehr verblüfft, wenn ihm zum Bewußtsein gebracht wird, daß es in seiner Umwelt eine 3 nicht gibt, wohl 3 Bänke, 3 Tische, auch das Zeichen 3 usf., aber nicht die Zahl 3 schlechtweg.

man irgendwelche Maßstäbe, bei denen der Nullpunkt nicht an einem Ende liegt, also Temperaturskalen, Pegel, christliche Zeitrechnung u. dgl. Man bringt damit den Richtungsbegriff heran, den Sinn der Abweichung von einem bestimmten Wert. So kommen positive und negative Zahlen bei der nördlichen und südlichen Breite, bei der westlichen und östlichen Länge von Orten auf der Erde, bei den Entfernungen der Punkte einer Strecke von einem Punkte dieser Strecke nach der einen oder anderen Seite in Betracht. Alle diese Maßstäbe lassen sich leicht in Beziehung bringen zu dem früher schon benutzten Zahlstrahl. Der Strahl wird eben über 0 hinaus nach der anderen Seite erweitert, er wird ersetzt durch die beiderseits ausgedehnte Gerade. Dabei muß der Schüler darauf hingewiesen werden, daß die neuen Zahlenerweiterungen nicht in allen Fällen in der Wirklichkeit Anwendung finden. Mit halben und viertel Menschen zu rechnen fällt niemand ein, und es gibt doch recht viele Dinge, wo weniger als nichts eben nicht möglich ist. Wenn man von a ℳ $\frac{a \cdot p}{100}$ ℳ Vermögenssteuer zahlt, so bekommt doch der Mann mit b ℳ Schulden nicht $\frac{b \cdot p}{100}$ ℳ vom Staate ausbezahlt, der Ausdruck $\frac{a \cdot p}{100}$ gilt also nur für positives a.

Es kann nicht nachdrücklich genug davor gewarnt werden, im Bereiche der negativen Zahlen gleich mit Buchstabenzahlen zu rechnen. Man kann den Schüler mit dem neuen Begriff nur vertraut machen, wenn ziffernmäßig gegebene negative Zahlen zuerst ausschließlich und später immer noch vorwiegend auftreten.

Wenn man nun an die Operationen mit negativen Zahlen herangeht, so wird man erfahren, daß es mit der Benutzung solcher Gleichnisse für die Zahlen recht schlecht bestellt ist. Schlägt man eine arithmetische Aufgabensammlung auf, so zeigt sich das sofort darin, daß an diesen Stellen eingekleidete Aufgaben fast ganz fehlen. Bei der Einführung der negativen Zahlen sind sie in großer Anzahl zu finden, nachher bei den Rechenoperationen aber sucht man die praktischen Anwendungen vergebens. Ist es nun die lange Tradition oder wirkliche Ökonomie, Tatsache ist jedenfalls, daß im praktischen Leben niemals mit negativen Zahlen gerechnet wird. Der Kaufmann vermeidet die Operationen mit negativen Zahlen ebenso wie der Geograph; der das Thermometer beobachtende Laie und alle die anderen, die mit Skalen der vorhin erwähnten Art zu tun haben, sie alle reden wohl von — 5° u. dgl., rechnen aber nie damit. Warum also in aller Welt das Rechnen mit negativen Zahlen erst einführen? Ich halte es für sehr nützlich, wenn man den Schüler erst einmal zu dieser Fragestellung bringt, statt ihm gleich die Weisheit mit kurzem „So macht man's!" vorzutragen.

Man wird dem Schüler, wenn man ihn so weit hat, an Beispielen zeigen, welche umständlichen Voraussetzungen nötig sind, damit z. B. die Formel

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

gilt. Wenn diese für den Bereich der natürlichen Zahlen aufgestellte Formel richtig sein soll, so müssen so und so viele Nebenbedingungen erfüllt sein. Es muß a größer als b sein, c größer als d. Es muß ac größer als ad sein, dann aber auch noch weiter der Rest größer als bc, sonst ist es nicht möglich, bc von ihm abzuziehen. Man spreche eine Anzahl solcher Formeln durch. Schon so einfache Dinge wie $a + b -$

$c = a - c + b$ sind im Bereiche der positiven Zahlen nur richtig, wenn mehrere Bedingungen erfüllt sind. So werden wir durch die Dinge, die sich ganz und gar im Anwendungsbereiche der positiven Zahlen abspielen, veranlaßt, negative Zahlen zuzulassen und mit ihnen zu rechnen, wollen wir nicht dadurch, daß wir jeden unserer Schritte genau hinsichtlich seiner Ausführbarkeit im Bereiche der positiven Zahlen prüfen, den Fortgang der arithmetischen Rechnung unendlich schleppend, ihren Wert durch die vielen einschränkenden Bedingungen höchst zweifelhaft machen. Die Ausführbarkeit der in Buchstaben, nicht in ziffernmäßig vorgelegten Zahlen gegebenen Aufgaben ist es letzten Endes gewesen, die zur Einführung der negativen Zahlen geführt hat. Das muß auch im Unterricht zum Ausdruck kommen.

Bei der Ausdehnung der Rechenoperationen auf negative Zahlen ist vor allem der Fehler zu vermeiden, einen Beweis dieser Definitionen vorzutäuschen. Solche „Beweise" werden dadurch erschlichen, daß man die einschränkenden Bedingungen, von denen ich eben sprach, wegläßt. Dagegen wird vielleicht doch noch von irgend jemand eingewandt: „Du hast gar nicht das Recht, die Dinge so zu definieren, wie du willst, du bist vielmehr eindeutig auf eine ganz bestimmte Definition festgelegt. Und wenn das der Fall ist, dann handelt es sich eben nicht um eine Definition, sondern um eine aus der Natur der Sache sich notwendig ergebende Tatsache, also doch um einen Lehrsatz." Ich möchte hier auf diesen Einwurf nicht eingehen. Es wird sich bei der Anwendung des Permanenzgesetzes auf die Potenzrechnung eine Gelegenheit finden, bei der man diesem Einwand in einer auch dem Schüler handgreiflichen Form begegnen kann.

Auf keinen Fall darf man bei einer solchen bloß formalen Definition stehen bleiben. Bei der Addition und Subtraktion wird man an der Zahlengeraden die Dinge ganz genau verfolgen können. Ich benutze hier eine Einkleidung, die Wieleitner einmal gegeben hat, sie zeigt, daß es gar nicht so einfach ist, das Bild bis in alle Teile durchzuführen. Es handelt sich um die vier Formeln:

(1) $m + (+a) = m + a$, (3) $m + (-a) = m - a$

(2) $m - (+a) = m - a$, (4) $m - (-a) = m + a$

Die ersten beiden sind in ihrer Bedeutung bekannt. Was bedeutet die dritte Formel? Von einem beliebigen (positiv oder negativ bezeichneten) Punkte m der Zahlengeraden soll man, das Gesicht nach rechts gewandt (das bedeutet das Operationssymbol „+") a Schritte rückwärts (das bedeutet das Vorzeichen „—" vor a) gehen. Dann erreicht man die Stelle $m - a$. Im Falle der vierten Formel soll man, das Gesicht nach links gewandt, a Schritte rückwärts gehen. Dann erreicht man die Stelle $m + a$. Man sieht, in dieses Bild passen auch die beiden ersten Formeln; das erstemal geht man mit dem Gesicht nach rechts um a Schritte vorwärts und erreicht den Punkt $m + a$, im zweiten Falle geht man mit dem Gesicht nach links um a Schritte vorwärts und erreicht den Punkt $m - a$. Eine andere, recht bekannte Einkleidung operiert mit den Begriffen Vermögen und Schulden. Noch deutlicher sieht man die Zweckmäßigkeit wenigstens bei der Addition, wenn man Durchschnittswerte von Temperaturen, positiven und negativen, berechnen läßt.

Zu der Definition der Rechenoperationen erster Stufe habe ich nur noch zweierlei zu bemerken. Zunächst etwas Allgemeines: Man kann die Frage aufwerfen: Handelt

es sich bei der Einführung der negativen Zahlen um eine Hinzufügung neuer Zahlen zu den bisher bekannten natürlichen Zahlen, die man dann in Zukunft als positive Zahlen bezeichnet, oder aber werden an die Stelle der bisher benutzten Zahlen ganz neue gesetzt (man hört manchmal für sie den Ausdruck „gerichtete Zahlen", anders ausgedrückt: Zahlen mit Vorzeichen)? In der Literatur sind beide Anschauungen vertreten, ohne daß sie ausdrücklich genannt werden. Man mache sich aber klar, daß man von einer eigentlichen Erweiterung des Zahlenbereiches und von einer Anwendung des Permanenzgesetzes — nicht bloß hier, auch später z. B. bei der Potenzrechnung — nur dann reden kann, wenn man die erste Meinung vertritt. Schließt man sich der zweiten Ansicht an, so kann nur von einem Ersatz der natürlichen Zahlen durch die mit Vorzeichen versehenen gesprochen werden. Im ersten Falle, mit dem ich mich einverstanden erkläre, sind die eben erwähnten Formeln 1 und 2 neue Schreibweisen bereits bekannter Dinge: Sie geben bloß an, wie man die Dinge ausführlich schreiben muß, wenn man die bisherigen natürlichen Zahlen addiert und subtrahiert. Im zweiten Falle sind die Formeln 1 und 2 Definitionen wie die Formeln 3 und 4.

Sodann die zweite Bemerkung. Wie zeigt man am einfachsten, daß die neue Definition sich in das Gefüge der bisherigen Sätze einfügt? Das Permanenzgesetz bedeutet ja, wie Max Simon es einmal sehr treffend ausgedrückt hat, nichts anderes als den Grundsatz, der in jedem Verein für die Aufnahme neuer Mitglieder herrscht: Sie müssen sich den für die alten Mitglieder geltenden Satzungen fügen. Man setzt in den Definitionen statt des Ausdruckes $(-a)$ den Ausdruck $(0-a)$, dann gehen die Formeln über in die alten bekannten Gesetze, nur daß wir jetzt die einschränkenden Bedingungen, daß die Werte in den Klammern nicht negativ werden dürfen, fallen lassen können.

Ganz Ähnliches wie über die Addition und Subtraktion der negativen Zahlen läßt sich über die Multiplikation und Division mit ihnen sagen.[1] Die vier Multiplikationsregeln:

(1) $(+a)(+b) = +ab$ (3) $(+a)(-b) = -ab$

(2) $(-a)(+b) = -ab$ (4) $(-a)(-b) = +ab$

sind Definitionsgleichungen, deren Zweckmäßigkeit sich aus der Regel von der Multiplikation zweier zweigliedriger Polynome ergibt. Ob man auch die erste der vier Formeln als eine neue Definition anspricht, wird wieder davon abhängen, ob man die positiven Zahlen als die ursprünglichen natürlichen Zahlen ansieht oder nicht.

Etwas schwieriger liegen aber nun die Dinge mit der Erklärung dieser Definition. Wie gesagt, wenn man sich lediglich auf das Permanenzgesetz beruft, ist alles schön und gut. Wenn man nun aber wie bei den Rechenoperationen erster Stufe nach einer Veranschaulichung sucht, so entstehen Schwierigkeiten, die zwar durchaus überwunden werden können, die aber doch für die Mittelklassen wahrscheinlich so groß sind, daß man vielfach auf die Veranschaulichung verzichtet. Stellen wir die Faktoren als Strecken dar, so sind, wie früher benutzt worden, die Produkte als Inhalte von Rechtecken darzustellen. Negative Strecken haben wir vorhin bei der

[1] Vgl. hierzu: K. Goldziher, Zur Methodik der Multiplikation negativer Zahlen, ZmnU 41 (1910) S. 366ff.

Veranschaulichung der Addition und Subtraktion benutzt. Nun aber müssen wir auch Flächen haben, die von positiven und negativen Strecken begrenzt sind. Das geht bekanntlich sehr gut. In der analytischen Geometrie wird man davon zu sprechen haben (hier genügen wohl die beigefügten schematischen Figuren 67). Aber ich rate davon ab, mit Vorzeichen versehene Flächen schon in der Untertertia zu benutzen.

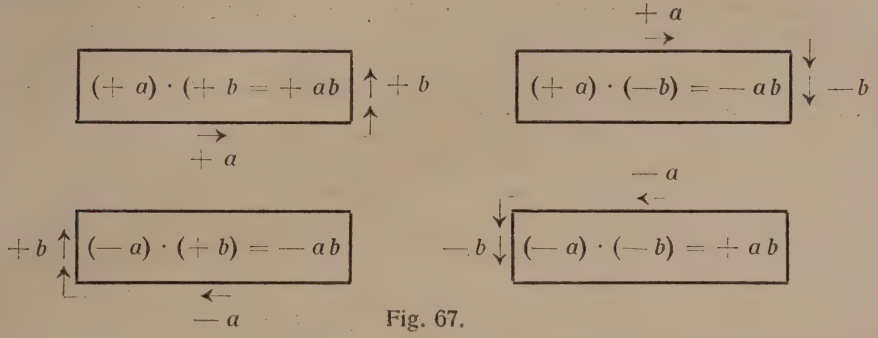


Fig. 67.

Ein anderer Weg ist der folgende: Man stellt zunächst eine Gerade $y = (+ 3)\,x$ graphisch dar. Das liefert für positives x einen Strahl. Vervollständigt man diese Halbgerade zur Geraden, so besagt diese Art der Erweiterung der Operation der Multiplikation von positivem x auf negatives x, daß das Produkt negativ wird. Ebenso zeigt man an der Geraden $y = (— 3)\,x$ die Zweckmäßigkeit der Multiplikation zweier negativen Zahlen. — Diese Methode (vgl. dazu S. 293 und die Figuren 72 bis 75) setzt natürlich voraus, daß die Schüler bereits mit der graphischen Darstellung linearer Funktionen im ersten Quadranten vertraut sind, eine Annahme, die kaum je gemacht werden darf. Immerhin ist es recht beachtenswert, in welcher Form das Permanenzprinzip hier bei der graphischen Darstellung in die Erscheinung tritt. Man kann das geometrische Verfahren auch in das arithmetische hinüberspielen. Man bilde die Reihe $a \cdot 3$, $a \cdot 2$, $a \cdot 1$, $a \cdot 0$, setze sie in gleicher Weise fort und nenne die zugehörigen Produkte $a \cdot (— 1)$, $a \cdot (— 2)$ usf. Ebenso bilde man nachher die Reihe $(— a) \cdot 3$, $(— a) \cdot 2$, $(— a) \cdot 1$, $(— a) \cdot 0$ und setze sie in gleicher Weise fort — d. h. also addiere jeweilig a —, dann nenne man die zugehörigen Produkte $(— a) \cdot (— 1)$, $(— a) \cdot (— 2)$... Diese Methode der Reihenbildung, die in gleicher Weise außerordentlich häufig bei der Ausdehnung des Potenzbegriffes von positiven auf negative Exponenten angewandt wird, pflegt den Schülern sehr plausibel zu sein. Es liegt nur die Gefahr vor — und auch Lehrbücher sind ihr früher vielfach verfallen —, daß diese Form der Anwendung des Permanenzgesetzes als ernstliches Beweismittel angesehen wird. Man durchschaut hier nach meiner Ansicht nicht klar den arithmetischen Charakter der einzelnen Festsetzungen.

Versuchen wir deshalb, die Dinge noch einmal rein arithmetisch plausibel zu machen. Von den vier Formeln ist die erste aus dem früheren klar, die zweite besagt nach der Definition der Multiplikation, wenn ich diese jetzt auch auf negative Summanden übertrage, daß die negative Zahl $— a$ $b$mal als Summand zu setzen ist. Das liefert als Ergebnis $— ab$. Die Erweiterung gegen früher besteht nur darin, daß ich jetzt in der Erklärung der Multiplikation auch negative Summanden zugelassen

habe. Bei der Formel 3 versagt aber zunächst unsere Kunst. Ich kann nicht irgendeine Zahl, sei sie positiv oder negativ, $(-a)$mal als Summand setzen; mit der bisherigen Erklärung der Multiplikation ist also nicht auszukommen. Ich kann mir aber hier anders helfen. Ich setze fest, daß meine Definition jedenfalls so eingerichtet werden muß, daß das kommutative Gesetz der Multiplikation erhalten bleibt. Dann ist $(+a) \cdot (-b) = (-b) \cdot (+a)$, und das ist nach dem eben Gesagten $-ab$. Wie ist also die Multiplikation mit einer negativen Zahl ausgeführt? Es ist mit der positiven Zahl multipliziert und das Ergebnis mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen worden. So machen wir es jetzt auch mit der Erklärung der vierten Formel. Wieder erweitern wir unser eben bei positivem Multiplikanden erhaltenes Ergebnis auf den Fall, wo ein negativer Multiplikand da ist. Wir multiplizieren erst mit dem positiven Wert und erhalten $-ab$ und geben dann dem Ergebnis das entgegengesetzte Vorzeichen.

So entnimmt man dieser Entwicklung, daß einmal immer neue Festsetzungen beim Fortschreiten von einer zur anderen Formel getroffen werden müssen, weiter aber, daß diese Festsetzungen alle in der Ausdehnung bereits bekannter Gesetze bestehen. Wenn der Rechenunterricht früher bei den Brüchen in der Weise vor gegangen ist, wie wir es (S. 41) empfohlen haben, wird den Schülern dieser Gedankengang nicht schwer fallen.[1]

Den vier Formeln über die Multiplikation entsprechen ebenso viele Formeln über die Division. Es sind das Formeln der Art

$$(-am) : (+a) = -m,$$

wenn ich nur eine als Typus herausgreife. Hier ist eine neue Definition nicht nötig, wenn man die Division auch in ihrer erweiterten Form als die der Multiplikation inverse Operation auffaßt. Nachdem diese Festsetzung getroffen ist, kann man beweisen, daß die Formeln für die Division richtig sind, indem man die Probe macht. Übrigens gilt gleiches von der Subtraktion verglichen mit der Addition.

Es würde zu weit führen, wollten wir in der gleichen Ausführlichkeit auch die Einführung der Brüche besprechen. Das ist auch nicht nötig: Die Brüche kennt der Schüler ja schon vom Rechenunterricht her, und wir haben schon früher (S. 40ff.) Gelegenheit genommen, auf die theoretische Seite dieser Dinge einzugehen. Ich halte es für nötig, daß auch der arithmetische Unterricht noch einmal gründlich das Warum der Bruchgesetze erörtert. Sonst ist womöglich der Verlauf der, daß die Schüler in Quinta nach der Methode: Mach's so, weil's der Lehrer so sagt! die Bruchrechnung gelernt haben, und daß dann in Untertertia die Bruchrechnung als Zusammenfassung jener so erlernten Regeln in die Erscheinung tritt. Es ist kein Wunder, daß eine auf so unsicheren Fundamenten gewachsene Weisheit später kläglich zusammenbricht. Sie hält nur vor, solange der Drill dauert.

Also man spare die Erklärung weder in Quinta noch in Untertertia. Bei der Mul-

[1] Ich füge noch eine Erklärung an, die in einer pädagogischen Arbeit entwickelt wurde: $(+3) \cdot (+5)$ heißt, 5 mal werden 3 Schritte nach rechts addiert, das gibt 15 Schritte nach rechts; $(-3) \cdot (+5)$ heißt, 5 mal werden 3 Schritte nach links addiert, das gibt 15 Schritte nach links; $(+3) \cdot (-5)$ heißt, 5 mal werden 3 Schritte nach rechts subtrahiert, das gibt 15 Schritte nach links; $(-3) \cdot (-5)$ heißt, 5 mal werden 3 Schritte nach links subtrahiert, das gibt 15 Schritte nach rechts.

tiplikation, die in Quinta die größten Schwierigkeiten machte, kann man sich jetzt jedenfalls auch auf den Flächeninhalt beziehen, wobei die Maßzahlen der Rechtecksseiten gebrochene Zahlen sind.

Ein Wort schließlich noch zu den in der Schule üblichen Bezeichnungen. Man nennt die positiven und negativen, ganzen und gebrochenen Zahlen im Einverständnis mit der mathematischen Wissenschaft rationale Zahlen. Für die positiven und negativen Zahlen hat sich hingegen der in der Wissenschaft etwas ganz anderes bedeutende Ausdruck „algebraische Zahlen" bis heute in manchen Lehrbüchern gehalten. Da auf der Oberstufe der Realanstalten gelegentlich algebraische Zahlen in der wissenschaftlichen Bedeutung des Wortes (Wurzeln einer Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

mit ganzen Koeffizienten $a_0, a_1 \ldots$) erwähnt werden, empfiehlt es sich, für den Inbegriff der positiven und negativen Zahlen das Wort „relative", niemals „algebraische" Zahlen zu gebrauchen.

Zu den Übungen und Anwendungen der Rechenregeln für negative und gebrochene Zahlen mögen einige wenige Bemerkungen genügen. Vorweg den Rat, die Zahl der Übungen nicht zu klein zu nehmen. Sie können in ausgezeichneter Weise auch der immanenten Wiederholung aller bisher geübten Rechenmethoden dienen. Man denke nur an das Kürzen, Multiplizieren und Dividieren der Brüche. Hier ist auch die Stelle, die Division eines Polynoms durch ein anderes zu behandeln. Man wird dabei gut tun, nicht bloß immer aufgehende Aufgaben zu berücksichtigen, sondern auch dem Schüler an Beispielen deutlich zu machen, daß „Aufgabe" nicht von „Aufgehen" herkommt. Auch die Substitutionen sind nicht zu vergessen. In $(1 + x)^2$ z. B. lasse man x auch negative Zahlen, Brüche und irgendwelche anderen zusammengesetzten Ausdrücke darstellen.

Da heute die Kettenbrüche aus den Lehrplänen der höheren Schulen wohl durchweg verschwunden sind, benutzt ein Freund dieser Dinge vielleicht die Gelegenheit, die Schüler wenigstens mit der Schreibweise und Berechnung einfacher endlicher Kettenbrüche bekannt zu machen. Das kann in sehr kurzer Zeit geschehen; der Schüler weiß dann doch, was er von diesen Symbolen zu halten hat.

Der Lehre von den Brüchen schließt sich die Proportionenlehre an. Dieses Gebiet hat ein eigenartiges Schicksal gehabt. Es wird im allgemeinen über Gebühr bevorzugt, leider aber kommt dabei der einzige neue, fruchtbare Gedanke, der zu den bekannten Gesetzen der Bruchrechnung und der Gleichungslehre hinzukommt, meist zu kurz. Eine Proportion ist die Gleichung, die zwischen zwei Brüchen mit gleichem Werte besteht. Mit diesen Bruchgleichungen kann ich nun natürlich alles das vornehmen, was man mit Brüchen anstellen darf, ich kann z. B. den einen Bruch erweitern oder kürzen. Ich kann ebenso alle die Operationen vornehmen, die sich aus der Gleichungseigenschaft herleiten. Der wichtigste Eingriff ist der Übergang von der Proportion zur Produktengleichung.

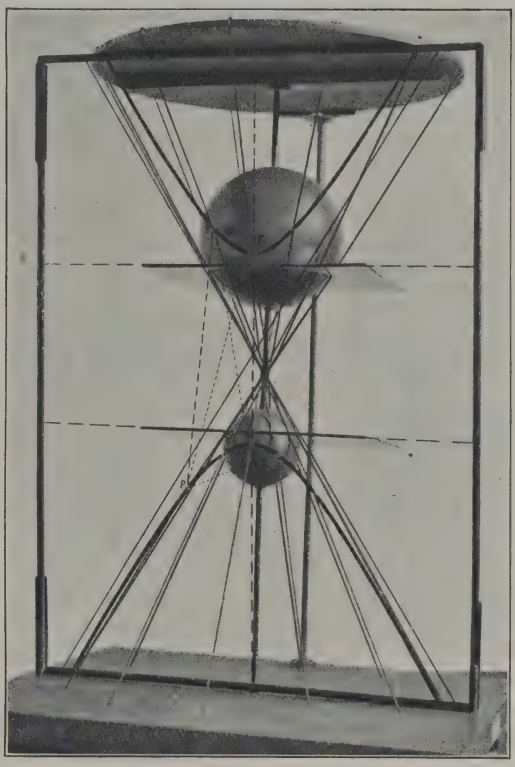
Neu ist nur die Einführung des Proportionalitätsfaktors. Gerade dieser Begriff wird aber meist bei der Ableitung der Proportionsgesetze — z. B. bei dem Gesetz von der korrespondierenden Addition — nicht benutzt. Und doch ist er auch später bei der praktischen Verwendung der Proportionen von größter Bedeutung. Kommen

z. B. bei Gleichungen die Unbekannten in Proportionen vor, so vereinfacht häufig die Einführung des Proportionalitätsfaktors die Rechnung ganz gewaltig. In den Anwendungen in der Physik ist der Proportionsbegriff vollständig hinter dem Proportionalitätsfaktor zurückgetreten. Ich rate also, in dem Abschnitt über Proportionen die Bestimmung dieser Größe und ihre Verwendung mehr als bisher zu betreiben. Im übrigen ist die Proportionslehre, wie ich schon bei früherer Gelegenheit (S. 147) ausgeführt habe, ausgezeichnet geeignet, wieder einmal die Verbindung zwischen Geometrie und Arithmetik herzustellen. Bei Euklid war das Verhältnis so, daß man mit der Geometrie durch die Proportionenlehre der Arithmetik zu Hilfe kommen wollte; heute hat sich der Spieß umgedreht: wir kommen mit der Arithmetik durch die auf der Einführung der gebrochenen Zahl basierende Proportionenlehre der Geometrie wirksam zu Hilfe.

Wir sind bisher einer letzten, durch die rationalen Rechenoperationen nahegelegten Erweiterung des Zahlbegriffes vorsichtig aus dem Wege gegangen. Wir hatten oben die Null eingeführt. Ließe ich die Division durch Null zu, so käme ich auf ein neues Symbol, auf die Zahl Unendlich. Ich glaube, man schiebt die Einführung dieses Symbols am besten möglichst weit hinaus. Wenn Zahlen Symbole sind, so trägt diese Zahl diesen ihren Charakter besonders auffällig zur Schau. Man hat sich Bilder zu machen gesucht, wie groß die Zahl ∞ ist. Im Märchen ist die Zahl der Sterne, die man am Himmel mit bloßem Auge sieht, oder die Zahl der Punkte, mit denen der Hirtenbube die Sternkarte auf einem Blatt Papier andeutet, schon unendlich. Oder aber es wird die Erzählung von dem Vögelchen erdacht, das alle 1000 Jahre seinen Schnabel an einem Diamantberg wetzt, und wenn der Diamantberg ganz abgewetzt ist, dann ist eine Sekunde der Ewigkeit vorüber. Archimedes faßte den „unzähligen Sand" am Strande des Meeres in endliche Zahlen. Die Zahl der Eindrücke, die ein Mensch in seinem ganzen Leben gehabt hat, ist endlich; die Zahl aller Gedanken, die je von Menschen gedacht sind, ist endlich. Fast erscheint es wunderbar, daß dem Menschen doch der Begriff des Unendlichen gekommen ist.

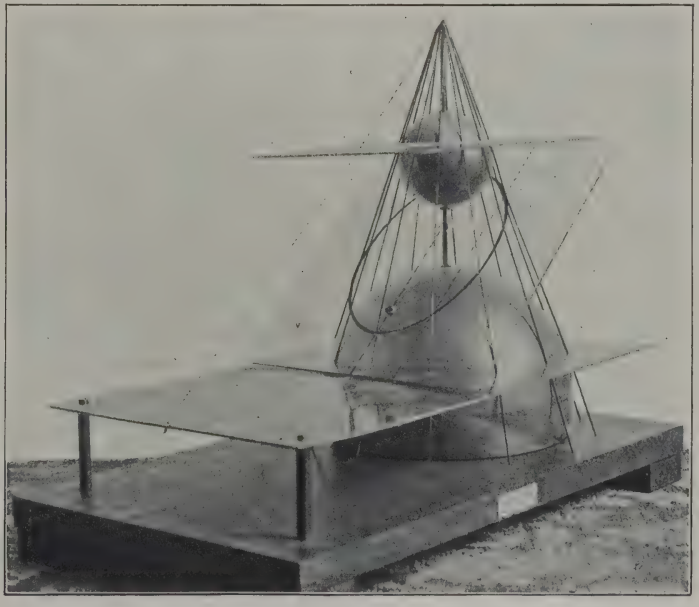
Die Mengenlehre, die an den Begriff des Aktualunendlichen herangeht, scheidet für die Schule aus — abgesehen höchstens von einem Ausblick in Prima. Die Infinitesimalrechnung in ihrer modernen Form scheidet das Unendlich als einen Fremdkörper aus. Wo sie das Wort anwendet, ist es nur eine kurze Bezeichnung für Operationen und Begriffe, die sich ganz im Endlichen abspielen. Davon wird noch im 9. Kapitel zu sprechen sein. Es kommt hinzu, daß gerade bei der Besprechung einer Division durch Null sich sofort eine erhebliche Schwierigkeit einstellt, daß nämlich $\frac{a}{0}$ einmal als $\lim_{n \to 0} \frac{a}{n}$, das andere Mal als $\lim_{n \to 0} \frac{a}{-n}$ auftritt, wo n beidemal positiv ist und so gleich allerlei mysteriöse Feststellungen über das Zusammenfallen von $+\infty$ und $-\infty$ gemacht werden.

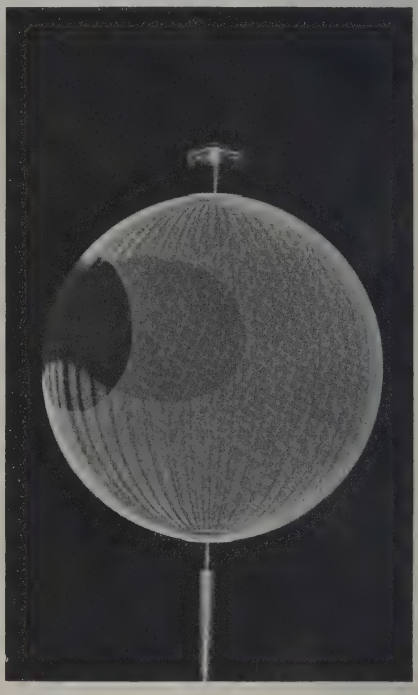
In der Untertertia wird man sich deshalb damit begnügen, den Wert eines Bruches bei abnehmendem Nenner und konstantem Zähler zu untersuchen. Man sieht dann, wie die Folge dieser Zahlenwerte immer weiter wächst. Die Zahl unendlich tritt also als Symbol auf für die Zahl, die größer ist als jede angebbare Zahl, oder genauer: Wenn ich eine beliebige Zahl N gebe, so kann man stets Nenner n angeben derart, daß $\frac{a}{n} > N$ ist.

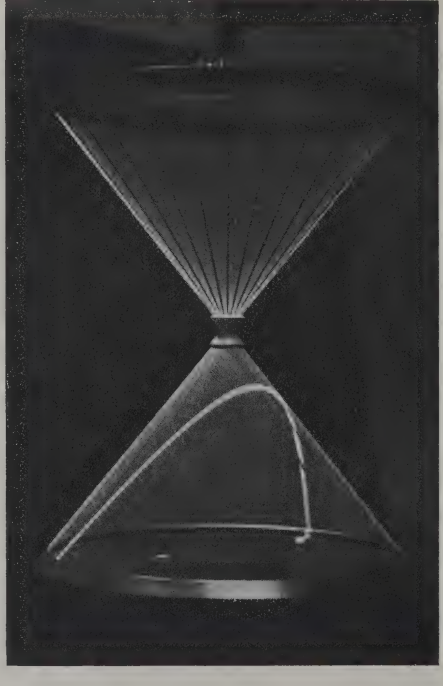


Kegelschnittmodelle (oben Fall der Hyperbel, unten Fall der Ellipse) mit Dandelinschen Kugeln.

Hergestellt von Franz Kneller, Werkstätte für Präzisionsmechanik, Karlsruhe i. Ba.







Kurven auf Rotationskörpern.

Dargestellt durch kinodiaphragmatische Projektion nach dem Verfahren von E. Papperitz, Freiberg i. Sa.

4. Das Potenzieren.

Potenzen mit niedrigen Exponenten sind dem Schüler aus dem früheren Unterricht her bekannt. Neu ist zunächst für ihn nur, daß er das, was er durch jedesmaligen Rückgang auf die Bedeutung der Potenz erledigte, in allgemeine Gesetze bringt, daß er m. a. W. mit allgemeinen Exponenten zu rechnen lernt.

Man wird also zunächst den Ausdruck a^n zu definieren haben, wo a eine beliebige rationale Zahl, n dem Sinne der Definition entsprechend eine positive ganze Zahl ist. Es ist nützlich, diese Beschränkung von vornherein ausdrücklich zu erwähnen. In der Tat, wenn wir a n-mal als Faktor setzen, so kann nicht n eine negative oder eine gebrochene Zahl sein. Auch die Zahl $n = 1$ ist eigentlich ausgeschlossen. Man tut aber wohl gut, von vornherein diesen letzten Fall mit in die Definition hineinzunehmen, also die Gleichung $a^1 = a$ auszusprechen.

Wie wir die Abhängigkeit eines Rechenausdruckes von den in ihm vorkommenden Größen schon früher bei der Summe, der Differenz, dem Produkt, dem Quotienten untersucht haben, so wird nun hier auch der Ausdruck a^n hinsichtlich seiner Abhängigkeit von a und von n zu untersuchen sein. Wenn die Gleichungen ersten Grades, die ja der Potenzrechnung voranstehen, bereits Anlaß zur Einführung von graphischen Darstellungen gegeben haben, so wird man die Funktionen $y = x^n$ graphisch darstellen, etwa für $n = 1, 2, 3, 4$. Dann läßt sich leicht herauslesen, was allgemein über die Abhängigkeit bei geradem und bei ungeradem n zu sagen ist. Die Kurven, die man dabei erhält, lassen sich sofort in der Gleichungslehre verwenden (vgl. S. 295ff.).

Etwas anders liegen die Dinge hinsichtlich der Abhängigkeit des Potenzausdruckes von dem Exponenten. Von einer graphischen Darstellung in landläufigem Sinne kann hier noch nicht die Rede sein. Wir erhalten ja von der Kurve nur einzelne Punkte, und für die Zwischenwerte existiert nach dem derzeitigen Stande der Kenntnisse die Funktion noch gar nicht. Es ist nicht einmal ohne weiteres sicher, ob man später a^n für andere als natürliche Zahlen n definieren wird; bei $n!$ geschieht das ja auch nicht. Ich halte es für einen didaktischen und wissenschaftlichen Fehler, hier trotzdem regelrechte Kurven zu zeichnen, ja sogar aus ihnen, weil sie bei verschiedenem a alle für den Wert $x = 0$ dem Werte $y = 1$ zustreben, die Beziehung $a^0 = 1$ „abzuleiten".

Solche Schlüsse stehen doch auf recht schwankendem Boden. Stellt man einmal den Ausdruck $y = (+2)^x$, das andere Mal $y = (-2)^x$ für ganzzahliges x dar, so wird der naive Schüler ebenso wie im Falle der ersten auch im Falle der zweiten Kurve die Verbindung der Punkte durch eine stetige Kurve versuchen. Das erste Mal befindet er sich auf richtigem, das zweite Mal auf falschem Wege. Man sollte sich bei der Abhängigkeit vom Exponenten mit einer Zahlentabelle begnügen. Es gibt lehrreiche Beispiele genug, in denen die starke Zunahme des Wertes der Potenz bei steigendem Exponenten — das ist ja schließlich die Hauptsache — drastisch in die Erscheinung tritt.

Die Lehrsätze über die Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis, über die Potenzierung von Produkten, Quotienten und Potenzen lassen sich leicht durch Rückgang auf die Erklärung der Potenz beweisen. Der Schüler wird

kaum irgendwelche Schwierigkeiten bei der Auffassung und Anwendung der Gesetze haben. Man hat versucht, diese Gesetze auch an der Exponentialkurve mit geometrischen Methoden zu beweisen; mir erscheinen diese Versuche unnötig. Da wir schon die Exponentialkurve, ehe die Potenz für alle rationalen Werte des Exponenten definiert ist, abgelehnt haben, müssen wir erst recht solche geometrischen Ableitungen verwerfen. Wir würden das aber selbst dann tun, wenn die Exponentialkurve bereits bekannt wäre; hier ist eben die Arithmetik leichter verständlich als die Geometrie.

Die erste Erweiterung, die man mit dem Potenzbegriff vornimmt, ist nun die, daß man auch die Null und die negativen ganzen Zahlen als Exponenten zuläßt. Man erläutert den Schülern den Grund, warum man zu dieser Erweiterung geradezu gezwungen wird, am besten wieder damit, daß andernfalls bei dem Auftreten von Differenzen u. dgl. im Exponenten immer ausdrücklich gewisse Nebenbedingungen ausgesprochen werden müssen. Es ist ganz lehrreich, die Aufgaben der üblichen Sammlungen einmal daraufhin zu untersuchen, in welchem Maße die in den Exponenten auftretenden allgemeinen Zahlen einzuschränken sind. Wenn z. B. als Aufgabe die Vereinfachung des Ausdruckes $\frac{a^{7+2x}}{a^{7-3x}}$ vorgelegt ist, so ist dazu zu bemerken, daß das bei einer Beschränkung auf positive ganze Exponenten nur für die Werte $x = 1, 2, 0, -1, -2, -3$ einen Sinn hat. Andernfalls steht im Exponenten der einen Potenz ein negativer Ausdruck, und das ist ein noch unbekannter Begriff. Ein Ausdruck $\frac{a^{m-n}}{a^{n-m}}$, wo $m \neq n$ ist, hat an dieser Stelle überhaupt keinen Sinn, denn entweder ist der Exponent im Zähler oder der im Nenner negativ.

Wie ist nun die weitere Frage zu beantworten, warum man die Definitionen der Potenz für negative Exponenten und für den Exponenten 0 gerade so einrichtet, wie es üblich ist. Es ist nützlich, einmal mit den Schülern durchzudenken, was für Konsequenzen es haben würde, wenn man $a^0 = 0$ oder aber, wenn man etwa $a^{-n} = -a^n$ ansetzte. Man sieht, welche Schwierigkeiten aus einer solchen Festsetzung erwachsen würden. Im übrigen wird die der Ökonomie des Denkens am meisten entgegenkommende Definition leicht aus denjenigen Formeln gefunden, die man in älteren Lehrbüchern zu einem Scheinbeweise der Definitionen herangezogen hat. Man zeigt, daß bei der Definition $a^0 = 1$ das Gesetz $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$ auch für den bisher ausgeschlossenen Fall $m = n$ gilt. Man zeigt weiter, daß bei der Definition $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, wo $a \neq 0$ ist, das eben genannte Gesetz auch für den Fall $m = 0$ gilt. Mit dieser Definition ist dann ein wesentlicher Vorteil verbunden. Die früher ausführlich besprochenen Nebenbedingungen fallen jetzt ganz weg; wir brauchen jetzt nicht mehr zwischen den beiden Fällen

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ wenn } m > n \text{ ist,}$$
$$a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ wenn } m < n \text{ ist,}$$

zu unterscheiden, sie fallen in einen zusammen und sind nur besondere Fälle des jetzt für positive und negative m und n geltenden Gesetzes

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Bei den Übungen, die für eine vollständige Beherrschung der Potenzrechnung unentbehrlich sind, möge besonders auf zwei Dinge geachtet werden, die für eine Wiederholung früherer Stoffe von Wichtigkeit sind. Einmal empfehlen sich hier Multiplikationen und Divisionen von homogenen Polynomen und von solchen, die nach Potenzen einer Größe geordnet sind. Dann aber ist das Rechnen mit Brüchen erneut zu berücksichtigen.

Dringend empfehle ich, die Behandlung der Potenzen mit positiven und negativen Exponenten zum Anlaß einer Revision des Ziffernrechnens zu nehmen. Man kann jetzt besser als einst in Sexta die wesentlichen Eigenschaften des dekadischen Ziffernsystems im Gegensatz zu anderen (man bevorzuge geschichtlich wichtige Systeme vor beliebig erdachten) herausheben. Man kann neben den endlichen auch in aller Sorgfalt die unendlichen Dezimalbrüche studieren.[1] Für die gegenwärtig gebräuchlichen Rechenschemata bei der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division der ganzen und der dezimalen Zahlen ist die Begründung in der Weise zu geben, daß man die Zahlen als Summen von Zehnerpotenzen schreibt und dann mit diesen rechnet. Hier ist auch eine Wiederholung, nötigenfalls die Neudurchnahme des abgekürzten Dezimalbruchrechnens anzufügen. Ich gebe auch zu erwägen, ob man nicht auf die im Geschäftsleben immer häufiger verwandten Additions- und Multiplikationsrechenmaschinen hinweist.[2] Finke[3] hat geradezu ein einfaches Modell einer Rechenmaschine im Unterricht verwertet und insbesondere auf die Zehnerübertragung hingewiesen.

5. Zahlentheorie.

Zahlentheorie als ein in sich abgeschlossenes Kapitel wird in der höheren Schule nicht getrieben; aber bei den verschiedenen Gelegenheiten kommt doch im Rechenunterricht und im Mathematikunterricht dieses und jenes aus dem Reiche der Zahlentheorie zur Sprache, daß es sich verlohnt, die Dinge einmal zusammenzustellen.[4] Der Rechenunterricht hat besonders in denjenigen Abschnitten, die der Vorbereitung der Bruchrechnung gewidmet sind, auf den Begriff der Primzahl, auf die Teilbarkeit der Zahlen, den größten gemeinschaftlichen Teiler und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier Zahlen ausführlich einzugehen (vgl. Abschnitt 6 des 1. Kapitels). Wenn nun eben im Anschluß an die Potenzrechnung empfohlen

[1] Ich nenne hier den Anhang der schon S. 33 Anmerkung 1 genannten Schrift von Bochow, der sich ausschließlich mit den periodischen Dezimalbrüchen beschäftigt.

[2] Zur Orientierung seien dem Lehrer empfohlen: A. Galle, Mathematische Instrumente, Leipzig (Teubner) 1912; H. von Sanden, Praktische Analysis (1. Teil von H. E. Timerdings Handbuch der angewandten Mathematik), Leipzig (Teubner) 1914. Besonders lehrreich und gleichzeitig reichhaltig ist das Bändchen der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt": K. Lenz, Die Rechenmaschine und das Maschinenrechnen, Leipzig (Teubner) 1915.

[3] W. Finke, Über Rechenmaschinen und Rechenunterricht, ZmnU 49 (1918) S. 127.

[4] Eine auf meine Anregung abgefaßte pädagogische Arbeit über die Zahlentheorie im Unterricht, der ich im folgenden manche Angaben entnehme, zeigt alles in allem doch überraschend viel Einzelheiten.

wurde, im Arithmetikunterricht etwa der Obertertia eine Wiederholung des Ziffernrechnens vorzunehmen, so kann ein Freund der Zahlentheorie die Gelegenheit benutzen, etwas tiefer zu schürfen. Von Fettweis[1] ist vorgeschlagen und auch im Unterricht erprobt worden, im Oberlyzeum, also einer der Ausbildungsstätten der Lehrerinnen, ausdrücklich zahlentheoretische Fragen in den Unterricht aufzunehmen. Die Lehrbücher enthalten eigene Kapitel über Zahlentheorie in der Regel nicht; eine Ausnahme machen z. B. die Bücher von Niemöller-Dekker und von Wittstein, die etwa bis zur φ-Funktion vorgehen.

Die Untersuchung des dekadischen Zahlensystems ist Anlaß zur Aufstellung gewisser Teilbarkeitsregeln. Die Teilbarkeit durch 2 und 5, durch 10, 25, 50 usf., dann auch durch 9 und 3 wird wohl allgemein untersucht; die Ableitung der Regeln an der Hand der Potenzschreibweise dürfte weit verbreitet sein. Auch der Neunerprobe und ihrer Verwendung bei den vier rationalen Rechenoperationen wird man bei dem wiederholenden Gang durch die elementaren Rechenverfahren erneut gedenken. Dabei pflegt man aber stehen zu bleiben. Der eine oder andere bringt noch die Teilerregel für die 11, die besonders einfach ist, an die 7 wagen sich schon nur wenige; gelegentlich sind einfache Regeln in den didaktischen Zeitschriften veröffentlicht worden[2], die auch zuweilen in die Schulbücher als Übungsbeispiele übergegangen sind und nicht bei der 7 stehen blieben. Der Schüler sollte jedenfalls einen Begriff davon bekommen, daß es für alle Primteiler „Teilerregeln" gibt, nur daß sie eben nicht immer schon bei kleinen Zahlen nützlicher als vollständiges Durchdividieren sind.

Ganz besonders reizvoll ist das Aufsuchen von Teilern bei solchen Zahlen, bei denen man zu überraschenden Rechenkunststücken gelangen kann. Viel benutzt wird z. B. die Zerlegung $111 = 3 \cdot 37$, auch $111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. Auch an das Eingreifen der Neunerrestregel bei dem beliebten Erraten gedachter Zahlen möchte ich erinnern.[3]

Auch der Primzahlbegriff ist schon von Sexta oder Quinta her bekannt. Aber auf der etwas höheren Stufe wird man mancherlei zur Vertiefung des Begriffes tun können. Zunächst kann man in der bekannten Weise von Euklid nachweisen, daß die Anzahl der Primzahlen unbegrenzt ist. Man kann, wenn man wieder an das Sieb des Eratosthenos erinnert, jetzt genau formulieren, wie weit man mit dem Aussieben der teilbaren Zahlen gehen muß, um nur noch Primzahlen zurückzubehalten. Die Eindeutigkeit der Zerlegung in Primzahlen muß man auf dieser Stufe wohl ohne weiteres hinnehmen, denn Gegenbeispiele an einem Zahlstrahl (etwa der Nachweis, daß im Strahl der Zahlen $4n + 1$ die eindeutige Zerlegung nicht gilt) werden dem Schüler nicht einleuchten. Ob es möglich ist, in Prima ein Beispiel für eine mehrfache Zerlegung in Primfaktoren aus einem geeigneten komplexen Zahlkörper ohne allzu großen Zeitverlust durchzusprechen, möchte ich dahingestellt sein lassen.

[1] E. Fettweis, Zur Reform des algebraisch-arithmetischen Unterrichts der Lehrerbildung, Pädagogische Blätter **46** (1917) S. 38ff.; ders., Die Mathematik des Lyzeums und Oberlyzeums, ZmnU **52** (1921) S. 97ff.

[2] Vgl. kleine Mitteilungen in der ZmnU von Krahl (**45** (1914) S. 562), Lietzmann (**47** (1916) S. 180, 480) und Kasack (**47** (1916) S. 481).

[3] Zahlreiche Beispiele habe ich in meinem Bändchen: W. Lietzmann, Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen, Leipzig (Hirt) 1922, angegeben.

Von den einfachsten zahlentheoretischen Funktionen wird $T(n)$, $\varphi(n)$ zuweilen erwähnt, schon seltener der Ausdruck für sie abgeleitet. $n!$ wird überall benutzt, $[n]$ vielleicht gelegentlich, wenn man bei den empirischen Kurven allereinfachste Beispiele für Treppenkurven haben will.

Bei der Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Teilers spielt manchmal schon im Rechenunterricht der Euklidische Algorithmus eine Rolle. Er ist für diese Stufe sehr schwer verständlich. Hier in O III oder U II aber bietet sich Gelegenheit, ihn mit Aussicht auf mehr Verständnis zu behandeln, und zwar nicht nur für Zahlen, sondern auch für algebraische Ausdrücke.

Die Eigenschaften des dekadischen Zahlensystems werden dadurch in besonderes Licht gesetzt, daß man auch andere Zahlensysteme betrachtet. Man bevorzugt da historisch interessante Systeme, um damit einen Ausflug in die Geschichte unseres Zahlbegriffs und der Schreibweise der Ziffern zu geben. Man kann aber auch den wissenschaftlichen Gesichtspunkt stärker herausarbeiten. Ich möchte zunächst an allerlei Zahlenmirakel erinnern, die zumeist eine Eigentümlichkeit unseres dekadischen Systems sind (Beispiele in meiner eben genannten kleinen Schrift über Unterhaltungsmathematik). Von den anderen Zahlsystemen ist das lehrreichste das dyadische. Auch hier lassen sich wieder zahlreiche Zahlenmerkwürdigkeiten heranbringen, ich erinnere etwa an die russische Art des Multiplizierens, die sich mit Verdoppeln und Halbieren von Zahlen begnügen kann, indem sie die Ausgangszahlen ins dyadische Zahlsystem überträgt.[1] Die Teilbarkeitsregeln gewinnen vom Standpunkt des allgemeinen g-adischen Zahlsystems aus eine wertvolle Vertiefung.

Wir blieben bisher im Bereiche der ganzen Zahlen. Ein enger Zusammenhang mit der Zahlentheorie läßt sich auch von den periodischen Dezimalzahlen aus herstellen. Da dabei allerlei Eigentümlichkeiten unseres Zahlensystems ihre Erklärung finden, wird dieses Gebiet auf das Interesse gerade mathematischer Köpfe rechnen können. Wie weit man dabei vordringen kann, zeigt das schöne Büchelchen von Leman[2]. Der (kleine) Fermatsche Satz gewinnt hier eine sehr anschauliche Bedeutung für die Rechenpraxis.

Auch aus der Lehre von den gemeinen Brüchen möchte ich doch wenigstens ein Beispiel heranziehen. Wenn man die Reihe der zwischen 0 und 1 liegenden Brüche der Größe nach ordnet, also etwa, wenn ich bis zu 10 als höchstem Nenner gehe,

$$0, \frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \ldots\ldots 1,$$

so kann man an dieser Folge allerlei lehrreiche zahlentheoretische Erscheinungen studieren, wie das z. B. in einer kleinen Mitteilung in der ZmnU geschehen ist[3]. Es handelt sich hier um Farey-Reihen, die in der neueren Zahlentheorie bei Abschätzungen eine starke Anwendung gefunden haben.

Damit mag es hier mit der Aufzählung von Gelegenheiten, die Zahlentheorie zu Wort kommen zu lassen, sein Bewenden haben. Einzelfragen zahlentheoretischer

[1] Vgl. z. B. Th. Meyer, Über ein Multiplikationsverfahren, ZmnU 47 (1916) S. 78ff. und S. 288ff.; auch meine S. 228 zit. Schrift

[2] A. Leman, Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie (MPhB 19), Leipzig (Teubner) 1916.

[3] Polygon, Eine Eigenschaft der gemeinen Brüche, ZmnU 45 (1911) S. 559ff.

Natur zu berücksichtigen, findet sich daneben noch mannigfache Gelegenheit. Die diophantischen Gleichungen, insbesondere etwa die pythagoreische Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$, die binomische Gleichung und ihr Zusammenhang mit der Kreisteilung, vielleicht auch die Kettenbrüche, sind Beispiele, auf die an gegebenem Ort noch eingegangen wird.

Von der in der elementaren Zahlentheorie üblichen Schreibweise, dem Kongruenzsymbol, bei alledem Gebrauch zu machen, scheint mir nicht zweckmäßig, jedenfalls nicht notwendig. Weit wichtiger ist, daß der Schüler überhaupt einmal einen Einblick in das Gebiet, eine Ahnung von der Schönheit dieser „reinsten" Mathematik erhält.

6. Das Radizieren.

Wenn im früheren arithmetischen Unterricht die Subtraktion als die Umkehrung der Addition, die Division als die Umkehrung der Multiplikation erkannt ist, so liegt nun auch bei der Potenzierung die Frage nach einer Umkehrung nahe. Ehe diese Frage beantwortet wird, ist noch ein für die Bildung der inversen Operationen wichtiger Umstand zu untersuchen: Gilt das kommutative Gesetz für die Potenzierung ebenso wie für die Addition und die Multiplikation? Die Frage ist mit nein zu beantworten. „Im allgemeinen" ist $x^y \neq y^x$. Man wird an der Frage nach den Ausnahmefällen nicht vorübergehen. Die Werte $x = 4$, $y = 2$ findet man sehr bald durch Probieren, wird auch sehen, daß ein anderer ganzzahliger Wert (so will es die bisherige Fassung des Potenzbegriffes) nicht vorhanden ist. Eine genaue Untersuchung des Problems, wie es z. B. mit Methoden der graphischen Darstellung Schimmack[1] und später Flechsenhaar[2] gegeben haben, kann hier noch nicht unternommen werden. Sie bleibt aber eine interessante Übung für später.

Aus der Tatsache, daß das kommutative Gesetz nicht gilt, folgt, daß das Potenzieren zwei Umkehrungen hat. Pietzker hat zwar den Standpunkt vertreten, auch das Potenzieren habe nur eine Umkehrung, das Radizieren. Das Logarithmieren sei die Umkehrung des Exponentiierens. Gennimatás wiederum führt aus, daß das Radizieren keine inverse Operation des Potenzierens sei.[3] Beides scheint mir ein Streit um Worte.

Wir fassen nun zunächst eine der Umkehrungen ins Auge. Es sei in der Gleichung $x^n = b$ die Basis der Potenz unbekannt, alle anderen Größen seien bekannt. Dann ist — mit gewissen, gleich noch anzuführenden Einschränkungen — mit dieser Gleichung identisch, nur eine andere Schreibweise, $x = \sqrt[n]{b}$. Im Unterricht wird man die Schreibweise erklären müssen. Leider ist die Entstehung des Zeichens noch nicht ganz aufgehellt. So viel ist jedenfalls sicher, daß es nicht eine Abkürzung des Anfangsbuchstabens r von radix = Wurzel ist, wie früher in fast allen Lehrbüchern zu lesen stand. Das Zeichen ist vielmehr aus einem Punkt entstanden. Als Schnörkel sind allmählich die Striche hinzugekommen, der wagerechte Schlußstrich erst sehr spät als Ersatz der Klammer.

---

[1] R. Schimmack, Über die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts, Heft VII der IMUK-Ber., Leipzig (Teubner) 1912.

[2] A. Flechsenhaar, Graphische Methoden im algebraischen Unterricht, Programm Lessing-Gymnasium zu Frankfurt a. M. 1913.

[3] N. Gennimatás, Zu den arithmetischen Operationen, ZmnU 54 (1923).

Man wird sich bei der Einführung der Wurzeln zunächst an solche Zahlen halten, bei denen das Ausziehen der Wurzel möglich ist. Nur für solche ist ja der Ausdruck vorderhand definiert. Schon da fällt eine Tatsache in die Augen, die für die Schüler ein Novum bedeutet. Es stellt sich heraus, daß die Wurzel in manchen Fällen nicht eindeutig bestimmt ist. Geht man der Sache auf den Grund, so findet man, daß eine Zweideutigkeit dann vorhanden ist, wenn der Wurzelexponent eine gerade Zahl ist, insbesondere also bei allen Quadratwurzeln. Man bezeichnet mit $\sqrt[n]{a}$ stets den positiven Wert der Wurzel, muß also bei Angabe aller beiden Wurzeln im Falle eines geraden n stets $\pm \sqrt[n]{a}$ schreiben. Man beachte also: Jetzt sind die Gleichungen

$$x^n = b \quad \text{und} \quad x = \sqrt[n]{b}$$

nur im Falle eines ungeraden n gleichbedeutend. Im Falle eines geraden n, also z. B. bei allen Quadratwurzeln, sind gleichbedeutend die beiden Gleichungen

$$x^n = b \quad \text{und} \quad x = \pm \sqrt[n]{b}.$$

In kurzen Worten gesagt bedeutet unsere Festsetzung: wir bezeichnen mit dem Symbol nur den sog. Hauptwert der Wurzel.

Es harren jetzt nun der Erledigung alle die Fälle, in denen es nicht gelingt, die Größe x im Bereiche der uns bekannten Zahlen zu finden. Wir machen der Einfachheit halber die Einschränkung, daß n eine positive Zahl ist, und gehen zunächst an den einfachsten Fall $n = 2$ heran.

Der Schüler findet sofort, daß die Wurzel aus einer ganzen Zahl dann ausziehbar ist, wenn die Zahl eine Quadratzahl ist. Ist der Radikand eine ganze Zahl, aber keine Quadratzahl, so ist zunächst leicht zu zeigen, daß das Ergebnis nicht eine ganze Zahl sein kann. Es kann aber auch keine gebrochene Zahl sein. Der Beweis dafür ist zwar ein wenig schwierig für den Obertertianer, aber für alles andere sehr wichtig: Es sei $\sqrt{a} = \frac{m}{n}$. Dabei sei der Bruch so weit gekürzt, daß Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Faktor mehr haben. Soll die Gleichung richtig sein, so muß nach der Definitionsgleichung der Wurzeln $a = \frac{m^2}{n^2}$ sein. Links steht eine ganze Zahl. Rechts steht ein Bruch, denn es ist nicht möglich, den Ausdruck zu kürzen, da ja m und n und damit auch die Quadrate dieser Zahlen keinen Teiler gemeinsam haben. Daraus folgt, daß die Annahme, die Quadratwurzel sei gleich einem Bruch, unzulässig war, da sie auf einen Widerspruch führt. Wir haben in diesem Beweisgang den Satz von der Eindeutigkeit der Zerlegung von Zahlen in Primzahlen als dem Schüler selbstverständlich vorausgesetzt; das dürfte kaum einen besonderen Schaden bedeuten.

Wollen wir nun, daß die Wurzeln immer vorhanden sind, so müssen wir neue Zahlen einführen. Wir werden eine neue Erweiterung des Zahlbereiches vornehmen. Man tut gut, hier den Fall des positiven Radikanden von dem Fall des negativen zu trennen. Der Schüler sieht sofort, worin die größere Schwierigkeit im letzteren Falle liegt. Es ist damit noch nicht genug geschehen, daß wir festgestellt

haben: wir müssen neue Zahlen einführen. Es ist ebenso notwendig, nun ein bestimmtes Erzeugungsverfahren für diese Zahlen zu finden und dann, von der Addition beginnend, die Rechenoperationen mit den neuen Zahlen festzulegen.

Der Unterricht pflegt diese Aufgabe anzugreifen, meist ohne sie vollständig zu erledigen. Man beginnt zunächst damit, und diesen Weg sind wir bisher ja schon gegangen, in einem besonderen Falle die neuen Zahlen aufzusuchen: bei der Quadratwurzel. Man beschränkt also fürs erste den Begriff Irrationalzahl[1] auf die nichtausziehbare Quadratwurzel aus einer ganzen, dann ohne irgendwelche Schwierigkeit aus einer rationalen Zahl. Das führt auf eine Zwischenfrage.

Wie zieht man Quadratwurzeln aus? Die Methode besteht darin, daß wir die uns durch das dekadische Zahlsystem nahegelegten Näherungswerte angeben, wobei der Grad der Annäherung beliebig vorgeschrieben sein kann. Hier sind methodische Schwierigkeiten, auf die wir später zurückkommen. Es dürfte sich sehr empfehlen, die Arithmetik an dieser Stelle Hand in Hand mit der Geometrie arbeiten und die mit Zirkel und Lineal konstruierten Quadratwurzeln auf die Zahlengerade eintragen zu lassen.

Wir setzen jetzt also voraus, der Schüler kann die Quadratwurzel aus einer vorgelegten positiven rationalen Zahl rechnerisch — vielleicht auch graphisch — ausziehen. Dann stehen wir nun vor der weiteren Frage: haben wir den Begriff Irrationalzahl schon ganz ausgeschöpft? Es liegt nahe, zunächst auch die anderen Wurzeln, also die $n$ten Wurzeln (wo n eine positive ganze Zahl ist) aus einer rationalen Zahl als Irrationalzahlen anzusprechen, soweit sie nicht rational werden. Das tut man nicht. Man läßt die Fälle weg, in denen bei geradem Exponenten der Radikand negativ ist. Warum, werden wir noch sehen. Wieder entsteht die Aufgabe, wie kann ich solche Irrationalzahlen rechnerisch, wie kann ich sie graphisch darstellen. Man muß in der Schule zeigen, daß die Zahlen mit vorgeschriebener Genauigkeit berechnet werden können. Es ist nicht nötig, ja sicher eine Zeitvergeudung, auch für das Ausziehen der Kubikwurzeln und der höheren Wurzeln Methoden wie für die Quadratwurzel zu entwickeln, wir lernen ja später Mittel und Wege, derartige Aufgaben mit den Logarithmen oder mit Reihenentwicklungen viel schneller zu erledigen. Notwendig aber ist schon hier der Nachweis, daß die Feststellung von Näherungswerten überhaupt möglich ist. Das läßt sich leicht zeigen, man braucht z. B. nur ein systematisches Probieren anzufangen, mit dem eine Dezimalstelle nach der anderen gewonnen wird. Das ist langweilig, aber meiner Meinung nach nicht zu vermeiden. Übrigens begreift der Schüler sehr schnell das Verfahren, und damit ist fürs erste alles gewonnen. Die für die graphische Darstellung in Betracht kommende Tatsache, daß eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal in euklidischer Weise nicht möglich ist, kann an dieser Stelle noch nicht zur Sprache kommen.

Hier ist also mit dem, was über den Begriff der Irrationalzahl in den Mittelklassen zu sagen ist, abzubrechen. Höchstens einen Schritt wird man noch weitergehen. Rechnet man zu den Irrationalzahlen auch diejenigen Zahlen, die Wurzeln aus posi-

[1] An wissenschaftlichen Darstellungen des Begriffes der Irrationalzahl ist kein Mangel; fast jede neuere Einführung in die Analysis schickt ein Kapitel über den Begriff der reellen Zahl voraus. Als Einzeldarstellung nenne ich O. Perron, Irrationalzahlen, Berlin (Vereinig. wiss. Verleg.) 1921.

tiven Irrationalzahlen sind? Der Schüler sieht, daß diese Frage in manchen Fällen notwendig, in allen anderen Fällen zweckmäßigerweise bejaht werden muß. Der Schüler nimmt als Gesamteindruck vielleicht den mit, daß es sich bei den Irrationalzahlen immer um unendliche, unperiodische Dezimalbrüche handelt.

Die Oberklassen nehmen nur in verhältnismäßig seltenen Fällen Gelegenheit, diesen Begriff der Irrationalzahl[1] noch einmal zum Gegenstand ausführlicherer Untersuchung zu machen. In einigen ganz wenigen Schulen versucht man wohl, eine der Theorien der Irrationalzahl zu behandeln, etwa den Dedekindschen Schnitt oder die Intervallschachtelung. Wernicke hat in seiner IMUK-Abhandlung[2] darüber berichtet, wie er es in einer Oberrealschule macht; es ist mir nicht bekannt, welche Erfahrungen er damit im Unterricht gemacht hat. Ob die Darstellung, die Max Simon in seiner Methodik der Arithmetik gibt, auf dem Boden der Schulerfahrung erwachsen ist, weiß ich nicht anzugeben. Beispiele einer strengeren Fassung des Begriffes auf der Schule geben Dintzl und Vaselli[3], auch einen Aufsatz von Loewy[4] möchte ich noch nennen.

Häufiger begnügt man sich damit, das Problem aufzurollen, ob denn nun mit den bisher aufgedeckten Irrationalzahlen dieser Begriff erschöpft ist. Man beantwortet diese Frage, indem man von den einfachen Wurzeln zum allgemeineren Begriff der algebraischen Irrationalzahlen übergeht. Man zeigt zunächst, daß man auf irrationale Zahlen auch kommt, wenn man aus einer oder aus mehreren der bisher benutzten Irrationalzahlen dadurch, daß man irgendwelche Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen, Potenzierungen und Radizierungen (diese letzteren jedoch unter der Annahme, daß der Radikand nicht negativ wird) ausübt, neue Zahlen bildet. Vorausgesetzt ist dabei bereits, daß man diese Rechenoperationen für Irrationalzahlen definiert hat. Es ergibt sich, daß alle solche Zahlen sich als Wurzeln von Gleichungen der Form

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

darstellen lassen, wo die $a_0, a_1, \ldots$ ganze Zahlen sind. Alles das kann in der Schule noch festgestellt werden. Vor der Untersuchung der Umkehrung dieses Satzes jedoch wird die Schule halt machen. Die Tatsache, daß die Wurzel einer beliebigen Gleichung der obengenannten Form sich durchaus nicht immer als ein endliches Aggregat aus Wurzeln darstellen läßt, kann nur historisch mitgeteilt werden[5]. Wieder aber kann man Näherungsmethoden entwickeln, die dem Schüler zeigen, daß sich solche Zahlen, die wir jetzt algebraische Irrationalitäten nennen —

[1] Eine vergleichende Darstellung der Theorien von Dedekind, Cantor und Weierstraß gibt C. Brandenberger, Die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen, Schweizerische Pädagogische Zeitschrift **13** (1903) S. 188ff.

[2] A. Wernicke, Mathematik und philosophische Propädeutik (Deutsche IMUK-Abh. III, 7). Leipzig, Teubner, 1912.

[3] E. Dintzl und Vaselli, Aufgaben aus der reinen und angewandten Mathematik, 1. Bd., Wien (Gerold) 1922.

[4] A. Loewy, Zur elementaren Behandlung von Exponentialfunktion und Logarithmus, ZmnU **50** (1919) S. 330ff.

[5] Sehr unangenehm macht sich an dieser Stelle die doppelte Bedeutung des Begriffes „Wurzel" bemerkbar; wir haben es einmal mit der Radizierung, das andere Mal mit der Gleichungslehre zu tun.

vorausgesetzt, daß sie überhaupt reell sind —, mit vorgeschriebener Genauigkeit als unendliche Dezimalbrüche bestimmen lassen. Die Gleichungslehre entwickelt solche Methoden.

Die neue Frage ist die, haben wir nun endlich alle Irrationalzahlen? Die Antwort lautet abermals nein. Wieder müssen wir den Nachweis, daß es nichtalgebraische, sog. transzendente Irrationalitäten gibt, schuldig bleiben[1], so wichtig auch das Problem der Transzendenz von e und π ist.[2] Es geht im allgemeinen über das Verständnis der Schule hinaus.

Es blieb in unserer Liste dessen, was die Schule bringen kann, und dessen, was sie überschlagen muß, noch eine Lücke. Wie stellt man sich zu den Rechenoperationen mit Irrationalzahlen? Diese Frage läßt sich für die Schule erschöpfend dahin beantworten, daß man die Näherungswerte, die sich bei Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Irrationalzahlen ergeben, dadurch findet, daß man mit den Näherungswerten der Irrationalzahlen rechnet. Da man die Genauigkeit so weit treiben kann, wie man will, entstehen keine Schwierigkeiten. (Es handelt sich hier um die Sätze $\lim a + \lim b = \lim (a + b)$ usf., deren Beweis man überschlägt.) Bei der Potenzierung muß man sich zunächst noch auf ganzzahlige Exponenten beschränken, eine irrationale Basis macht aber keine Schwierigkeiten. Ebenso ist es bei der Radizierung, bei der vorderhand nur der Radikand eine (positive) Irrationalzahl sein darf. Übrigens wird es dem Schüler kaum in den Sinn kommen, daß diese Festsetzungen noch nötig sind; er wird einen Ausdruck $\sqrt[n]{a} + \sqrt[m]{b}$ als etwas Selbstverständliches hinnehmen; ein Grund mehr, ausdrücklich auf die Sache aufmerksam zu machen. Das übliche Verfahren der Aufgabensammlungen, das allgemeine Wurzelsymbol einzuführen und nun ausgedehnte Übungen im Rechnen mit diesen Symbolen anzustellen, ehe noch vom Zahlenwert der Wurzeln die Rede ist, scheint mir recht angreifbar.

Überschaut man die Stellung, die heute die höhere Schule zum Begriff des Irrationalen einnimmt, so ist die Tendenz unverkennbar, die Irrationalzahl durch ihre rationalen Näherungswerte zu ersetzen und sie selbst im Hintergrunde verschwinden zu lassen. Man hat gesagt, es sei doch wunderbar, daß gerade die Reform, die die Infinitesimalrechnung wieder in Ansehen brachte, die Irrationalzahl zurückdrängte. Ich finde es nicht so sehr wunderbar. Wir schließen uns in der Funktionslehre ganz und gar an die Anschauung an, und da ist die Tatsache wesentlich, daß die Ebene der rationalen Zahlen dem Auge genau so erscheint wie die Ebene, bei der die Irrationalzahlen hinzugenommen sind.

Wir haben bisher den Fall, daß bei geradem Wurzelexponenten der Radikand negativ ist, außer acht gelassen. Wir wenden uns nun der Untersuchung dieses Problems zu. Man überzeugt sich sofort, daß die durch solche Wurzeln gegebenen Zahlen keinesfalls rational sind. Sie sind aber auch nicht irrational, das Wort im allgemeinsten Sinne genommen. Alle Irrationalzahlen lassen sich als unendliche

[1] Wer in Prima einen Hinweis auf die Mengenlehre gibt, hat allerdings einen solchen Nachweis in dem Satz, daß das Kontinuum im Gegensatz zu den algebraischen Zahlen nicht abzählbar ist, zur Hand.

[2] Von den vielen Darstellungen des Problems sei hier nur genannt: G. Hessenberg, Transzendenz von e und π, Leipzig (Teubner) 1912.

Dezimalbrüche darstellen; wenn wir aber eine solche Zahl in eine gerade Potenz erheben, gleichgültig, ob sie positiv oder negativ ist, immer wird das Ergebnis eine positive Zahl, niemals eine negative. Wir müssen also, sofern wir diese Operationen als möglich zulassen, abermals neue Zahlen einführen.

Wieder beschränkt man sich bei der Einführung der neuen Zahlen zunächst auf den allereinfachsten Fall, auf Quadratwurzeln. Man zeigt, daß man mit der Einführung einer neuen Einheit, die durch $\sqrt{-1} = i$ bezeichnet wird, auskommt, daß man mit ihrer Hilfe alle imaginären Zahlen darstellen kann. Die Bezugnahme der imaginären Größen mit den bisher bekannten reellen Größen führt zur Bildung der komplexen Zahlen, und es ist die nächste Aufgabe, das Rechnen mit komplexen Zahlen zu besprechen.

Es ist nützlich, diesen Abschnitt mit der formalen Definition zu beginnen, wann man zwei komplexe Zahlen gleichsetzt. Man muß die Notwendigkeit einer solchen Festsetzung, die bei früheren Zahlerweiterungen meist übergangen wird, ins rechte Licht setzen; man kann dabei auf die Brüche zurückgreifen, während die Dinge bei den Irrationalzahlen gewisse Schwierigkeiten haben.

Viele Methodiker empfehlen, sofort von der Veranschaulichung der komplexen Zahlen in der Gaußischen Ebene Gebrauch zu machen. Dadurch werde die Auffassung der weiteren Rechenoperationen mit komplexen Zahlen erleichtert. Eine Tatsache soll sich der Lehrer aber dabei stets vor Augen halten. Wenn die Schüler vorher viel mit graphischen Darstellungen zu tun gehabt haben, so sehen sie oft den Unterschied zwischen der cartesischen x, y-Ebene und der Gaußischen komplexen Ebene nicht deutlich; sie werfen beides durcheinander und zeigen damit, daß sie die ganze Sache nicht verstanden haben. Hier gilt es sorgfältig vorbeugen. Wenn man in den Realanstalten bereits in Obertertia oder Untersekunda im Anschluß an die quadratischen Gleichungen von komplexen Zahlen spricht, so möchte ich raten, auf dieser Stufe die Gaußische Ebene noch nicht heranzuziehen. Es genügt an dieser Stelle vollkommen, wenn die Schüler die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen, die in der Form $a + bi$ auftreten, kennen lernen, um beispielsweise zu sehen, daß die Beziehung zwischen Koeffizienten und Wurzeln quadratischer Gleichungen auch im Falle komplexer Wurzeln erhalten bleibt. Hier schon die Gaußische Ebene heranzubringen, ist vollkommen überflüssig, um so mehr, als ja die Trigonometrie noch nicht zur Verfügung steht.

Manche Methodiker gehen bei der Einführung der komplexen Zahlen nicht von dem besonderen Problem der quadratischen Gleichungen aus. Sie ordnen jedem Punkte der Ebene ein Zahlenpaar zu und kommen so zu den Operationen mit komplexen Zahlen. Der Weg ist sicher gangbar, meiner Ansicht nach aber nur mit Schülern, die erst in Prima an die komplexen Zahlen herantreten. Befürworter eines solchen Verfahrens empfehlen deshalb auch, bei der Behandlung der Gleichungen in den Mittelklassen ganz im Reellen zu bleiben, bei der quadratischen Gleichung also die komplexen Wurzeln als nicht vorhanden anzusehen.

Die Addition und Subtraktion komplexer Größen begegnet keinen Schwierigkeiten. Die Multiplikation und Division führt man am besten erst unter Verwendung der Form $a + bi$ durch, um dann — erst in höheren Klassen — die wesentliche Vereinfachung aufzuweisen, die durch die Einführung der trigonometrischen Form der

komplexen Zahlen gegeben ist. Diese trigonometrische Form erweist sich dann erst recht als praktisch, um die im weiteren zu definierende Potenzierung (Basis komplex, Exponent eine ganze reelle Zahl) und Radizierung (Radikand komplex, Exponent eine ganze reelle Zahl) wirklich praktisch auszuführen.

Wir sind jedoch mit der Ausdehnung der letzten Operation schon einen Schritt zu weit vorwärts gegangen. Wir hatten die komplexen Zahlen zunächst eingeführt als Symbole, die uns die Ausziehung der Quadratwurzeln ermöglichen sollten. Wir können jetzt nachholen, daß wir mit solchen komplexen Zahlen auch beliebige andere gerade Wurzeln aus negativen Radikanden ziehen können. Wir kommen dabei immer wieder auf komplexe Zahlen, eine Einführung neuer Zahlarten ist nicht mehr nötig.

Nun tritt aber eine ganz neue Seite des Problems in die Erscheinung. Es ergibt sich, daß die Operation des Wurzelausziehens, wenn man auch alle möglichen komplexen Werte mit berücksichtigt, mehrdeutig ist. Hatten wir früher schon bemerkt, daß gerade Wurzeln aus positiven Zahlen zweideutig sind, so nimmt jetzt diese Tatsache ein ganz anderes Gesicht an. Wir finden, daß die $n$te Wurzel aus einer positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen, reellen oder komplexen Zahl im Bereiche der komplexen Zahlen n-deutig ist.

Wir rekapitulieren, welche Operationen mit den bisher als allgemeinsten Zahlen gefundenen komplexen Zahlen ausführbar sind: Die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zweier komplexer Zahlen ist stets eindeutig ausführbar und führt immer wieder auf komplexe Zahlen. Die Potenzierung ist definiert für den Fall einer komplexen Basis und eines ganzzahligen Exponenten, sie ist dann immer eindeutig ausführbar und führt wieder auf komplexe Zahlen. Die Radizierung ist definiert für den Fail einer komplexen Basis und eines ganzzahligen Exponenten, sie ist dann immer ausführbar, die Operation ist mehrdeutig. — Man kann nun noch einen kleinen Schritt weitergehen.

Doch vorher noch eine Bemerkung über den Gang, den der Unterricht zu nehmen pflegt. Wir können in der Obertertia oder Untersekunda, wenn wir mit den Wurzeln rechnen, nicht die Rechenarten für den allgemeinen Irrationalbegriff definieren. Wir wollen außerdem mit unseren Symbolen rechnen, nicht mit den für jeden besonderen Fall ausgerechneten Näherungswerten, sondern mit unseren Wurzelausdrücken. Diesem Wurzelrechnen wird im Unterricht eine umfangreiche Übungszeit zugestanden. Man legt der Rechnung gewisse Gesetze zugrunde, die von der Tatsache aus, daß die Radizierung die Umkehrung der Potenzierung ist, beweisbar sind. So spricht man Gesetze für das Produkt und für den Quotienten zweier Wurzeln mit gleichem Exponenten aus, für die Potenz einer Wurzel, zeigt, wie man Wurzeln mit verschiedenem Exponenten multipliziert u. dgl. Diese Gesetze zeigen in der Weise vollkommene Übereinstimmung mit den Potenzgesetzen, daß es leicht ist, durch die Definition $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ den Begriff der Potenz auszudehnen und die Wurzelregeln als besondere Fälle der für die Potenzen entwickelten Regeln zu erkennen. So ist formal die Begründung gegeben, warum man den Begriff der Potenz mit einer gebrochenen Zahl als Exponent so und nicht anders definiert. Dieser formalen Seite entspricht die anschauliche, wenn man die graphischen Bilder von Kurven der Form

$y = x^n$ betrachtet, bei denen n ganze und gebrochene Werte durchläuft. Wir kommen darauf später zurück.

So ist jetzt der Begriff der Potenz bis hin zu rationalen Exponenten definiert. Eines aber kann dabei nicht klar genug hervorgehoben werden. Mit dem Eintritt der gebrochenen Exponenten tritt sofort die Vieldeutigkeit eines Ausdrucks $a^{\frac{m}{n}}$ auf den Plan, wenn nicht ausdrücklich genau so wie beim Wurzelsymbol festgelegt wird, daß von den vorhandenen Werten, deren Anzahl n ist, allein der Hauptwert mit der durch Basis und gebrochenen Exponenten angegebenen Zahl gemeint ist.

Es drängt sich nun naturgemäß die Frage auf: Wie müssen wir weitergehen, wie haben wir, immer dem Permanenzgesetz folgend, Potenzen mit komplexen Exponenten zu definieren? Können wir auch in dem Ausdruck $\sqrt[a]{b}$ der Zahl a ebenso wie b einen komplexen Wert beilegen?

Zuvor aber noch einige methodische Fragen, zunächst zum Quadratwurzelziehen. Es ist eine gar nicht wegzuleugnende Tatsache, daß der Wurzelalgorithmus den Schülern schwer fällt, er wird schwer begriffen und schwer behalten. Ich habe es erlebt, daß ein Kollege deshalb das Quadratwurzelziehen einfach ausließ. Später mit den Logarithmen ginge es ja doch einfacher; warum den Schülern mit Dingen den Kopf füllen, die doch ein Jahr später überflüssig werden. Es steckt ein wahrer Kern in diesem Vorgehen. Wir entwickeln auch nicht einen Algorithmus zur Berechnung der Logarithmen und lassen nun jeden in Untersekunda gebrauchten Logarithmus danach ausrechnen. Warum benutzen wir nicht, wie es jedenfalls an Volksschulen empfehlenswert sein möchte, ausschließlich Tabellen der Quadratwurzeln, meinetwegen auch, wenn wir noch praktischer sein wollen, den Rechenstab? Kubikwurzeln nach dem analogen Algorithmus auszurechnen, fällt uns ja auch nicht ein — und mit Recht.

Wenn wir das Quadratwurzelziehen dennoch beibehalten, so können wir das nicht damit begründen, daß wir die Quadratwurzeln brauchen, sondern damit, daß bei der Ableitung des Algorithmus irgendwelche wesentlichen mathematischen Gedanken zur Anwendung kommen. Und ich glaube in der Tat, daß das der Fall ist. Die Quadratwurzeln sind die ersten Zahlen, von den periodischen Dezimalbrüchen abgesehen, bei deren vollständiger Bestimmung im Dezimalsystem man nicht mit einer endlichen Anzahl von Operationen auskommt. Der Begriff Näherungswert, der später bei allen numerischen Rechnungen, ebenso wie vielleicht früher schon bei praktischen Anwendungen eine beherrschende Rolle spielt, kann hier den Schülern recht deutlich gemacht werden; bei den periodischen Dezimalbrüchen hat der Schüler viel eher das Gefühl, daß er eigentlich die genaue Zahl vor Augen hat. Es wird sich bei der Ableitung des Wurzelalgorithmus darum handeln, diesen Gesichtspunkt recht scharf im Auge zu behalten. Daß man von einem Näherungswert durch Anbringung einer Korrektur, die man auf rechnerischem Wege erhält, zu einem schärferen Näherungswert kommt usf., ist ein allgemeiner, z. B. bei der numerischen Bestimmung der Wurzeln von Gleichungen wiederkehrender Gedanke. Andere Algorithmen für die Quadratwurzel zu entwickeln, etwa die Kettenbruchdarstellung, ist in der Schule nicht üblich.

Der Algorithmus selbst ist durch Umkehrung der Formeln für $(a+b)^2$, $(a+b+c)^2$ usf. zu gewinnen, wobei dann einzelne Glieder in geeigneter Weise zusammenzuziehen sind. Es wäre vom methodischen Gesichtspunkte aus eine Unterlassungssünde, wollte man sich, nachdem erst einmal der Algorithmus entwickelt, die wesentlichen Vereinfachungen entgehen lassen, die durch Benutzung der abgekürzten Dezimalbruchrechnung erzielt werden können.

Die Einübung der Wurzelgesetze erfolgt an zahlreichen Beispielen ohne allzu große Häufung von Schwierigkeiten, die in der späteren Arithmetik und Algebra doch nicht vorkommen. Als das wichtigste Anwendungsgebiet ist zunächst die Geometrie, besonders die Flächenlehre, nachher die Gleichungslehre zu betrachten (vgl. das nächste Kapitel).

Ganz allgemein ist zu dem in diesem Abschnitt Ausgeführten zu bemerken, daß der logische Zusammenhang in den Mittelklassen noch nicht so deutlich hervortreten kann und soll, wie es hier dargestellt wurde, wohl aber in den Oberklassen, zumal bei der durch die Lehrpläne vorgeschriebenen Wiederholung des Aufbaues des Zahlsystems von den positiven ganzen bis zu den komplexen Zahlen. Man tut gut, diesen abstrakten Erörterungen etwas Farbe zu geben durch Trugschlüsse u. dgl. Wo steckt der Fehler, wenn man bei der Multiplikation $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$ einmal $\sqrt{(-a)\cdot(-b)}=\sqrt{ab}$, das andere Mal $i\sqrt{a}\cdot i\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ erhält? Was ist falsch, wenn man von der auf π folgenden Zahl spricht? usf.

7. Das Logarithmieren.

Die zweite Umkehrung des Potenzierens ist das Logarithmieren. Wenn in $a^x=b$ der Exponent x gesucht wird, so kann man das auch so schreiben: es ist $x={}^a\log b$. Bislang war eine vollständige Einigkeit über die Schreibweise noch nicht zu erzielen. Das Symbol log nimmt man jetzt wohl ziemlich allgemein an, denn das kürzere lg, erst recht l, ist zu leicht mit einem Faktor zu verwechseln, und andere Symbole, wie etwa ein umgekehrtes Wurzelzeichen, werden nur von einigen wenigen Autoren benutzt. Aber die Stelle, wo die Basis hinzuschreiben ist, wechselt bei den verschiedenen Mathematikern außerordentlich; es sind so ziemlich alle Möglichkeiten vertreten.[1] Ich schließe mich hier der vom Deutschen Ausschuß angenommenen Schreibweise an, die die von manchen benutzten Klammern vermeidet und für Druck und Schrift gleich einfach ist. Die Basis 10 läßt man weg, für die natürlichen Logarithmen hat man die Bezeichnung log nat, wenn mit ihnen nur wenig gerechnet wird; benutzt man sie viel, so kürzt man auch mit ln ab.

Unsere Definition der Logarithmen hat zunächst nur einen Sinn, wenn x eine rationale Zahl ist. Für andere Exponenten war die Potenz bisher noch nicht definiert. Es muß auch ausdrücklich bemerkt werden, daß dabei die Potenz nur den Hauptwert bezeichnet. Auf die naheliegende Frage, ob nicht auch mit den Nebenwerten etwas anzufangen ist, komme ich später zurück, wenn wir das Hilfsmittel der graphischen Darstellung zur Hand haben. Wenn wir jetzt den Sprung von ratio-

[1] Vgl. hierzu die Artikel von Kullrich und Schülke in den Ubl 14 (1908), S. 129 und 15 (1909), S. 35.

nalen zu irrationalen Potenzexponenten machen, so wäre zunächst einmal nachzuweisen, daß der Näherungswert für eine Potenz mit irrationalem Exponenten dadurch erhalten wird, daß man die Näherungswerte für den Exponenten benutzt. Es ist also, wenn ich das mit den Zeichen der Analysis schreibe, der Satz $\lim (a^n) = a^{\lim n}$ zu erläutern — oder als selbstverständlich anzunehmen. Das mag noch hingehen. Man muß aber überdies Vorsicht walten lassen hinsichtlich der Wahl der Basis. Ist sie positiv, so ist alles gut. Ist sie aber negativ, so ist die Angabe eines reellen Hauptwertes durchaus nicht immer möglich. So ist also die Umkehrung der Potenzierung durch die Logarithmierung nur unter einschränkenden Bedingungen möglich: wir müssen uns auf den Hauptwert beschränken und weiter voraussetzen, daß die Basis eine reelle, positive Zahl ist. Dann haben wir jetzt den Logarithmus eindeutig definiert für jede positive reelle Basis und jeden positiven reellen Logarithmanden oder Numerus. Denn der Fall, daß wir bei positiver Basis einen negativen Logarithmanden erhalten, ist ja, weil wir uns auf die Hauptwerte beschränkt haben, ausgeschlossen.

Diese Beschränkung hat unverkennbar etwas Gezwungenes, um so mehr, als man gelegentlich ohne diese Beschränkungen weiterzukommen scheint. Da $(-2)^3 = -8$ ist, so würde sich auf Grund der Umkehrdefinition glatt ergeben ${}^{-2}\log(-8) = 3$. Da haben wir also negative Basis, negativen Logarithmanden, und es kommt sogar eine reelle positive Zahl als Logarithmus heraus. In der Tat haben solche Beispiele seinerzeit viel Staub aufgewirbelt.

Die Frage liegt also auf der Hand, warum die Einschränkungen, die wir machten, notwendig sind, was der tiefere Grund dafür ist. Er ist darin zu suchen, daß erst mit der Hinzunahme der komplexen Zahlen eine vollständige Beherrschung der Zahlen mit den sieben Rechenoperationen möglich ist, daß erst im Bereiche der komplexen Zahlen bei geeigneter Definition der Rechenoperationen jede Operation, auf Zahlen des Gebietes ausgeübt, wieder auf Zahlen des Gebietes führt. Nun war aber die Operation des Wurzelausziehens, wenn man sich auf komplexe Werte mit bezieht, mehrdeutig, ebenso ist es, und das wird in den Realanstalten in der Analysis auch zum Ausdruck gebracht, wenn man komplexe Exponenten zuläßt, bei der Potenz und natürlich auch beim Logarithmus. Das Bild, das wir damit erhalten, läßt sich also etwa so kennzeichnen: Aus dem vollständigen Zusammenhang der Dinge greifen wir als Schuldarstellung nur einen Ausschnitt heraus. In diesem Ausschnitt erscheint bei der Potenz und bei dem Logarithmus eine Eindeutigkeit, die nicht da ist für den, der den ganzen Bereich beherrscht. Die Schule ist zu dieser Vereinfachung gezwungen, weil das vollständige, die unendliche Vieldeutigkeit der Operationen zeigende Bild für den Schüler der Mittelklassen und wohl auch der Oberklassen nicht verständlich wäre.

Man wird unter diesen Umständen Versuche begreiflich finden, auf einem anderen, natürlicheren Wege an die solchergestalt eingeschränkten Logarithmen heranzukommen. Die eine Möglichkeit ist die, den Weg der geschichtlichen Entwicklung zu gehen und auf die Logarithmen durch Vergleich von arithmetischen und geometrischen Reihen zu kommen. Eine andere Möglichkeit bietet die Integralrechnung bei der Integration der gleichseitigen Hyperbel. Der erste Weg ist mehrfach in Vorschlag gebracht worden, sehr selten aber wird in den Lehrbüchern auch nur nach

träglich auf diese Möglichkeit hingewiesen. Der andere Weg hat in letzter Zeit mancherlei Erörterungen ausgelöst, nachdem F. Klein ihn neuerdings zur Diskussion gestellt hatte. Er ist z. B. von französischen Lehrbüchern[1], aber auch schon früher in Deutschland mehr als Übung denn als Einführung der Logarithmen von Holzmüller berücksichtigt worden. Bisher ist es aber auch dieser Methode nicht gelungen, im Unterricht Fuß zu fassen. Man muß sich darüber klar werden, daß in beiden Fällen ganz wesentliche Verschiebungen im Stoffplan nötig werden. Man müßte im ersten Falle die arithmetischen und geometrischen Reihen entgegen dem jetzt allgemein herrschenden Gebrauch vor den Logarithmen behandeln oder vielmehr mit ihnen verbinden, denn die Anwendungen der geometrischen Reihen erfordern die Logarithmen. Im anderen Falle müßte man sogar die Logarithmen hinter die Integralrechnung setzen. Beides wird sehr großen Schwierigkeiten begegnen. Ich glaube aber, daß auch, ganz abgesehen von einer solchen Pensenänderung, kaum Stimmung dafür vorhanden sein wird, auf das Permanenzprinzip an dieser Stelle zu verzichten. Benutzt man das Permanenzprinzip überhaupt im Unterricht, so drängt es sich an dieser Stelle förmlich auf. Der Schüler würde es wunderlich finden, wenn man hier auf seine Ausnutzung verzichten wollte. Ein Vorschlag aber, das Permanenzgesetz ganz fallen zu lassen, würde heute durchweg auf Widerspruch stoßen. Es kommt hinzu, daß sich zwar der Lehrer vielleicht bei der unvollständigen Darstellung unbehaglich fühlen mag, daß aber der Schüler der Mittelklassen ein solches Feingefühl noch nicht hat. Ich glaube, daß ihm der Gedanke an Einzelfälle, in denen auch auf Grund der Umkehrungsdefinition Logarithmen von negativen Zahlen vorhanden zu sein scheinen, noch keine Schwierigkeiten macht. Und wenn später in der Prima derartige Fragen auftauchen sollten, dann ist es immer noch an der Zeit, jetzt die Integraldefinition an die Stelle der Umkehrdefinition zu setzen und erneut auf die Sache einzugehen.[2] So wie die Dinge heute liegen, haben wir uns noch nicht so von den Logarithmen emanzipiert, daß wir auf ihre Benutzung schon in den Mittelklassen verzichten möchten. Dann bleibt aber nur die heute in Schulen übliche Einführung übrig.

Wenn der Schüler mit dem Begriff des Logarithmus vertraut gemacht werden soll, so wird man sich zunächst an solche einfachen Beispiele halten, in denen sich als Logarithmen ganze oder gebrochene Zahlen ergeben. Dann aber entsteht die Aufgabe, auch von anderen Zahlen die Logarithmen anzugeben. Man beginnt am besten damit, bei konstant gehaltener Basis die Änderung des Logarithmus bei sich änderndem Numerus zu untersuchen. Es ist nicht nötig, das für allzu viele Basiszahlen durchzuführen. Es genügt der Verlauf bei einer positiven Zahl kleiner als 1, bei der Zahl 1, bei der Zahl 2, vielleicht auch 3, dann schließlich bei 10. Dann läßt sich bereits der Einfluß der Basis auf die Reihe der zugehörigen Logarithmen übersehen. Man kann später darauf fußen, wenn man die Frage beantwortet, warum

[1] J. Tannery, Elemente der Mathematik, deutsch von P. Klaeß, Leipzig (Teubner) 1909.

[2] Vgl. dazu: C. Frenzel, Zur Kleinschen Einführung in die Lehre von den Logarithmen, ZmnU **44** (1913) S. 1; C. F. B. Funck, Die Kleinsche Einführung des Logarithmus, ebenda **44** (1913), S. 463ff.; K. Rieder, Zur Einführung des Logarithmus im Kleinschen Sinne, ebenda **47** (1916), S. 168ff.

man beim üblichen Logarithmensystem keinen echten Bruch als Basis wählt, und warum man von ganzen Zahlen wieder die 10 allen anderen vorzieht.

Es handele sich um die Basis 2. Dann stellt man zunächst eine Liste der ganzzahligen Logarithmen auf. Zur Veranschaulichung nimmt man die graphische Darstellung zur Hilfe. Von den Zwischenwerten kann man nun beliebig viele wirklich rechnerisch bestimmen, indem man z. B. die achten oder die sechzehnten Wurzeln aus 2, 4, 8, 16 usf. ausrechnet. Das ist durch mehrfaches Ausziehen der Quadratwurzel numerisch schnell möglich. Es gelingt auf diese Weise, den Verlauf der logarithmischen Funktion genügend genau festzulegen. Freilich erhält man nur die Logarithmen von irrationalen Zahlen. Sind die Schüler bereits mit dem Funktionsbegriff näher vertraut, so wird es für sie nichts Neues bedeuten, nun irgendwelche Zwischenwerte durch Interpolation — am einfachsten unmittelbar an der Kurve — zu finden; daß man dabei Stetigkeit und monotones Steigen als Selbstverständlichkeit voraussetzt, sei nebenbei bemerkt. Erst jetzt, nachdem man die Schüler von der Möglichkeit der Berechnung der Logarithmen in beliebiger Annäherung überzeugt hat, sollte man auch die Logarithmentafel heranziehen.

Die hier geschilderte, natürlich auch für die Basis 10 durchzuführende Festlegung der logarithmischen Funktion halte ich für den besten Weg, der Forderung gerecht zu werden, daß die Schüler die Logarithmen nicht ohne weiteres als etwas Gegebenes aus der Tafel hinnehmen, sondern daß sie doch wenigstens die Möglichkeit einer Berechnung, einer Kontrolle sehen. — Es ist eigentümlich, daß man an dieser Forderung vielfach vorbeigegangen ist. Im Ausland ist man vielfach noch heute weit entfernt, die Frage überhaupt aufzuwerfen. In Deutschland sind dagegen mehrere Methoden erdacht worden, die Forderung in elementarer Weise zu erfüllen auch ohne die eben empfohlene Heranziehung der graphischen Darstellung.[1] In der Tat, der Einwand, den man häufiger hört, bei der wirklichen Berechnung der Logarithmen gehe man ja doch andere Wege, ist ganz und gar nicht stichhaltig. Man berechnet auch nicht π in der Wissenschaft so, wie es seinerzeit Archimedes und wie wir heute es in der Obertertia machen; aber doch wird es keinem einfallen, darum diese ältere elementare Form der Berechnung aus dem Unterrichte der Mittelklassen zu verbannen. Wir müssen an der Stelle, wo wir die Größe π einführen, zeigen, daß sie kein Schemen ist, daß man sie tatsächlich berechnen kann. Auch bei den Quadratwurzeln genügt uns nicht der Existenzbeweis, wir wollen vielmehr die Mög-

[1] Sehr gebräuchlich ist das Longsche Verfahren, das sich z. B. in den Bardeyschen Aufgabensammlungen findet. Ein anderes Verfahren gewinnt Grenzen für die Logarithmen der Zahlen dadurch, daß in dem Ansatz $10^x = a$, wo a die Zahl ist, deren Logarithmus gesucht wird, fortwährend quadriert wird und daß dann die Stellenzahl des Ergebnisses benutzt wird. Besondere Methoden geben: H. Schubert, Elementare Berechnung der Logarithmen, Leipzig (Göschen) 1903, dass. in der ZmnU **34** (1903) S. 497ff., 551ff., **35** (1904) S. 273ff. Auch ein Abschnitt in desselben Autors „Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis", 3 Bände, Leipzig (Göschen) 1905/06 handelt davon. Ferner ist zu nennen: A. Schmidt, Beiträge zum mathematischen Unterricht I: Die Berechnung der Logarithmen in Untersekunda. Progr. Prinz Heinrichs-Gymnasium, Schöneberg, 1905 (zwar vom Verf. im Unterricht erprobt, aber recht langwierig). G. Mohrmann, Eine neue Art der Einführung der Untersekundaner in die Logarithmenlehre. Progr. Oberrealschule Barmen, 1902.

lichkeit der Ausrechnung sehen. Es wäre unpädagogisch, dieses Verlangen des Schülers bei den Logarithmen zu übersehen.

Es gibt meines Erachtens keine bessere Art und Weise, die Schüler mit dem Wesen der Logarithmen vertraut zu machen — ehe man noch an das eigentliche Rechnen mit ihnen und an die Verwendung der Tafeln herangeht — als ihnen zu zeigen, wie man, um es drastisch zu sagen, mit ihnen die größten Zahlen zu meistern imstande ist. Man trägt die Zahlen, die man ihrer Größe nach miteinander vergleichen will, etwa die Längen der verschiedenen Ätherwellen oder die verschiedenen Geschwindigkeiten von derjenigen einer Schnecke bis hin zu der des Lichtes in eine logarithmische Skala ein. Beispiele dazu findet man in meiner neuen Bardey-Bearbeitung, physikalische auch in F. Auerbach, Physik in graphischen Darstellungen, Leipzig (Teubner) 1912.

Ich will bei dieser Gelegenheit eine Ausnützung logarithmischer Skalen in der Physik doch kurz erwähnen, weil sie gelegentlich wohl auch im mathematischen Unterricht ihre Stelle haben mag. Liegt eine Beobachtungsreihe vor, die die Abhängigkeit einer Größe von einer anderen, etwa der Pendellänge von der Schwingungszeit, empirisch wiedergibt, so tut man oft gut, um hinter das mathematische Gesetz der Abhängigkeit zu kommen, nicht die Werte selbst, sondern ihre Logarithmen in eine graphische Darstellung einzutragen. Die so entstehende graphische Darstellung liefert, wenn die Abhängigkeit durch $y = x^n$ gegeben ist, eine Gerade, durch deren Neigungswinkel die Größe n bestimmt ist. $n = 2$ oder $n = \frac{1}{2}$ ist sofort von der Figur abzulesen. Man kann die Methode noch vereinfachen, wenn man von vornherein logarithmisches Papier nimmt; dann braucht man die Logarithmen nicht erst besonders aufzusuchen.[1]

Für das praktische Rechnen mit Logarithmen kommen zwei Hilfsmittel in Betracht, die Logarithmentafel und der Rechenstab. Bei der Wahl der Logarithmentafel spielt eine ausschlaggebende Rolle die Frage nach der Stellenzahl. Die Zeiten liegen gar nicht so lange hinter uns, wo an einer großen Anzahl von Anstalten siebenstellige Tafeln benutzt wurden. Und hätte nicht eine Verfügung in den neunziger Jahren ein ausdrückliches Verbot gebracht, wir hätten sie sicher auch heute noch an einzelnen ganz konservativen Schulen. Statt der siebenstelligen Tafeln hielten dafür neben den immer schon vorhandenen fünfstelligen die vierstelligen ihren Einzug. Der erste, der es gewagt hat, vierstellige Logarithmen zu benutzen, war der um den mathematischen Unterricht hochverdiente Wiesbadener Schulmann Johann Heinrich Traugott Müller. Seine vierstelligen Tafeln von 1860 erscheinen als weißer Rabe unter all den anderen fünf- und siebenstelligen. Ein Schüler Traugott Müllers, C. H. Müller, hat dann durch eine Abhandlung in den „Berichten des freien Deutschen Hochstiftes zu Frankfurt a. M." 1890, S. 132, die in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (**24**, 1893, S. 173ff.) abgedruckt wurde, die Aufmerksamkeit erneut auf diese Tatsache gelenkt. Darauf ist, soviel ich weiß, erst Rohrbach, dann Schülke der Anregung gefolgt.

[1] Vgl. P. Luckey, Die Auffindung gewisser Gesetze nach graphischer Methode und die Verwendung des logarithmischen Koordinatenpapiers, ZmnU **45** (1914), S. 28ff.

Die Tafeln dieser beiden Autoren werden noch heute am meisten von allen benutzt, und ihre Verbreitung wächst andauernd.

Auch wir müssen uns nun wohl hier entscheiden, welche Art der Logarithmen wir für die zweckmäßigere halten. Aus allem, was wir über den Zweck der Mathematik gesagt haben, wird hervorgehen, daß wir unsere Entscheidung dadurch bestimmt sein lassen, wie die praktische Mathematik sich zu der Frage stellt. Denn daß etwa ein besonderer formaler Wert darin liegt, die Genauigkeit einer Rechnung über ihre Verwertbarkeit hinaus zu treiben, wird niemand annehmen. Auch der wohl einer Art Hochachtung vor der Mathematik entsprungene Genauigkeitsfanatismus, dem wir bei manchen, und oft nicht den schlechtesten Mathematikern begegnen — ich erinnere nur daran, daß Schellbach die Polhöhe des Pfeilers seines Schulobservatoriums zu 52° 30′ 28″, 36.. bestimmen ließ: „Diese Zahlen mußten wir Primaner im Kopfe haben", erzählt Felix Müller — wird uns nicht umstimmen können. Nun ist es aber eine Tatsache, die von Schülke und anderen an den mannigfaltigsten Beispielen gezeigt worden ist, daß wir im allgemeinen mit vierstelligem Rechnen vollauf auskommen. Also kann und soll man auch in der Schule sich damit begnügen.

Fig. 68. Rechenschieber. Billiger Schulapparat der Firma A. Nestler, Lahr (Baden).

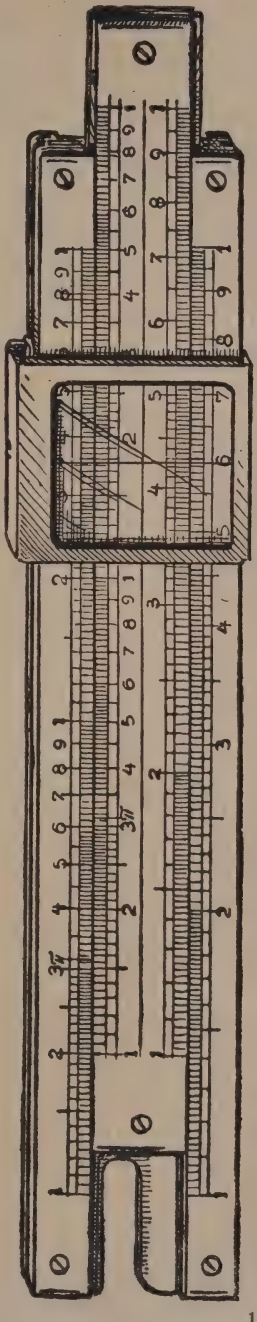


Fig. 69. Rechenschieber. Ausführung der Firma F. E. Hertel & Co., Neu-Coswig-Dresden.

Ich will nur ein paar krasse Beispiele herausgreifen; ich wähle Anwendungen aus der Trigonometrie. Wenn man den Kurs von Schiffen berechnet, so ist die Angabe der Sekunden bei der Richtungsangabe vollkommen illusorisch.

Auf dem Kompaß kann man schon die Minuten nicht mehr ablesen. Entnimmt man einer Tafel den für den Mittag berechneten Wert der Sonnendeklination, so kann man nicht auf Zehntel Sekunden genaue Werte erhalten, wenn man diesen Wert etwa für eine Beobachtung am Abend oder am Morgen zugrunde legt. Polhöhenwerte, wie der eben von Schellbach angegebene, haben gar keinen Wert, man denke nur an die Polschwankungen. Solcher Beispiele gibt es unzählige.

Freilich muß vor einem gewarnt werden. Wenn die Schüler immer wieder hören, daß die letzten Stellen unsicher sind, so neigen sie dazu, entweder gar nicht oder ungenau zu interpolieren. Dem ist entgegenzutreten. Es soll, wenn vierstellig gerechnet wird, auch alles ausgenutzt werden, was die Tafeln hergeben. Und ganz ebenso, wenn wir nun einmal an einer Schule fünfstellig rechnen. Dann soll nicht etwa der Gedanke an die Unsicherheit der letzten Stelle zu einer Laxheit in der genauen Durchführung der Rechnung führen. Was wir wollen, ist, daß der Schüler sich kritisch zu der von ihm errechneten Genauigkeit stellt, nicht aber, daß er gleichgültig gegen die genaue Durchführung der Rechnung wird.

Manche Tafeln bringen jetzt auch in handlicher Form dreistellige Logarithmen. Ich halte das für entbehrlich; man kann bei dreistelligem Rechnen ohne Mehrarbeit die Rechnung wirklich abgekürzt durchführen, oder aber man benutze den Rechenstab.

Auf die Verwendung des Rechenschiebers im Unterricht hat meines Wissens zuerst von der Heiden hingewiesen.[1] Der Aufsatz von 1872 blieb aber ohne Wirkung und ist noch einmal, 1896, wieder in der gleichen Zeitschrift abgedruckt worden. Wenn heute das Urteil sich geändert hat, so ist das in der weiten Verbreitung des Rechenstabes in der Praxis und in der Annäherung der Schulmathematik an die Mathematik des tätigen Lebens begründet. Den Anstoß gaben insbesondere die Hinweise von C. H. Müller, dessen Hauptabhandlung 1899 erschien.[2] Verdienstlich waren weiter die Besprechungen des Rechenstabes in verschiedenen Unterrichtswerken und seine Berücksichtigung in Aufgabensammlungen, schließlich der Umstand, daß vor dem Kriege verhältnismäßig billige und doch brauchbare Rechenstäbe, neben einfachen Pappmodellen, in den Handel gebracht wurden.[3] Heute wird die Behandlung in einzelnen Staaten durch die Lehrpläne für die Realanstalten verbindlich gemacht; allerdings sind die hohen Preise einer allgemeinen Verwendung recht hinderlich.

Es ist ein leichtes, den Schüler in die Theorie des Rechenstabes einzuführen. Wenn er die logarithmische Kurve auf die y-Achse projiziert, erhält er die loga-

[1] Von der Heiden, Das Rechenlineal, ZmnU 3 (1872), wieder abgedruckt in 27 (1896), S. 568.

[2] C. H. Müller, In Sachen des Rechenstabes, ZmnU 28 (1897), S. 180; derselbe, Der logarithmische Rechenstab, Frankfurt a. M. (Auffarth) 1899; derselbe, Der logarithmische Rechenstab und die Schule, ZmnU 38 (1907), S. 526.

[3] C. H. Müller hat einen Präzisions-Schulrechenstab bei L. Niethammer in Frankfurt a. M. erscheinen lassen. Andere für Schulen bestimmte Modelle sind z. B. von Gebr. Wichmann-Berlin in den Handel gebracht worden. — Da der Rechenstab von den verschiedensten Berufen benutzt wird, führen fast alle Lehrmittelhandlungen u. dgl. Ausgaben in mehreren Preislagen und unter Berücksichtigung von allerlei Sonderskalen.

rithmische Skala (S. 242), und damit hat er auch den Rechenstab. So einfach aber die Theorie für jeden ist, der auch nur eine Ahnung von der Logarithmierung hat, so wenig ist mit ihr allein etwas auszurichten. Will man wirklich Vorteile von der Benutzung des Rechenschiebers haben, so muß man durch häufige Übung in seiner Handhabung eine gewisse Fertigkeit sich erworben haben. Das kann nicht Sache des mathematischen Unterrichts allein sein. Es muß die Verwendung des Rechenstabes in der Physik, besonders bei den praktischen Übungen, ergänzend hinzukommen.

Damit sind wir bereits bei dem logarithmischen Rechnen angelangt. Man gewinnt die für das Logarithmieren von Ausdrücken geltenden Gesetze durch Rückgang auf die Potenzschreibweise. Die Aussagen über die Logarithmen sind nichts anderes als Aussagen über die Exponenten von Potenzen. Das gilt freilich nur insoweit, als eine Änderung der Basis nicht vorgenommen wird. Ich glaube aber in der Tat, daß man sich bei dem logarithmischen Rechnen in der Mittelklasse ganz und gar auf das Rechnen in einem und demselben Logarithmensystem beschränken darf. Von dem Übergang aus einem System in das andere kann zeitig genug in den Oberklassen gehandelt werden, wenn man von den natürlichen Logarithmen und überhaupt von der wirklichen praktischen Berechnung der Logarithmen spricht.

Sich nun lediglich auf die dekadischen Logarithmen zu beschränken, möchte ich aber doch nicht raten. Ich sagte schon oben, daß man bei der Definition des Begriffes Logarithmus auch verschiedene Grundzahlen berücksichtigen soll. Auch die Rechengesetze kann man ebenso gut wie für die Basis 10 sofort für jede beliebige Basis aussprechen. Das hat noch einen anderen Vorteil, auf den jüngst wieder von Pfaff hingewiesen worden ist.[2] Man kann besser als bei den Logarithmen mit der Basis 10 bei solchen mit einer kleineren Basis die Rechengesetze ablesen und praktisch verwerten. Stellt man sich eine Liste der Potenzen von 2 auf, vielleicht bis zur 20. Potenz,[3] dann kann man aus Beispielen wie etwa

$$128 \cdot 1024 = 2^7 \cdot 2^{10} = 2^{17} = 131\ 072.$$
$$262\ 144 : 512 = 2^{18} : 2^9 = 2^9 = 512.$$
$$64^3 = (2^6)^3 = 2^{18} = 262\ 144.$$
$$\sqrt[5]{1\ 048\ 576} = \sqrt[5]{2^{20}} = 2^4 = 16,$$

die in die logaritnmische Schreibweise umzusetzen sind, einmal die Gesetze, dann aber auch sehr deutlich die aus ihrer Anwendung entspringenden Vorteile ersehen.

Über die Übungen im Aufschlagen von Logarithmen und über das Rechnen mit Logarithmen braucht weiteres nicht gesagt zu werden. Um Anwendungsmaterial

[1] Als Einführung empfehle ich dem Lehrer L. Schrutka, Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenschiebers, Leipzig und Wien (Deuticke) 1911. Außerdem z. B. die betreffenden Abschnitte in H. von Sanden, Praktische Analysis, Leipzig (Teubner) 1914, und A. Galle, Mathematische Instrumente, Leipzig (Teubner) 1912. — Handlich und preiswert und für Schüler und Praktiker gleich brauchbar ist A. Rohrberg, Theorie und Praxis des Rechenschiebers (MPhB 23) 2. A., Leipzig (Teubner) 1919. — Über die Geschichte des Rechenschiebers berichtet A. Rohrberg, Die Geschichte des Rechenschiebers, ZmnU 47 (1916) S. 338ff.

[2] H. Pfaff, Zur Einführung in die Logarithmen, ZmnU 43 (1912), S. 558—559.

[3] Tabellen der Potenzen von 2 finden sich in manchen Tafeln, z. B. in denen von Greve.

aus der Planimetrie, Trigonometrie und Stereometrie, ebenso aus der Arithmetik und Algebra wird man nie verlegen sein.

Eine Frage wird vielleicht im Unterricht nach der Erledigung der Rechenoperationen dritter Stufe auftauchen: Warum geht man nicht noch weiter, warum definiert man nicht auch Rechenoperationen vierter Stufe? Logisch ist das sehr wohl möglich, praktisch aber ohne Bedeutung, zumal die Operation dritter Stufe nicht kommutativ ist. Trotzdem liegt zu der Frage eine ausgedehnte Literatur vor, an der gerade Schulmänner mehrfach sich beteiligt haben.[1]

Was in diesem Kapitel vom 2. Abschnitt an erörtert wurde, stellt einmal das arithmetische Pensum von Untertertia bis Obersekunda etwa dar, es ist aber gleichzeitig auch Gegenstand einer von den Lehrplänen fast aller deutschen Staaten für die Prima vorgeschriebenen Wiederholung des Aufbaues der Arithmetik, des Ausbaues des Zahlbegriffes. Manches von dem, was wir ausgeführt haben, gehört diesem, anderes jenem Kreis an. Absichtlich ist nicht überall gesagt worden, wie weit man hier gehen, wo man dort anfangen soll. Schulart, Schülergeneration, vielleicht auch der Geschmack des Lehrers müssen entscheiden. Nur ein Ratschlag: Man benutze dieses Gebiet zu einem collegium logicum. Begriff und Bau der Definition, der circulus vitiosus, überhaupt die wichtigsten logischen Schnitzer, die in Wissenschaft und Leben vorkommen, und viele andere Grundfragen der Logik können hier zur Sprache kommen, nicht selten in drastischer Form. Soll das aber geschehen, dann darf dieses Gebiet auf keinen Fall „vorgetragen" werden, auch hier müssen Frage und Antwort wechseln, auch hier sind Aufgaben in der Klasse und für das Haus zu stellen, Aufgaben, die nicht die Ausführung irgendeiner arithmetischen Operation betreffen, sondern den logischen Aufbau des Wissenschaftsgebäudes. Die Aufgabensammlungen versagen in dieser Hinsicht. Meines Wissens haben Zühlke und ich zum ersten Male in unserer Bardey-Bearbeitung einen Versuch in dieser Richtung gemacht; Nachfolger haben wir in Dintzl und Vaselli gefunden.

Als im Gefolge der Reformbewegung die Differential- und Integralrechnung Einlaß in alle Arten von höheren Schulen begehrte, wurde von manchen Seiten das dringende Verlangen nach Entlastung in anderen Gebieten gestellt. Unter den Vorschlägen, die in dieser Richtung für die Gymnasien gemacht wurden — für die Realanstalten sind sie wohl niemals im Ernst erhoben worden —, befand sich auch der, die komplexen Zahlen zu streichen, sich mit anderen Worten mit dem Bereiche der reellen Zahlen zu begnügen. Die Beschränkung auf das reelle Gebiet, die ja in der Funktionslehre der höheren Schule durchgeführt ist, wurde z. B. seinerzeit von Schimmack lebhaft befürwortet. Keine Forderung, die im Laufe der Reformbewegung hervorgetreten ist, hat aber andererseits solchen Widerspruch gefunden wie diese, auch im Kreise der Reformer selber. Wenn man sich fragt, warum, so ist die Antwort darin zu suchen, daß ohne die komplexen Zahlen die allmähliche Entwicklung des Zahlbegriffes und die Erweiterung der Rechenoperationen gänzlich unabgeschlossen bliebe. Es ist besonders auf die Gleichungslehre hingewiesen worden. Die Theorie der quadratischen Gleichungen verlöre an Einheitlichkeit, bei den kubischen Gleichungen (über die die Meinungen der Methodiker sehr geteilt sind) wäre

[1] Vergl. den Artikel H. Schubert-J. Tannery-J. Molk, Principes fondamentaux de l'arithmetique in Tome I, Volume I der französischen Enzyklopädie.

der casus irreducibilis nicht oder doch nur gezwungen auf einem Umwege über die Trigonometrie zu erledigen. Simon hat gesagt, daß nicht so sehr die Probleme 2. Grades als die des 3. Grades, etwa der archimedische Schnitt durch die Kugel, die komplexen Zahlen fordern. Höfler hat mit Rücksicht darauf, daß wir als imaginäre Einheit die Wurzel der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ wählen, Simon gegenüber auf das Problem 2. Grades als für die Einführung des Komplexen maßgeblich hingewiesen (man könnte beiläufig als imaginäre Einheit ebenso eine nicht reelle Wurzel ε der Gleichung $x^3 - 1 = 0$ nehmen, das macht weiter keine Schwierigkeiten, höchstens Unbequemlichkeiten). Alles das zeigt aber, daß man heute das Komplexe noch nicht wird missen wollen; nicht nur Mathematiker, auch Physiker wie Grimsehl haben sich ganz energisch für die Beibehaltung eingesetzt.

8. Arithmetische und geometrische Reihen.

Von der Reihenlehre werden gewöhnlich die endlichen arithmetischen und geometrischen Reihen, zu denen dann auch die unendlichen geometrischen Reihen hinzugenommen werden, als ein besonderes Kapitel abgespalten, das in allen neunstufigen Schulen, auch dort, wo die unendlichen Reihen sonst nicht zur Sprache kommen, wegen seiner Anwendungen behandelt wird.[1]

Die Lehre von den arithmetischen Reihen erster Ordnung, die also dadurch gekennzeichnet sind, daß die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, wird von zwei Formeln beherrscht, der Formel für das Endglied z und für die Summe s:

$$z = a + (n - 1)\,d, \qquad s = \frac{a + z}{2}n.$$

Man sieht, von den in Betracht kommenden Größen, dem Anfangsglied a, dem Endglied z, der Gliederzahl n und der Differenz d sind drei unabhängig; wenn irgend drei von ihnen gegeben sind, lassen sich die anderen bestimmen, wobei man in manchen Fällen auf quadratische Gleichungen kommt. Ich halte es für ganz gut, wenn alle möglichen Fälle von Aufgaben, auch wenn sie ohne praktische Bedeutung sind, zur Sprache kommen und allgemein gelöst werden. Übrigens sind solche Zusammenstellungen von möglichen Fällen gute vorbereitende Beispiele für die Kombinatorik oder, wenn man die rein logische Seite hervorkehren will, für eine vollständige Disjunktion.

Ob man die arithmetischen Reihen höherer Ordnung behandeln soll, ist strittig. Früher erfreuten sie sich im Gymnasialpensum einer gewissen Beliebtheit, es war eine jener Stellen, an denen man über die durch den Lehrplan gezogenen Grenzen mit guten Jahrgängen weit hinausgehen konnte. Heute sind sie vielfach ganz verschwunden. Man braucht ihnen keine Träne nachzuweinen. Was man allenfalls später braucht, sind Formeln für die Summation der $n$ten Potenzen der ganzen Zahlen. Wenn es sich z. B. um das bestimmte Integral von x^n handelt, so ist zur wirklichen Ausführung der Summation ein geschlossener Ausdruck für jene

[1] Einen Abschnitt über dieses Kapitel bringen alle einschlägigen Lehrbücher. Als Sonderdarstellung nenne ich H. Heine, Ableitungen und Betrachtungen aus dem Gebiete der arithmetischen und geometrischen Reihen, Dresden (Ehlermann) 1913.

Summe notwendig. Vielen wird es aber, wie wir bei der Besprechung der Infinitesimalrechnung sehen werden, genügen, wenn sie die Ausführbarkeit der Summation für den Fall $n = 2$ tatsächlich zeigen. Dazu braucht man aber nicht den umfänglichen Apparat der arithmetischen Reihen höherer Ordnung in Bewegung zu setzen. Ich möchte also empfehlen, ruhig ganz auf dieses Gebiet zu verzichten, man kommt auch ohne Dreiecks-, Vierecks- usw. Zahlen aus.[1]

Man sollte bei den arithmetischen Reihen unbedingt an graphische Darstellungen denken. Man trägt die Werte der Glieder als Ordinaten zu den Gliedzahlen auf. Dann bilden die Endpunkte im Falle der Reihen ersten Grades eine Gerade. Man braucht die arithmetische Reihe nur in der Form $y = a + bx$ zu schreiben, um diesen Zusammenhang klarzulegen. Im Falle der arithmetischen Reihen höheren Grades liegen die Punkte auf Parabeln. Die Summenformel $s = \frac{a+z}{2} \cdot n$ erfährt auf diese Weise eine gute geometrische Versinnbildlichung durch eine Fläche, was später bei der Einführung des bestimmten Integrals wichtig sein kann. Auch die Interpolation, das Zwischenschalten von Gliedern zwischen die Glieder einer vorgelegten arithmetischen Reihe, erhält eine lehrreiche und für den Funktionsbegriff wichtige Deutung.

Bei den endlichen geometrischen Reihen entsprechen den obengenannten beiden Formeln für die arithmetischen Reihen die folgenden:

$$z = a\,q^{n-1}, \qquad s = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1} = a\,\frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Auch hier wird man wieder alle möglichen Fälle von Aufgaben diskutieren, wobei man auf die Tatsache stößt, daß einige der Aufgaben im allgemeinen mit den bisherigen Hilfsmitteln nicht lösbar sind. Es ist gut, wenn der Schüler an bestimmten Problemen merkt, daß man mit den ihm bekannten Lösungsmethoden von Gleichungen nicht immer zum Ziel kommt, obwohl doch — wie er etwa an selbstgestellten Aufgaben sieht — Lösungen tatsächlich vorhanden sind. Wichtig erscheint mir, daß immer wieder auf die Identität

$$(a^n - b^n) : (a - b) = a^{n-1} + a^{n-2}\,b + \ldots + b^{n-1},$$

hingewiesen wird, aus der im besonderen

$$(x^n - 1) : (x - 1) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots\ldots + x + 1$$

wird. Es ist ganz sonderbar, wie leicht diese vielgebrauchte Formel dem Gedächtnis der Schüler entfällt.

Auch hier kann man die Schüler zu einer graphischen Darstellung der Reihen in der Weise, wie wir sie bei den arithmetischen Reihen kennen gelernt haben, hinführen. Die Bedeutung dieser Übung hängt davon ab, ob die Exponentialkurve bereits bekannt ist oder nicht. Es gibt zahlreiche andere Veranschaulichungen geo-

[1] Ich nenne schon hier eine unter dem Zeichen der Reform stehende Arbeit, die an den arithmetischen Reihen höherer Ordnung gerade mit Rücksicht auf die tatsächliche Auswertung bestimmter Integrale nicht vorübergeht: W. Freise, Behandlung der Reihen im Unterricht, Programm Kaiser-Wilhelm-II.-Oberrealschule Göttingen, Ostern 1913 (vgl. S. **4dd** u. **4aa**).

metrischer Reihen und anderer Zahlenreihen, die den Schülern Freude zu machen pflegen.[1]

Bei den Anwendungen der endlichen geometrischen Reihen braucht man um wertvollen Stoff nicht verlegen zu sein. Die Physik bietet, um nur ein Beispiel anzuführen, mit den Fallgesetzen dankbare Aufgaben. Aus der Biologie nenne ich das überraschende Anwachsen einer Tier- oder Pflanzenart bei ungehinderter Vermehrung: Schoenichen führt z. B. in seiner Methodik und Technik des naturgeschichtlichen Unterrichts in dem vorliegenden Sammelwerk für die Reihe

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n$$

die Beispiele $a = 2$, $q = 7$ für den Hasen, $a = 2$, $q = 12$ für die Hausmaus an. Solche gelegentlichen Ausflüge in andere Wissensgebiete sind nur geeignet, den mathematischen Unterricht zu beleben. Man hat wirklich nicht nötig, sich an jene Phantasieaufgaben zu halten, die sich z. B. mit dem Ausschachten von Erde beschäftigen, wo dann der Lohn ausgerechnet in geometrischer Folge mit dem Tieferkommen wächst. Es ist auch zu beachten, daß die Zinseszins- und Rentenrechnung alsbald ein reiches Feld der Anwendung erschließt.

Bei den geometrischen Reihen bietet sich nun an allen Schulen auch die Gelegenheit, auf unendliche Reihen einzugehen. Es wird den Schülern keine sachlichen Schwierigkeiten machen, an dem arithmetischen Ausdruck für die Summe den Grenzübergang für unendliche Gliederzahl wirklich auszuführen und zu untersuchen, wann der Grenzübergang zu einem endlichen und bestimmten Ergebnis führt. Es tut ganz gut, wenn man ausdrücklich noch bei der oszillierenden Reihe vor der Anwendung der Summenformel warnt, indem man ihm die historisch bedeutsame Summierung von $+ 1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots\ldots$ zu $\frac{1}{2}$ vorführt. Daran kann dann in Realanstalten später mit gleichfalls historisch interessanten Beispielen angeknüpft werden, die durch ähnliche falsche Reihensummationen für die gleiche Reihe den Wert $\frac{1}{3}$ usf. liefern.

Auch hier rate ich, die geometrische Veranschaulichung zu Hilfe zu nehmen. Es genügt nach meiner Meinung nicht, an dem Beispiel von Zeno die Darstellung des Vorganges auf einer Geraden zu versuchen, man zeige zunächst das Abnehmen der Glieder an der oben erwähnten graphischen Darstellung der geometrischen Reihe. Auch hier aber wird die Sachlage immer noch nicht genügend aufgehellt. Man sieht zwar, wie die Glieder immer kleiner und kleiner werden, aber der Grenzwert der Summe tritt nicht in die Erscheinung. Von den verschiedenen Arten, das in voller Anschaulichkeit zu zeigen, auch die Sachlage bei nicht konvergenten Reihen sofort aufzuhellen, scheint mir die zweckmäßigste die in der beigefügten Figur 70 wiedergegebene.[2] Man kann dann mit Ähnlichkeitssätzen beweisen, daß die Punkte A

[1] W. Bochow, Bildliche Darstellung gewisser Summenformeln, ZmnU **51** (1920) S. 198ff.

[2] Vgl. zur Veranschaulichung der Summation geometrischer Reihen: M. Milankovitch, Eine graphische Darstellung der geometrischen Progressionen, ZmnU **40** (1909), S. 329; K. Goldziher, Über die Anwendung des graphischen Verfahrens im mathematischen Schulunterricht, Ubl **15** (1909), S. 49; W. Rottsieper, Zur Konvergenz der geometrischen Reihe, ebenda **16** (1910), S. 62; R. Schimmack, Über die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts, Heft 7 der IMUK-Ber., Leipzig (Teubner) 1911, und ZmnU **42** (1911), S. 577.

und die Punkte B je auf einer Geraden liegen. Projiziert man aber den Schnittpunkt der beiden Geraden, der immer dann, wenn der positiv vorausgesetzte Quotient kleiner als 1 ist, sich vorfinden wird, auf die Gerade $A_1\ B_1$, so hat man damit eine Strecke gefunden, die die Summe graphisch darstellt.

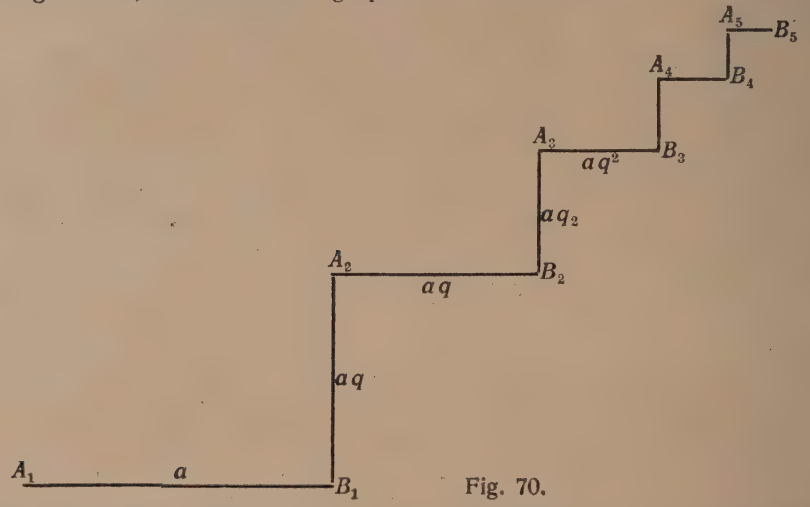


Fig. 70.

Wenn ich den Rat gegeben habe, die unendlichen Reihen mit zu berücksichtigen, so geschah das nicht so sehr irgendwelcher Aufgaben wegen, z. B. der beliebten geometrischen Anwendungen, bei denen Flächen oder Linien in unendlicher Zahl summiert werden. Solche Aufgaben, wie etwa die Spiralbahn, auf der ein Zug mit endlicher Geschwindigkeit in endlicher Zeit unendlich oft um einen Punkt fährt, haben ihre Bedeutung nur für das Studium des Grenzbegriffes. Wichtig aber sind die Anwendungen auf die unendlichen periodischen Dezimalbrüche.

Die Anwendungen, die den geometrischen Reihen regelmäßig folgen, sind die Zinseszins- und die Rentenrechnung. Die Zinseszinsrechnung wird beherrscht von der Formel

$$b = a\,q^n, \text{ wo } q = 1 + \frac{p}{100}$$

der mit dem Prozentsatz p zusammenhängende Zinsfaktor[1], n die Zahl der Zinstermine ist. Der Wert liegt hier in den praktischen Anwendungen, nicht in der arithmetischen Entwicklung, die nichts Neues bietet. Soll ein Verständnis für die Bedeutung des Zinsfaktors bei der Verzinsung wirklich im Schüler geweckt werden, so wird auch hier wieder die graphische Veranschaulichung in ihre Rechte treten müssen; man wird etwa in einer Zeichnung einfachen Zins mit Zinseszins zu 3%, $4\frac{1}{2}$%, 5% vergleichen. Eine Aufgabe, wie die Bestimmung des Zeitraumes, innerhalb dessen eine Verdoppelung des Kapitals eintritt, wird man am besten erst am graphischen Bilde angenähert lösen lassen.[2]

[1] Über graphische Methoden in der Zinseszins- und Rentenrechnung vgl. A. Flechsenhaar, Graphische Methoden im algebraischen Unterricht, Programm Lessing-Gymnasium Frankfurt a. M. 1913, und A. Carl, Zur Zinseszinsformel, ZmnU 48 (1917) S. 137ff.

[2] Die vielfach angewandte Abkürzung $q = 1{,}0\,p$ ist nicht richtig (es sei z. B. $p = 15$).

Bei der Rentenrechnung tritt uns in manchen Büchern eine große Fülle von Formeln entgegen. Läßt sie etwa der Lehrer auswendig lernen, so kann er sicher sein, daß der Schüler im geeigneten Moment die falsche faßt. Wenn die Formel mitsamt der näheren Kennzeichnung, unter welchen Umständen sie gilt — die Bezeichnungen sind ja immer die gleichen, ob z. B. die Ratenzahlung am Anfang oder am Schlusse des gewählten Zeitraumes eintritt —, eine so große Belastung des Gedächtnisses der Schüler bedeutet, daß sie in keinem Verhältnis zu der Zeitersparnis steht, die sich aus ihrer sofortigen Benutzung ergibt, so soll man sie nur ruhig fallen lassen.

Entweder braucht man überhaupt keine besondere Formel für die Rentenrechnung und greift jeweilig auf die Summation der geometrischen Reihen zurück. Oder aber man begnügt sich mit den beiden Formeln

$$b_1 = a\,q^n + r\,\frac{q^n - 1}{q - 1}, \qquad b_2 = a\,q^n + r\,\frac{q^n - q}{q - 1},$$

von denen sich die erste auf die Ansammlung eines Kapitals durch ein zu Beginn eingezahltes Kapital a und eine je am Ende der Jahre eingezahlte Summe r bezieht, während bei der zweiten die Summe r am Anfang jedes Jahres eingezahlt wird. Die Fälle, in denen r negativ ist, in denen außerdem noch $b = 0$ ist, stecken alle in diesen Formeln, ohne eine besondere Formulierung nötig zu machen. Verwickeltere Fälle brauchen nicht in eigene Formeln gefaßt zu werden. Es ist gerade wünschenswert, daß die Schüler bei jeder Aufgabe erst eine Überlegung anstellen, wie die Dinge im vorliegenden Falle stehen.

Mit Zinseszins- und Rentenrechnung, auch mit der hier oder an die Wahrscheinlichkeitsrechnung angeschlossenen Versicherungsrechnung werden Erörterungen volkswirtschaftlicher Art verbunden sein, auf die wir an dieser Stelle nicht näher eingehen, weil sie Gegenstand einer besonderen Darlegung im 3. Bande sein werden.

9. Kombinatorik.

Eine gegenüber dem sonstigen Arithmetikstoff recht isolierte Stellung nimmt die Kombinatorik ein. Wenn man sie aus dem Lehrplan streichen würde, so würde damit eine Schädigung anderer arithmetischer Kapitel kaum verbunden sein, abgesehen etwa von dem binomischen Lehrsatz für ganze Exponenten, der aber auch auf anderem Wege abgeleitet werden kann. Die Rolle, die trotzdem die Kombinatorik in den höheren Schulen spielt — sie ist auch, als man Dinge wie Kettenbrüche, diophantische Gleichungen, arithmetische Reihen höherer Ordnung aus dem Lehrplan strich, zunächst beibehalten worden — ist einmal historisch zu erklären. Die kombinatorische Schule, die in Deutschland um die Wende des 18. Jahrhunderts zahlreiche Anhänger fand — als ihr Begründer ist Hindenburg anzusehen —, ohne doch auf die Arbeiten der bedeutenderen Mathematiker jener Zeit irgendeinen tiefergehenden Einfluß zu erlangen, hat offenbar den Weg in die Schule gefunden, als ihr Schicksal als Wissenschaft schon besiegelt war.

Das aber konnte nicht der einzige Grund sein, die Kombinatorik zu halten. Es ist vielmehr der, daß gerade die Kombinatorik geeignet erscheint, alle diejenigen

Ansprüche zu erfüllen, die man an eine der formalen Bildung dienende Mathematik zu stellen hat. Die logische Schulung, ohne eine parallelgehende geometrische Anschauung, aber doch immer mit der Möglichkeit der rechnerischen Nachprüfung, konnte keinen geeigneteren Gegenstand finden als die Probleme der Kombinatorik. Wir haben heute den formalen Wert, oder wenn man will den Erziehungswert, der Mathematik in den Schulen nicht außer acht zu lassen, auch wenn wir jetzt daneben auf die wirkliche Verwendbarkeit dessen, was wir lehren, Wert legen. Verwendbar ist die Kombinatorik heute kaum, von leichten auch ohne eine kombinatorische Theorie zu findenden Einzelheiten abgesehen, weder im praktischen Leben noch in der Wissenschaft.[1]

In der ganzen Schularithmetik gibt es kein Gebiet, in dem man so klar wie in der Kombinatorik zeigen kann, was von einer Definition, von einem Beweis zu leisten ist, wie sie gebaut sein muß — oder doch sein kann. Ich plädiere deshalb für die Kombinatorik, trotzdem ich damit wahrscheinlich höchst unmodern erscheine. Freilich, man halte sie im Stoff so kurz wie möglich. Es reicht vollständig aus, wenn man die Definitionen der Begriffe Permutation mit und ohne Wiederholung, Kombination mit und ohne Wiederholung, Variation mit und ohne Wiederholung behandelt und dann in allen sechs Fällen die Anzahl der betreffenden Größen ableitet.

Es ist eine alte Erfahrung, daß die Definitionen der genannten Ausdrücke den Schülern Schwierigkeiten machen. Dem Übel kann man nur steuern, wenn man vor den Augen der Schüler eine Zergliederung vornimmt (Hervorheben des übergeordneten Begriffes, Angabe der unterscheidenden Eigenschaften, Untersuchung, ob die Angaben vollständig sind, usw.); ewiges Wiederholen auswendig gelernter Phrasen hilft nicht weiter und ist geisttötend.

Bei den Beweisen für die Formeln kann man in verschiedener Weise vorgehen. Ich empfehle bei den im ganzen sechs Sätzen, um die es sich handelt, nicht bloß je einen Beweis zu geben, sondern jeweilig mehrere. Zunächst kann man etwa die Rekursionsformeln ableiten, die also z. B. gestatten, von den Kombinationen von n Elementen zur $k$ten Klasse überzugehen zu den Kombinationen von n Elementen zur $(k+1)$ten Klasse. Es ist zu zeigen, wie man aus den Rekursionsformeln den allgemeinen Ausdruck findet. Dann wird man versuchen, einen Beweis ohne Zwischenschaltung der Rekursionsformeln unmittelbar durch Überlegung zu erbringen. Das ist in manchen Fällen nicht leicht. Schließlich aber sollte man in allen Fällen auch den Beweis durch vollständige Induktion führen. Gerade dieses so überaus wichtige Beweisverfahren kann hier in ausführlicher Weise und an der Hand der verschiedenen Beispiele zergliedert und nach seinen Vorzügen und Nachteilen gewürdigt werden.[2] Der Schüler wird einsehen, daß der Beweis durch vollständige

[1] Immerhin kommt der Kombinatorik doch eine gewisse Bedeutung für Fragen der allgemeinen Erkenntnis zu. Ich erinnere an Helmholtz' Wort: „In den Letterkästen eines Buchdruckers liegt alle Weisheit der Welt zusammen, die schon gefunden ist und noch gefunden werden kann", und die schöne Ausnutzung dieses schon in Gullivers Reisen von Swift benutzten Gedankens in der schon einmal (S. 13) erwähnten Novelle „Universalbibliothek" von Lasswitz.

[2] Ich nenne hierzu aus neuerer Zeit W. Lorey, Das Prinzip der vollständigen Induktion, ZmnU 52 (1921) S. 205ff.; ders., Die vollständige Induktion im mathematischen Unterricht, Lehrproben und Lehrgänge, 1921, 4. Heft, S. 66ff.

Induktion voraussetzt, daß man das Ergebnis, also die zu beweisende Formel, bereits (vielleicht durch unvollständige Induktion) gefunden hat, daß also nur noch ihre Richtigkeit zu erweisen ist. Es ist ja bekannt, daß das Prinzip der vollständigen Induktion erkenntnistheoretisch von großer Bedeutung ist. Darauf wird im 3. Teilband hingewiesen werden. Jedenfalls kann die Kombinatorik Anlaß zu einem Exkurs über Beweismethoden geben, der freilich gelegentlicher Ergänzungen in der Geometrie — z. B. Diskussion des indirekten Beweises — bedarf.

Leichte Anwendungen der Kombinatorik in Form eingekleideter Aufgaben gibt es mannigfaltiger Art. Man wird nicht lange zu suchen haben, selbst wenn man sich nur auf Fragen beschränkt, die das praktische Leben stellen könnte[1]. Von den Aufgaben, die die Sammlungen geben, sollte man ruhig alle diejenigen weglassen, die sich auf Karten beziehen. Es gibt nämlich sogar erwachsene Leute, die nicht Karten spielen können! Warum soll man da den Schülern eine sanfte Mahnung geben, daß die Kenntnis der Karten zur selbstverständlich vorausgesetzten allgemeinen Bildung gehöre? Ausmerzen sollte man auch diejenigen Aufgaben, die auf der lexikographischen Anordnung der Kombinationen, Variationen usf. beruhen. Nach der zehntausend und soundsovielsten Variation zur vierten Klasse der 24 Buchstaben des Alphabets zu fragen, oder auszurechnen, nach wieviel Permutationen aus amor roma wird, hat wirklich weder formale noch praktische Bedeutung.

Wenn man in der Schule Kombinatorik treibt, so wird man im Anschluß daran auch den binomischen Lehrsatz behandeln. Erst wenn man mit Hilfe der Kombinatorik einen vollständigen Beweis gegeben hat, mag auch noch der Beweis durch vollständige Induktion, später vielleicht auch durch Differentiation folgen. Bei der Darstellung des binomischen Satzes pflegt man sich der Binomialkoeffizienten zu bedienen. Man versäume nicht, bei der Definition dieser Koeffizienten die einschränkenden Bedingungen, die für die in ihnen auftretenden Zahlen gelten, ausdrücklich anzugeben. Das gleiche gilt übrigens für das Fakultätszeichen.

Es gab eine Zeit, in der der binomische Satz gleichsam die Krönung des Gymnasialstoffes war. Das Urteil hat sich auch da sehr geändert. Bardey hat schon 1876 klar gesagt: „Die praktische Bedeutung des binomischen Satzes ist in der Elementarmathematik eine untergeordnete, zumal dann, wenn er nur für ganze Exponenten behandelt wird.“ Der Satz gewinnt in der Tat erst Bedeutung bei seiner Ausdehnung auf rationale Exponenten. Auf die Erweiterung zum polynomischen Satz wird man in der Schule sicherlich verzichten.

10. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Im Anschluß an die Kombinatorik wird zumeist die Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt. Hier liegen die Dinge ganz anders als bei der Kombinatorik. Haben wir es dort mit einem abgestorbenen Zweige der Mathematik zu tun, so hier mit einem sehr lebenskräftigen. Man kann sich von der heutigen Gestalt der wissenschaftlichen

[1] Recht interessante Aufgaben gibt die auch ihrer methodischen Bemerkungen wegen lesenswerte Arbeit: Kiefer, Die Kombinationslehre auf dem Gymnasium, Programm Königliches Gymnasium Essen-Ruhr, 1913.

Wahrscheinlichkeitslehre einen Begriff machen, wenn man etwa das zweibändige Werk von Czuber studiert.[1]

Wer vom Studium oder von der praktischen Anwendung her an die in der Schule übliche Stoffauswahl der Wahrscheinlichkeitsrechnung herantritt, dem wird sofort in die Augen springen, daß zwischen Wissenschaft und Unterricht geringe Übereinstimmung besteht. Man setzt in der Schule zunächst fest, was man unter mathematischer Wahrscheinlichkeit versteht. Es ist gut, zu betonen, daß es sich bei dem Ansatz: Anzahl der günstigen Fälle durch Anzahl der möglichen Fälle um eine Festsetzung handelt, durch die die Wahrscheinlichkeit in die Grenzen 0 und 1 eingeschlossen wird. Man könnte ebensogut Festsetzungen treffen — und der Schüler mag solche angeben —, bei denen die Grenzen 0 und ∞ oder $+\infty$ und $-\infty$ sind.

Dann werden in der Regel weiter noch die Sätze über die Summe und das Produkt von Wahrscheinlichkeiten durch Rückgang auf die Definition abgeleitet. Der Schüler neigt sehr dazu, beide Sätze bei den Anwendungen miteinander zu verwechseln. Als Gegenmittel empfehle ich die Regel, die z. B. in dem kleinen Werk von O. Meißner[2] gegeben wird: Stehen die Fälle im Verhältnis des „Entweder — Oder", dann ist zu multiplizieren, stehen sie im Verhältnis des „Sowohl — Als auch", dann sind sie zu addieren.

Mit diesen Gesetzen ist der wissenschaftliche Apparat der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule im allgemeinen erschöpft. In manchen Fällen werden auch noch sog. geometrische Wahrscheinlichkeiten hinzugenommen, bei denen also im Zähler und Nenner des Wahrscheinlichkeitswertes elementar auszuwertende Integrale stehen, die Längen von Strecken oder die Inhalte von Flächen.

Man würde sich eines wichtigen Erziehungswertes begeben, wollte man nicht auf den erkenntnistheoretischen Hintergrund der Wahrscheinlichkeitslehre auch auf der Schule mit einigen Worten eingehen. Es hat doch sicher etwas Reizvolles, muß auch die Hochachtung vor der Mathematik nur stärken, wenn man sich klar macht, wie mit diesem Zweige der Mathematik gewissermaßen die Ungesetzmäßigkeiten in Gesetze gezwungen werden. Im Deutschen Museum in München steht ein interessanter Apparat — neuerdings sieht man in Wirtschaften nach diesem Prinzip gebaute Glücksspiele. Auf einem vertikal stehenden Brett sind Nägel eingeschlagen in der Weise, daß je drei benachbarte Nägel ein gleichseitiges Dreieck bilden. Man gießt von oben Schrotkügelchen über dieses Gitter von Nägeln. Bei jedem Nagel, auf den ein Kügelchen trifft, stehen zwei Wege zur Auswahl, rechts oder links. Man sollte meinen, es sei ausgeschlossen, diese Willkürlichkeit in Gesetze zu fassen. Und doch ist ein Verteilungsgesetz vorhanden, wovon man sich durch einen Versuch überzeugen kann: Die Schrotkügelchen sind nachher in ganz bestimmter Weise an-

[1] E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen, 2 Bd., 3. Aufl., Leipzig (Teubner) 1915 und 21. — Über die wichtigsten Anwendungsgebiete unterrichten Helmert, Ausgleichungsrechnung, 2. Aufl., Leipzig (Teubner) 1907; Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre, Leipzig (Teubner) 1906, Blaschke, Vorlesungen über mathematische Statistik, Leipzig (Teubner) 1906.

[2] O. Meißner, Wahrscheinlichkeitsrechnung 2. A. (MPhB 4 u. 35) Leipzig (Teubner) 1919.

geordnet. — Nun, von der Gaußschen Fehlerkurve ist in den Schulen zumeist nicht die Rede.[1]

Dieses Gesetz, das die eigentliche Grundlage der Wahrscheinlichkeitslehre bildet, muß dem Schüler in seiner Bedeutung voll zum Bewußtsein gebracht werden. Man hat einmal von diesem Gesetz gesagt: Der Mathematiker nehme an, es sei durch praktische Versuche, etwa vom Physiker gefunden; der Physiker wiederum nehme an, es sei vom Mathematiker bewiesen. Richtig ist das erste; Hilbert hat geradezu einmal[2] die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit der Mechanik zusammengestellt als diejenigen physikalischen Disziplinen, an die man am ehesten mit der Axiomatik herankommen kann. Dabei ist zu beachten, daß die Zahl wirklicher Versuche zum Beweise des Gesetzes der großen Zahl recht gering ist, daß diese Versuche außerdem auch wieder in gewisser Weise angreifbar sind. Jedenfalls muß den Schülern etwas darüber gesagt werden, ob denn nun die Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch Versuche bestätigt sind. Man kann da auf ausgedehnte Würfelversuche von Wolff in Zürich, von Meißner[3] und anderen hinweisen. Man darf aber dem Schüler nicht die Schwierigkeiten verschweigen, die aus dem Begriff der Wahrscheinlichkeit a priori und der Wahrscheinlichkeit a posteriori entspringen. Wenn z. B. die Versuche von Wolff nicht in sehr guter Übereinstimmung mit den errechneten Werten stehen, so schließen wir doch nicht: also ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung unzuverlässig, sondern vielmehr, die Würfel von Wolff waren schlecht, d. h. nicht homogen. Gewiß kann man das wieder nachprüfen, wenn man will. Aber man sieht doch, welche Schwierigkeiten da entstehen. Ich habe es immer als eine ganz wunderbare Bestätigung der Wahrscheinlichkeitsrechnung empfunden, daß man mit Hilfe eines oft wiederholten Nadelversuches — eine Nadel wird auf ein Schachbrett geworfen — π auf mehrere Stellen empirisch bestimmen kann.

Von alledem sollte dem Schüler etwas gesagt werden. Auch das gehört zur Kritik der Wahrscheinlichkeit, daß die von der Formel geforderte Angabe der möglichen oder der günstigen Fälle Schwierigkeiten machen kann. Die Entscheidung ist oft nicht leicht, ob die in Rechnung gesetzten möglichen Fälle wirklich alle Möglichkeiten erschöpfen; ein Würfel z. B. kann auch einmal „brennen" (d. h. auf eine Kante fallen und so, wenn sie abgerundet ist, stehen bleiben), oder er kann, wie in jener bekannten Anekdote aus dem Dreißigjährigen Krieg, in zwei Teile zerspringen, Fälle, die man gemeinhin nicht in Rechnung ziehen wird. Und ebenso steht es mit der Frage, ob alle Fälle gleichwertig sind: Wenn die Kugeln in einer Urne nicht in „idealer Unordnung" sind, wenn etwa die eine Sorte der benutzten Kugeln obenliegt, so könnte ja unter den Ziehenden jemand sein, der immer eine Kugel von oben, oder ein besonders Schlauer sein, der immer eine Kugel von ganz unten hervorholt.

Wenn so die Kritikfähigkeit wachgerufen worden ist, sollte nun aber auch der große Anwendungsbereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung angedeutet werden.

[1] Ich werde im 3. Teilband zeigen, daß man sehr wohl auf diese Dinge eingehen kann, ja dadurch erst recht der Wahrscheinlichkeitslehre unserer Schulen Leben gibt.

[2] In dem Vortrag „Mathematische Probleme" auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongreß in Paris. Vgl. z. B. Archiv für Mathematik und Physik III. Reihe 1 (1901), S. 62.

[3] O. Meißner, Würfelversuche. Zeitschrift für Mathematik und Physik 62 (1913), S. 149ff.; vgl. auch die zitierten Bändchen der MPhB.

Früher war die Wahrscheinlichkeitslehre nicht viel mehr als ein Teil der Unterhaltungsmathematik, als eine Theorie der Glücksspiele u. dgl.[1] Das ist jetzt ganz anders geworden. Man kann auf die Ausnutzung in der Statistik mit den Anwendungen auf Physik, Biologie und vor allem Versicherungsrechnung hinweisen. Hier ist dann wieder einer jener Wege, die zu der staatsbürgerlichen Erziehung im mathematischen Unterricht der Oberklassen hinführen. Das näher auszuführen ist eine der Aufgaben des 3. Bandes.

[1] Auch dabei kann man den Unterricht an Problemen anschließen. Ich verweise z. B. auf O. Knopf, Das „Petersburger Problem" der Wahrscheinlichkeitsrechnung, ZmnU 49 (1918) S. 233ff.

ACHTES KAPITEL.

Algebra.

1. Die Rechenoperationen mit Gleichungen.

Ehe wir uns mit den verschiedenen Arten von Gleichungen beschäftigen, verweilen wir einen Augenblick bei den allgemeinen, zur Lösung führenden Operationen. Ich habe schon früher (S. 213ff.) der Verwirrungen gedacht, die durch das Durcheinanderwerfen von arithmetischem Ausdruck und Gleichung — genauer Bestimmungsgleichung — angerichtet werden. Halten wir uns zunächst einmal an den primitiven Begriff der Gleichung, also zweier durch ein Gleichheitszeichen verbundenen Ausdrücke. Da ist zunächst ein Wort darüber zu sagen, welche Forderungen wir hinsichtlich der Gleichheit beider Ausdrücke stellen, um die Erlaubnis zur Anwendung des Gleichheitszeichens zu haben. Der Schüler wird sagen, nun ich setze eben das Gleichheitszeichen dann, wenn wirklich beide Seiten gleich sind oder gleich sein sollen. Ja aber was heißt gleich? Man kann dem Schüler doch nicht ein Axiomensystem vortragen — auch für Prima müßte ich davon abraten —, in welchem der Begriff Gleichheit festgelegt wird (vgl. S. 206). Also müssen wir den Begriff der Erfahrung entnehmen, ohne den Versuch einer vollständigen Grundlegung zu machen. Da gibt es aber mehrere, ich darf einmal sagen Arten von Gleichheit. In dem einen Falle sieht man zwei Dinge als gleich an, wenn sich bei ihrer Messung herausstellt, daß sie gleichen Wert haben. So vergleicht man Strecken, Gewichte, Bevölkerungszahlen usf. Die Messungen stellen aber nur Näherungswerte dar. Ich kann statt mit dem Maßstabe auch nach dem Augenmaß oder nach dem Gefühl — z. B. bei Gewichten — messen und werde dann mit meinen Annäherungen an die wirklichen Werte noch weniger weit herankommen; die Beurteilung des Gleichseins unterliegt dem Fechnerschen Gesetz. Man muß sich darüber klar sein, daß gewisse Voraussetzungen, die man gemeinhin beim Gleichsetzen von Dingen macht, für diese Art von Gleichheit nicht zutreffen. Wenn sich z. B. die Größen a und b nur um so viel unterscheiden, daß der Unterschied unterhalb der Beobachtungsgrenze bleibt, und in gleicher Weise die Größen b und c, so ist damit noch nicht gesagt, daß nun auch die Größen a und c bei den angewandten Beobachtungsmitteln nicht mehr unterscheidbar sind. Mit andern Worten, der Grundsatz: Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie untereinander gleich, trifft für diese Art Gleichheit nicht zu.

Eine andere Art der Gleichheit, die wir eben schon mehrfach als Gegenbeispiel genannt haben, ist die, bei der beide Größen wirklich genau, ganz unabhängig von dem Genauigkeitsgrad eines Maßstabes, gleich sind, nicht nur innerhalb irgendwelcher

Beobachtungsgrenzen. Aus Gründen, die sofort klar werden, kann man auch sagen, daß zwei Größen in diesem Sinne gleich sind, wenn sie sich um beliebig wenig unterscheiden. Der Mathematiker sieht sich zu dieser scheinbaren Komplizierung der Dinge veranlaßt, damit der Grenzbegriff zugelassen wird. Er will z. B. $0{,}99\ldots = 1$ setzen können.

Noch in einem anderen Sinne hat man zwei Arten der Gleichheit zu unterscheiden. Neben einem wirklichen Gleich-Sein handelt es sich für den Mathematiker auch um ein Gleich-Sein-Sollen. Neben den identischen Gleichungen gibt es die Bestimmungs- und die Funktionalgleichungen.

Die Frage ist: Soll man die durch Kombination der zweimal zwei Arten entstehenden vier Arten der Gleichheit durch besondere Symbole unterscheiden? Wir haben uns bereits in der Schule an das Zeichen $\approx$ für angenähert gleich gewöhnt und davon schon bei Gelegenheit des Rechenunterrichtes gesprochen. Soll man dieses Zeichen auch dann anwenden, wenn es sich nicht nur um rohe Annäherungen, um Überschlagswerte u. dgl., handelt, sondern in allen Fällen, wo es sich um gemessene und deshalb vom Genauigkeitsgrad der Maßstäbe abhängige Größen handelt, dann aber auch um die landläufigen und notwendigen Abkürzungen von Logarithmen, trigonometrischen Funktionen u. dgl.? Die Frage ist mehrfach lebhaft erörtert worden (vgl. S. 14). Da man irrationale Zahlen immer nur angenähert durch endliche Dezimalbrüche darstellen kann, so ist ernsthaft der Vorschlag gemacht worden, bei Verwendung des $=$-Zeichens die unendliche Stellenzahl zum mindesten durch Punkte ausdrücklich anzudeuten. Ich meine, wenn wir etwa fünfstellig rechnen, so können wir unbesorgt das Gleichheitszeichen anwenden, wenn die in Frage kommenden Größen auf fünf Stellen genau sind, wobei wir auch die im Laufe der Rechnung sich einstellende Unsicherheit in der letzten Stelle noch zulassen. Das Zeichen $\approx$ wenden wir dagegen an, wenn es sich um Werte handelt, die in Anbetracht der beim Rechnen berücksichtigten Stellenzahl offensichtlich Näherungswerte sind.

Handelt es sich nicht um ein Gleichsein, sondern wie bei Bestimmungsgleichungen um ein Gleichsein-Sollen, so sind ebenfalls $\approx$- und $=$-Zeichen in entsprechender Weise anzuwenden.

Welche Operationen kann man nun mit Gleichungen vornehmen? Man kann auf beiden Seiten der Gleichung Gleiches addieren, subtrahieren, mit Gleichem multiplizieren, durch Gleiches dividieren. Bei der Division gilt eine Ausnahme. Man darf nicht durch 0 dividieren. Es ist ratsam, durch eine Anzahl Trugschlüsse[1] den Schülern recht vor Augen zu führen, wie man auf falsche Ergebnisse kommt, wenn man diese Ausnahme nicht beachtet. Wenn in

$$x(x - x) = (x + x)(x - x)$$

durch $x - x$ dividiert wird, so ist die Division durch 0, deren Fehlerhaftigkeit man bei dem Wegheben der 0 in $0 \cdot 7 = 0 \cdot 8$ sofort einsieht, für den Schüler in interessanter Weise verschleiert.

Man kann dann weiter beide Seiten einer Gleichung potenzieren, radizieren und logarithmieren, doch muß man im zweiten Falle die Mehrdeutigkeit beachten. Auch

[1] Beispiele sind gegeben in W. Lietzmann und V. Trier, Wo steckt der Fehler? MPhB 10, 2. Aufl., Leipzig (Teubner) 1917.

hier empfehle ich einige Trugschlüsse als warnende Beispiele, die man nach dem Muster: aus $4^2 = (-4)^2$ folgt nicht $+4 = -4$, aufbaut.

Man hat wohl gelegentlich vorgeschlagen, alle diese Operationen mit der einen Regel zu umfassen: „Eine Gleichung bleibt bestehen, wenn man mit beiden Seiten dieselben Rechnungen vornimmt" — so steht wörtlich in einer in hoher Auflagenzahl verbreiteten Aufgabensammlung. Ich halte diese Fassung nicht für sehr glücklich. Einmal berücksichtigt sie nicht die eben angeführten Ausnahmen und Mehrdeutigkeiten. Aber auch davon abgesehen ist der Satz nicht einwandsfrei. Es liege etwa die Gleichung $a + b = b + a$ vor. Dann soll auf beiden Seiten der erste Summand halbiert werden. Damit führt man doch offenbar auf beiden Seiten dieselbe Rechnung aus. Das Ergebnis aber ist natürlich falsch. Oder ein Beispiel, das nicht erfunden, sondern tatsächlich aus der Schulstube stammt: In

$$\sqrt{45 - 6x - 3x^2} = x - 3$$

ist beiderseits das „Vorzeichen" umzukehren, und man findet:

$$\sqrt{3x^2 + 6x - 45} = 3 - x.$$

Selbstverständlich war die Regel „nicht so gemeint", aber mathematische Sätze sollen Mißdeutungen nach Möglichkeit ausschließen.

Wir werden nun in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels nacheinander die Gleichungen ersten, zweiten, dritten und höheren Grades behandeln. In den Aufgabensammlungen sind gewisse andere Gleichungen diesen verschiedenen Arten eingeordnet: Bruchgleichungen, Wurzelgleichungen, Exponentialgleichungen. Es verdient ausdrücklich hervorgehoben zu werden, daß derlei Gleichungen zwar „auf lineare, quadratische Gleichungen führen", nicht aber selbst dazu gehören. Das macht sich in manchen Fällen recht deutlich dadurch bemerkbar, daß die Wurzeln, die man dergestalt errechnet hat, wie die Probe zeigt, nicht sämtlich zutreffen. Ein Beispiel für viele: Die Gleichung $x - 3\sqrt{x} = 28$ führt man durch geeignetes Potenzieren oder durch die Substitution $y = \sqrt{x}$ auf eine quadratische Gleichung zurück. Man erhält dann die Wurzeln $x_1 = 16$, $x_2 = 49$. Von diesen Wurzeln gilt die erste nicht. Das wäre anders, wenn wir den Ausdruck $\sqrt{x}$ nicht eindeutig festgelegt hätten, sondern wenn wir ihm die Zweideutigkeit gelassen hätten.

Zum Schluß noch einige allgemeine Bemerkungen über die Literatur zur Gleichungslehre. Es gibt ja außerordentlich viel Werke über Algebra, und in der Mehrzahl von ihnen kommen auch, von höherer Warte aus betrachtet, die Dinge zur Sprache, um die es sich in der höheren Schule handelt. Als das beste, aber auch umfangreichste dieser Bücher ist noch immer die Algebra von Weber[1] anzusehen. Für den Lehrstoff der Schule kommt in erster Linie in Betracht der erste Band der Enzyklopädie von Weber-Wellstein und der Band Algebra in den „Grundlehren der Mathematik".[2] Dann aber empfehle ich als Nachschlagewerk die umfangreiche

[1] H. Weber, Lehrbuch der Algebra, 1. Bd., 2. Aufl., 2. Abdr. 1912; 2. Bd., 2. Aufl. 1899; 3. Bd., 2. Aufl. 1908, Braunschweig (Vieweg); 1912 erschien davon eine kleine Ausgabe in einem Band.

[2] Weber und Wellstein, Elementare Algebra und Analysis, 3. Aufl., Leipzig (Teubner) 1915; E. Netto, Algebra, Leipzig (Teubner) 1915.

Darstellung von Matthießen[1] und ein kleineres Werk von Netto[2], das man auch reiferen Schülern in die Hand geben kann.

2. Gleichungen ersten Grades.

Durchblättert man die älteren Aufgabensammlungen, so findet man fast in allen eine Scheidung der arithmetischen Teile von den Gleichungen dergestalt, daß zunächst alle sieben Rechenoperationen nacheinander behandelt werden, erst dann die Gleichungslehre mit den Gleichungen ersten Grades einsetzt. Für den Unterricht trifft diese Stoffolge nicht zu. Aber noch mehr. Man ist in den letzten Jahren überhaupt davon abgekommen, eine reinliche Scheidung zwischen Gleichungen und arithmetischen Operationen vorzunehmen. Beide greifen vielmehr andauernd ineinander. An die Durchnahme der Brüche beispielsweise wird man sofort Gleichungen mit Bruchausdrücken anschließen, an die Proportionen Gleichungen mit Proportionen usf. Darüber herrscht heute so weit Übereinstimmung, daß ein Wort der Begründung dieses Verfahrens sich erübrigt.

Es wäre nun aber gewiß falsch, es mit dieser gelegentlichen Einschaltung von Gleichungen ersten Grades in den übrigen Stoff sein Bewenden haben zu lassen. Eine, wenn man will, wiederholende und zusammenfassende Durchnahme der Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten wird damit nicht überflüssig, gibt vielmehr ihrerseits wieder, wenn man dieses Kapitel recht mannigfach gestaltet, Gelegenheit zu immanenter Wiederholung der vorher behandelten Rechenoperationen.

Zur methodischen Behandlung möchte ich vorab nur eine allgemeine Bemerkung machen. Man binde sich nicht daran, die Unbekannte mit x zu bezeichnen. Später stößt der Schüler andauernd auf Berechnungen, die nicht gerade die Unbekannte mit diesem Buchstaben bezeichnen. Es wird der Radius eines Kreises, die Seite eines Dreiecks, eine Konstante in einer Funktionalgleichung gesucht. Es ist dann im höchsten Grade langweilig, wenn der Schüler, wie man es zuweilen beobachtet, das gesuchte Stück immer erst in x umtauft, statt die vorliegende Gleichung sofort nach r, nach a usw. aufzulösen.

Es unterliegt meines Erachtens keinem Bedenken, bei den linearen Gleichungen auch Bruchgleichungen zu behandeln, die auf lineare Gleichungen führen. Von Wurzelgleichungen wird in der Untertertia noch nicht die Rede sein, da der Wurzelbegriff unbekannt ist. Diese Gleichungen gehören also hinter die Wurzelrechnung.

Obwohl in diesem Kapitel noch nicht vom Funktionsbegriff ausführlich die Rede sein soll, das Eingreifen dieses Begriffes in den arithmetisch-algebraischen Unterricht vielmehr im nächsten Abschnitt mit erörtert werden soll, muß doch eine dahin gehörige Frage hier angeschnitten werden. Es ist von manchen Seiten befürwortet worden, die graphische Darstellung bereits bei der Lösung der Gleichungen ersten

[1] L. Matthießen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der literalen Gleichungen, 2. Aufl., Leipzig (Teubner) 1896.

[2] E. Netto, Elementare Algebra, 2. Aufl., Leipzig (Teubner) 1914.

Grades mit einer Unbekannten, und zwar gleichzeitig oder womöglich noch vor der arithmetischen Lösung der Gleichung einzuführen. Das ist meines Erachtens strikte abzulehnen. Die Rolle der graphischen Lösung von Gleichungen wird später im Zusammenhange zu erörtern sein. Hier genügt, daß auf jeden Fall bei den linearen Gleichungen mit einer Unbekannten die arithmetische Lösung immer einfacher ist als die graphische, und daß ein so enges Nebeneinander von Unbekannter x und unabhängiger Veränderlicher x im Untertertianerkopf nur Verwirrung anstiftet.

Auch bei den Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten ist dringend zu raten, die arithmetische Lösung vorwegzunehmen. Sie gibt — im Bereiche der rationalen Zahlen — rechnerisch genaue Werte, ist nicht von unglücklichen Lageverhältnissen, wie sie Koeffizienten zuweilen verursachen können, abhängig und nicht auf zwei Unbekannte beschränkt.

Es gibt bekanntlich mehrere Methoden zur arithmetischen Lösung linearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten, die im wesentlichen auf zwei hinauslaufen. Die eine ist die Additionsmethode, die andere die Substitutionsmethode. Die Gleichsetzungsmethode ist nur ein spezieller Fall der letztgenannten. Soll man sich mit einer Methode begnügen oder beide einüben? Ich bin unbedingt dafür, alle beiden Methoden im Unterricht zu berücksichtigen und die Schüler in ihrem Gebrauch zu üben. Einer mechanischen Drillerei beugt man vor, wenn man die Schüler anhält, alle aus der besonderen Natur der Aufgabe sich ergebenden Vereinfachungen zu beachten, zunächst also zu untersuchen, welche Methode am schnellsten zum Ziel führt, dann etwa statt nach einer Unbekannten nach einem Vielfachen von ihr, das in der zweiten Aufgabe auch vorkommt, aufzulösen und was dergleichen Dinge mehr sind. Auch das Gleichungslösen soll eine Schule des Denkens sein, nicht auf eine Mechanisierung einer alleinseligmachenden Methode hinauslaufen.

Man hat mit Recht der üblichen Behandlung der Gleichungen vorgeworfen, daß sie nicht sorgfältig genug alle möglichen Fälle erörtere. So sind z. B. bei der linearen Gleichung $ax + b = 0$ drei Fälle zu unterscheiden: Für $a \neq 0$ hat die Gleichung eine Lösung $-\frac{b}{a}$, für $a = 0$ und $b \neq 0$ keine Lösung, für $a = 0$ und $b = 0$ unendlich viele Lösungen. Die gleiche Sorgfalt in der Durchnahme aller möglichen Fälle ist bei den linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten und bei der quadratischen Gleichung am Platze. Vielleicht schließt man in den wiederholenden Aufbau des Zahlbegriffes in Prima auch eine Wiederholung der Gleichungen ein und achtet dabei genau auf vollständige Erörterung aller möglichen Fälle.

In der Zahl der Unbekannten wird man nicht zu weit gehen. Andererseits wäre es aber verfehlt, nur zwei Unbekannte zuzulassen. Die Beachtung aller aus dem besonderen Bau der Gleichungen sich ergebenden Abkürzungen des Lösungsweges ist besonders bei mehreren Unbekannten reizvoll.

Wie soll man sich nun zu der Frage stellen, ob das allgemeine Problem von n Gleichungen mit n Unbekannten auf der höheren Schule zu behandeln ist? Diese Frage ist im wesentlichen mit der anderen identisch, ob man die Determinanten in die höheren Schulen einführen will. Das ist vor einigen Jahrzehnten versucht

worden; Reidt[1] hat 1874 ein methodisch, Diekmann[2] 1881 ein mehr systematisch angelegtes Buch über eine schulgemäße Determinantenlehre geschrieben. Auch andere haben dann die Determinanten aufgenommen, Gallenkamp, Heis usf. P. Jeurich z. B. stellte in seinen Beiträgen zur Methodik des mathematischen Unterrichts mit Berücksichtigung der Determinantenfrage (Programm Realschule 1. Ordnung Magdeburg 1882) den Leitsatz auf: „Für Prima der Realschulen erscheint die Einführung der ‚Determinanten' in einer Behandlung, die der intensiven Vertiefung in die mathematische Wissenschaft innerhalb des Bildungskreises der Schule entspricht, durchaus wünschenswert." Heute ist die Bewegung schon wieder auf dem absteigenden Ast. Die Determinanten n ten Grades sind, von dem Pietzkerschen Lehrbuch abgesehen, jetzt aus den Schulbüchern verschwunden. Selbst die Diekmannschen Lehrbücher verzichten in ihren neuen Auflagen auf sie. Andere Lehrbücher beschränken sich auf Determinanten bis höchstens dritten Grades. So geschieht es z. B. auch in den neuen Unterrichtswerken von Schwab-Lesser, Beinhorn u. a. Dieses Zurückstecken des Zieles hängt gewiß damit zusammen, daß inzwischen andere Gebiete an die Pforte der höheren Schule geklopft und Einlaß gefunden haben.

Selbstverständlich kann von Determinanten immer erst in den Oberklassen die Rede sein. Ihre Anwendung dürfte auch nur dann berechtigt erscheinen, wenn sie durch das häufige Auftreten linearer Gleichungen mit drei oder mehr Unbekannten nahegelegt werden. Besser als mit der abstrakten Gleichungslehre wird also die Notwendigkeit der Determinanten mit ihrer Verwendbarkeit in der analytischen Geometrie begründet. Eine Abhandlung von Löwe[3] führt diesen Weg näher aus. Ich halte auch solchen Versuchen gegenüber die Determinanten auf der höheren Schule für überflüssig. Ich lasse ihre gelegentliche Erwähnung und die Benutzung der Schreibweise in der analytischen Geometrie gelten, — notwendig ist auch sie nicht — die Entwicklung der Rechenoperationen mit Determinanten aber halte ich für entbehrlich.

Dann ein Wort zu den diophantischen Gleichungen ersten Grades. Früher ein wesentlicher Bestandteil fast aller Aufgabensammlungen — ob auch des Unterrichts, ist nicht so sicher — sind sie mehr und mehr aus ihnen verschwunden. Auch hier gilt ähnliches wie eben bei den Determinanten. Es ist gar nichts dagegen einzuwenden, wenn die mathematisch interessante Fragestellung, die den diophantischen Gleichungen zugrunde liegt, gelegentlich in der Schule auftaucht. Der Begriff der überbestimmten Gleichung ist ja sehr wichtig. Dann aber ausführlich eine oder gar mehrere Lösungsmethoden zu entwickeln, zu diesem Zwecke womöglich ausdrücklich noch Kongruenzen oder Kettenbrüche einzuführen, halte ich für un-

[1] F. Reidt, Vorschule der Theorie der Determinanten, Leipzig (Teubner) 1874.

[2] J. Diekmann, Anwendung der Determinanten und Elemente der neueren Algebra auf dem Gebiete der niederen Mathematik, Leipzig (Teubner) 1881. Andere Bücher wurden veröffentlicht von Kaiser 1882, Sersawy 1878, Mansion 1878, vorher von Hesse 1871, Studniŏka 1871 u. a. Interessant ist eine Kontroverse zwischen Bardey und Diekmann in der ZmnU in den Jahren 1881 und 1882. Darin spricht sich Bardey energisch gegen den praktischen Wert der Lösung von Gleichungen mit Determinanten aus.

[3] E. Löwe, Die Verwendung der Determinanten im Unterricht der höheren Schulen, Programm Königl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasium Köln, Ostern 1912.

nötig. Das sind Exkurse, die sich sehr gut für einen Schüler der Oberklassen zu gelegentlichem privaten Studium eignen; die Allgemeinheit aber sollte man nicht damit befassen. Wenn der Begriff in der Klasse zur Sprache kommt, genügt es, an einfachen Beispielen Lösungen durch Probieren zu suchen; außerdem empfehle ich dringend, bei Gelegenheit der linearen Funktionen die Lösung von diophantischen Gleichungen und den Gang der die Funktion darstellenden Geraden durch ganzzahlige Gitterpunkte des Koordinatensystems in Beziehung zu setzen. Aus dieser graphischen Darstellung läßt sich mancherlei über Lösungsmöglichkeiten, Wurzelanzahl und Wurzelbau unmittelbar ablesen.

Ich will hier noch einer Lücke gedenken, die sich wohl durchweg im arithmetisch-algebraischen Unterricht der deutschen Schulen findet, während man sie in anderen Ländern zu vermeiden gewußt hat. Es fehlt eine systematische Behandlung der linearen Ungleichungen. Es würden hier schon ganz wenige Dinge ausreichen, damit der Schüler nicht wie jetzt ratlos der Rechnung mit Ungleichungen gegenübersteht. Man nimmt an, daß solche Diskussionen, wie sie z. B. bei Diskriminantenuntersuchungen notwendig werden, auch ohne eine systematische Zusammenstellung der Gesetze für das Rechnen mit Ungleichungen ausführbar sind, indem man jeweils auf primitive Überlegungen zurückgreift. Wie schlimm es aber mit diesen primitiven Überlegungen steht, zeigen Trugschlüsse allereinfachster Art, bei denen es auf Ungleichungen ankommt. Nur ein Beispiel: Man multipliziert die Gleichung $\log \frac{1}{2} = \log \frac{1}{2}$ mit der Ungleichung $3 > 2$ und erhält:

$$3 \cdot \log \tfrac{1}{2} > 2 \log \tfrac{1}{2}$$
$$\log (\tfrac{1}{2})^3 > \log (\tfrac{1}{2})^2,$$

woraus dann $\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$ folgt. Gegen derlei Irrtümer sollte doch derjenige, der etwas von Arithmetik und Algebra versteht, gewappnet sein.

3. Eingekleidete Gleichungen.

Man geht nicht fehl mit der scheinbar absurden Behauptung, daß die eingekleidete Gleichung früher da war als die nicht eingekleidete. Im ersten Rechenbuch, das wir kennen, finden wir eingekleidete Gleichungen, aber keine einzige nicht eingekleidete. Auch heute nehmen die Kapitel über eingekleidete Gleichungen in den Aufgabensammlungen einen sehr großen Raum ein.

Die eingekleideten Gleichungen aus älterer Zeit, man denke etwa an die Epigramme, die Maximus Planudes gesammelt hat, oder an die Rätselaufgaben der Cossisten, haben fast nie einen praktischen Hintergrund. Ihre Bedeutung ist mit ihrer arithmetischen Behandlung erschöpft. Es ist die Methode des l'art pour l'art. Höchstens wird mit ihnen der Zweck verfolgt, die Rechenkunst ein wenig ergötzlich zu machen. Der fatale Beigeschmack, der dem Beiwort „eingekleidet" anhaftet, der Gedanke an etwas Künstliches, an eine Verkleidung, die den wahren Kern verbirgt, hat für jene alten Aufgaben seine Berechtigung.

Die Aufgabensammlungen unserer Zeit atmen zum Teil noch immer diesen Geist einer früheren Zeit. Nur allmählich bricht sich der Gedanke Bahn, daß man die Aufgaben so wählen müsse, daß ihr Inhalt herkommt und wieder hinführt zu einer wirklich mathematischen Anwendung.

Zunächst freilich mag man sich darüber klar werden, daß auch die eingekleideten Gleichungen einen formalen Zweck erfüllen; der Schüler soll lernen, eine in Worten ausgesprochene Beziehung zwischen irgendwelchen Größen in die symbolische Schreibweise umzusetzen. Man wird auf keinen Fall mit verwickelten Problemen der Wirklichkeit beginnen können.

In der Wirklichkeit ist durchaus nicht immer klar, welche Größen als bekannt vorauszusetzen sind. Man wird erst untersuchen müssen, welche von den in Betracht kommenden Werten durch Beobachtung oder Messung sich am besten bestimmen lassen. Ist man sich dann schließlich darüber klar, welche von den vorhandenen Möglichkeiten unter den gegebenen Umständen am schnellsten zum Ziel zu führen verspricht, so handelt es sich darum, diese Werte, nötigenfalls durch eigene Beobachtung, festzustellen. Erst dann kann man zum Ansatz der Gleichungen kommen. Dieser Ansatz setzt wieder voraus, daß man die zu verwendende Beziehung, etwa das physikalische Gesetz oder die arithmetische Formel, kennt. Dabei ist dann noch oft zu berücksichtigen, daß die Verhältnisse der Wirklichkeit in der einen oder anderen Weise zu idealisieren sind, damit der Ansatz überhaupt möglich ist. Man muß Erscheinungen, die man als nebensächlich ansieht — das zu beurteilen erfordert natürlich auch wieder eine genaue Kenntnis der Sachlage — außer Betracht lassen, also z. B. bei Legierungsrechnungen die Änderungen in der Dichtigkeit der Metalle, bei Leistungsaufgaben die Verschiedenartigkeit der Leistungen der einzelnen Arbeiter usf. Jetzt erst setzt der eigentlich arithmetische Teil der Aufgabe ein. Dem Vorspiel — um mit G. Hauck zu sprechen — entspricht dann ebenso ein Nachspiel. Man hat das erhaltene Ergebnis zu erörtern, hat sich etwa durch eine Probe oder, wenn das möglich, durch eine Nachprüfung von der Richtigkeit des Ergebnisses zu überzeugen, insbesondere zu untersuchen, wenn die Aufgabe auf mehrere Ergebnisse geführt hat, ob alle, und wenn nicht, welche Werte Bedeutung haben.

Man wird die Frage aufwerfen, ob es wirklich Aufgabe der Mathematik ist, neben der eigentlichen arithmetischen Aufgabe auch dieses lange Vor- und Nachspiel mit zu übernehmen, ob man nicht vielmehr solche Erörterungen den jeweiligen Anwendungsgebieten überlassen solle. Die Frage ist im wesentlichen identisch mit der anderen: Gehört auch die angewandte Mathematik zur Mathematik? Man beachte, daß hier, wo es sich um Arithmetik und Algebra handelt, zur „Angewandten" auch die Geometrie zählt. Ich stehe nicht an, die Frage, möge sie für die Wissenschaft entschieden werden wie sie wolle, für die Schule zu bejahen. Wenn wir wirklich in der Schule das Hin und Her zwischen Mathematik und Welt der Wirklichkeit mit in Rechnung ziehen wollen, so ist uns damit der Weg vorgezeichnet. So bleibt uns also das Ziel, das uns bei der Behandlung der eingekleideten Aufgaben vorschweben soll: Aus der Wirklichkeit das mathematische Problem herauszuschälen und das mathematische Ergebnis wieder in die Welt der Wirklichkeit zu übertragen.

Ich sagte eben, das Ziel. Denn das ist ja klar, man kann nicht damit den Anfang machen. Man wird selbstverständlich von Fällen ausgehen müssen, in denen alle jene komplizierten Vorfragen ausscheiden. An erster Stelle stehen da die sogenannten Wortgleichungen. Sie sind nichts anderes als in Worte umgesetzte abstrakte Gleichungen. „Von welcher Zahl ist 410 das Zehnfache?" ist etwa ein einfachstes Beispiel

dafür. Man wird hier sofort auch den Spieß umdrehen und zur Übung vorgelegte Gleichungen in Worte fassen lassen. Schon hier ist es zweckmäßig, was später zur Notwendigkeit wird, ausdrücklich zu sagen, welche Größe man als Unbekannte einführt und mit x bezeichnet, und nach ausgeführter Rechnung das Ergebnis in einen Schlußsatz zu fassen.

In vielen Aufgaben, auch solchen, die ausdrücklich zur Einübung von Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten bestimmt sind, handelt es sich eigentlich um zwei Größen. Da stehen sich nun zwei Ansichten gegenüber: Die einen sagen, jede Aufgabe, die man mit einer Unbekannten lösen kann, soll der Schüler auch so lösen. Die anderen, zu ihnen gehört Max Simon, sagen, je mehr Unbekannte man einführt, desto einfacher und durchsichtiger wird das Problem. Meiner Meinung nach widersprechen sich beide Anschauungen gar nicht. Der Unterschied liegt nur darin, daß ich einmal die zu substituierende zweite Unbekannte ausdrücklich hinschreibe, das andere Mal sie nur im Kopfe habe. Ich glaube, daß deshalb auch nichts dagegen einzuwenden ist, wenn bei den Gleichungen mit zwei Unbekannten ganz einfache, auch mit einer Unbekannten ansetzbare Gleichungen zur Sprache kommen, damit an ihnen der innere Zusammenhang beider Ansatzformen zur Deutlichkeit gebracht wird.

Von den einfachen Vorübungen ist dann der Schritt nicht weit zu Aufgaben, deren Stoff dem früheren Rechenunterricht entnommen ist. Die bürgerlichen Rechnungsarten gehören methodisch in das Kapitel der linearen Gleichungen. Gewisse Aufgaben, besonders aus der Teilungs- und Mischungsrechnung, sind unbedingt viel schneller und leichter zu erledigen, wenn man Ansatz und Lösung der linearen Gleichung als bekannt voraussetzt. Alle arithmetischen Aufgabensammlungen lassen es sich nicht nehmen, an dieser Stelle den früher behandelten Stoff in ein neues Licht zu setzen. Die höheren Mädchenschulen in Preußen, in denen der Rechenunterricht in den unteren und mittleren Klassen zeitlich außerordentlich beschränkt ist, machen geradezu aus der Not eine Tugend und behandeln die bürgerlichen Rechnungsarten nach den Methoden der linearen Gleichungen mit besonderer Ausführlichkeit. Wenn freilich auch später bei den quadratischen Gleichungen die gleiche Ausführlichkeit wiederkehrt, wenn auch da Prozentrechnungen, einfache Zinsrechnungen, Mischungs- und Teilungsrechnungen in großer Zahl behandelt werden, so ist doch dazu zu bemerken, daß solche Aufgaben vielfach den Charakter einer künstlichen Konstruktion zeigen. Dem bürgerlichen Rechnen sind eben die Methoden der Gleichungen ersten Grades vertraut, wenn auch nicht in abstrakt arithmetischer Form, während ihm die Lösungswege der quadratischen Gleichungen wesensfremd sind.

Es ist begreiflich, daß die Mathematik dort, wo sie Anwendungen in größerem Maßstabe heranzieht, zu allererst an sich selbst denkt; deshalb wird sie in der Gleichungslehre, soweit der Lehrplan es irgendwie erlaubt, besonders gern Anwendungen aus der Geometrie bringen. Sehr beliebt sind von alters her Bewegungsaufgaben. Man kann diese Wertschätzung teilen, solange die Beispiele nicht von vornherein den Stempel der Unwirklichkeit an der Stirne tragen. Und damit kommen wir zu einem Punkte, der in gleicher Weise sich auf alle Anwendungen aus dem praktischen Leben oder aus irgendwelchen Wissensgebieten bezieht. Es genügt

nicht, daß die in der Aufgabe vorkommenden Größen jenen Gebieten entnommen sind, daß die Werte, die man den gegebenen Größen beilegt, im Bereich des Möglichen liegen, die Frage muß auch so gestellt sein, daß ihrer Beantwortung irgend ein Wert beizumessen ist. Man soll nicht nach der Seitenzahl eines Buches fragen, wenn die Anzahl der in ihm vorkommenden Silben in einer Zeile gegeben ist. Jeder würde eben in einem solchen Falle die letzte Seite aufschlagen und sehen, wieviel Seiten das Buch hat. Man wird recht viele Aufgaben dieser Art finden, wenn sie auch nicht alle so schlimm wie diese sind. Vielfach genügt eine kleine Abänderung in der Fassung, um dem Unwirklichen Leben zu geben. Spricht man, in dem ebengenannten Beispiel, nicht von einem Buche, sondern von einem Manuskript, das des Druckes harrt, und von dem man die Silbenzahl geschätzt hat, so hat man sofort ein Beispiel aus dem Leben. — Daß die Bewegungsaufgaben der geeigneteste Stoff für graphische Darstellungen linearer Funktionen sind, werden wir später noch sehen.

Sehr beliebt waren früher die auf Heron zurückgehenden Röhren- oder Brunnenaufgaben. Es kann so leicht nichts öder sein, als mehrere Seiten solcher Aufgaben mit den Schülern durchzugehen, wie es manche Sammlungen zu verlangen scheinen. Erst kommen zwei Röhren, dann drei Röhren usf. Der Grund für die frühere Beliebtheit dieser Aufgaben ist darin zu suchen, daß sie auf Bruchgleichungen führen. Es dürfte doch aber genügen, einige wenige Aufgaben zu lösen, und ihnen dann eine etwas modernere Fassung zu geben, etwa indem man von Talsperren spricht.

Aus allen Gebieten der Physik lassen sich zahlreiche und stofflich wertvolle Aufgaben, die auf Gleichungen ersten Grades führen, zusammenstellen. Freilich besteht hier eine gewisse Schwierigkeit. Wohl durchgehends setzt die Physik in unseren Schulen später ein, als die Durchnahme der Gleichungen ersten Grades erfolgt. Erst wenn der Physikunterricht bereits in Untertertia beginnt, was jetzt vielfach gefordert wird, tritt hier Wandel ein. Da es ausgeschlossen ist, den physikalischen Stoff den Gleichungen zuliebe in der Mathematik vorweg zu nehmen, bleibt nur übrig, bei Wiederholungen in späteren Klassen solche Aufgaben zu bevorzugen. Vielleicht greift auch gelegentlich der Physiker einmal zu solchen Aufgaben. Jedenfalls halte ich es für verfehlt, wenn eine Aufgabensammlung mit Rücksicht auf solche Lehrplanschwierigkeiten ganz auf physikalische Anwendungen verzichtet.

Für den nüchternen Mathematiker könnte damit die lange Reihe der Stoffgebiete erschöpft sein. Der mit den Neigungen seiner Schüler vertraute Pädagoge wird aber gern noch eine andere Gruppe von Aufgaben hinzufügen, die die Schüler in das Gebiet des Scherzes, der Rätsel hineinführt. Es wird vielen Mathematikern so gehen, daß sie in ihren Erinnerungen an die eigene Kindheit, an den Unterricht, den sie selbst empfangen haben, gerade solcher Aufgaben, die die Phantasie des Knaben durch ihre reizvolle Einkleidung gefangen hielten, noch heute gedenken. Es wäre verkehrt, diese Gruppe unwirklicher Aufgaben aus Gründen der Konsequenz streichen zu wollen. Man verbinde aber das Angenehme mit dem Nützlichen und gebe solche Phantasieaufgaben in Einkleidungen, die wortgetreu den Sammlungen der Vergangenheit entnommen sind. Damit erhalten die Schüler ungezwungen einen Einblick in die Geschichte der Mathematik und in die Denkweise der verschiedenen Völker. Wie sticht die blumenreiche Sprache der Inder ab von der abstrakten der

Griechen, wie merkwürdig ist es, daß einzelne Einkleidungsformen sich durch Jahrhunderte und Jahrtausende fast unverändert erhalten haben!

Wir haben bisher von den Gebieten gesprochen, denen die eingekleideten Aufgaben zu entnehmen sind. Nun ein Wort darüber, wie die Zahlenwerte in den Aufgaben zu wählen sind. Es ist begreiflich, wenn man in den Anfängen der eingekleideten Gleichungen möglichst einfache Zahlenwerte wählt und noch dazu solche, die auch zu einem einfachen Ergebnis führen. Man wird aber nicht immer bei solchen einfachen Werten stehen bleiben dürfen. Verschafft man sich die numerischen Unterlagen zu einer Aufgabe durch Beobachtungen und Messungen mit den Schülern, dann treten von selbst an die Stelle einfacher Zahlenverhältnisse dezimale Näherungswerte, und auch die Ergebnisse sind von dieser Art. Die Aufgabensammlung kann solche mit einer praktischen Betätigung der Schüler verknüpften Aufgaben nicht geben, höchstens gelegentlich andeuten. Dafür, daß nicht alle Aufgaben, die sie bringt, gar zu einfacher Natur sind, sorgt sie durch Benutzung von komplizierteren Zahlenwerten. Leider hat es sich vielfach eingebürgert, daß auch in solchen Fällen die Werte so gewählt werden, daß das Ergebnis möglichst einfach ist. Daß das gelegentlich einmal vorkommt, dagegen ist nichts einzuwenden, zumal in solchen Fällen, aus denen irgend etwas Besonderes zu lernen ist. Im allgemeinen aber soll der Schüler nicht die Gewohnheit annehmen, in dem Aufgehen der Aufgabe ein hinreichendes oder gar notwendiges Kriterium für die Richtigkeit seiner Lösung zu sehen.

Nicht alle Aufgaben wird man nur mit ziffernmäßig gegebenen Werten lösen lassen, vielmehr hin und wieder auch Lösungen mit allgemeinen Buchstabenzahlen fordern. Natürlich wird man dann nachträglich auch für die Buchstaben Zahlen einsetzen lassen. Wenn nun aber einige Aufgabensammlungen eine Aufgabe konsequent erst in Buchstabenzahlen formulieren und dann erst mehrere, vielleicht vier oder sechs, Zahlenreihen für die eben eingeführten Buchstaben angeben, so sollte der Lehrer auf keinen Fall die Schüler alle Aufgaben durchrechnen lassen, auch nicht etwa eine Aufgabe in der Schule vorrechnen, eine oder zwei andere nach diesem Schema zu Hause nachrechnen lassen. Das liefe auf eine Mechanisierung des Gleichungslösens hinaus, das gänzlich abzulehnen ist. Die Sammlungen wollen gewiß mit ihrer Vielseitigkeit in den Zahlenwerten nur die Möglichkeit geben, in verschiedenen Jahren, womöglich auch in einer Klasse bei verschiedenen Abteilungen abzuwechseln.

Noch eine Frage mag hier gestreift werden, die vor Zeiten die Gemüter heftig bewegt hat. Ist es gestattet, in die Gleichungen Benennungen einzuführen? Wählen wir ein bestimmtes Beispiel; ich entnehme es einem Aufsatz von E. Meyer in der ZmnU aus dem Jahre 1874. Die damals viel diskutierte Proportionsmethode für die Lösung von Regeldetriaufgaben legte die Frage nahe, ob man bei der Aufgabe: „5 Gänse kosten 7 Taler; was kosten 8 Gänse?“ die zur Lösung führende Proportion schreiben könnte:

$$5 \text{ Gänse} : 7 \text{ Taler} = 8 \text{ Gänse} : x \text{ Taler}.$$

Selbstverständlich ist das in dieser Form unzulässig. Man bilde nur etwa die Produktengleichung. Gemeint ist die Vergleichung des „Wertes“ von 5 Gänsen usw.

2 kg =	2000 g
3 kg =	3000 g
6 kg =	60000000 g.

2 m =	200 cm
3 m =	300 cm
$6\ m^2$ =	$60000\ cm^2$.

Wieder möchte ich empfehlen, zur Verdeutlichung auf den nebenstehenden Trugschluß hinzuweisen. Der Physiker wird sagen kg · kg ist nicht kg, sondern kg^2. Er wird sofort auf das nach seiner Meinung richtige Gegenbeispiel hinweisen. Der Mathematiker wird dazu sagen: „Mit einer benannten Zahl darf man nicht multiplizieren." Wer hat nun recht?

4. Gleichungen zweiten Grades.

Die Lösung der Gleichungen zweiten Grades setzt das Ausziehen der Quadratwurzeln voraus. Vielfach geht ihnen also die gesamte Wurzellehre voraus. In anderen Fällen wird aus der Wurzellehre nur die Quadratwurzel herausgegriffen, und diese wird dann mit der Gleichung zweiten Grades zu einem Kapitel „Quadratisches", wie es H. Schubert genannt hat, zusammengefaßt. So fehlt beispielsweise im Lehrplan der preußischen Lyzeen von 1908 die allgemeine Wurzellehre, nur die quadratischen Gleichungen und deshalb die Quadratwurzeln werden behandelt.

Bei den ersten Beispielen gemischt quadratischer Gleichungen — die rein quadratischen bieten ja keine Schwierigkeiten — ist die Lösung jedesmal ausführlich mit Bildung der quadratischen Ergänzung usf. durchzuführen. Erst später wird man den allgemeinen Ausdruck für die Wurzeln der Gleichung entwickeln und von da an, nachdem man irgendeine Gleichung auf die Normalform gebracht hat, sofort die besonderen Werte in den Wurzelausdruck einsetzen. Die Normalform schreiben die einen in der Form $x^2 + ax + b = 0$, die anderen, um Brüche im Wurzelausdruck zu vermeiden, $x^2 + 2ax + b = 0$.

Auch bei den kubischen Gleichungen, bei der allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten usf. schreiben manche aus dem gleichen Grunde die Koeffizienten als geeignete Vielfache. Auf keinen Fall darf der Schüler nebeneinander und auch nicht etwa bei Lehrerwechsel hintereinander beide Schreibweisen kennen lernen, da sonst eine heillose Verwirrung angerichtet wird. Welche von den Schreibweisen man wählt, ist eine Frage zweiten Ranges. Ich ziehe die erste vor. Zwar treten dann in den allgemeinen Ausdrücken mehr Brüche auf; aber auch bei der anderen Wahl würde man solchen Brüchen, wenn auch in der allgemeinen Formel, so doch nicht bei der Einsetzung der Werte entgehen.

Was die Wahl der Beispiele anlangt, so hüte man sich, nur solche zu wählen, bei denen die Wurzeln aufgehen. An einer Anzahl von Beispielen muß der Schüler auch erfahren, wie man vorzugehen hat, wenn die Koeffizienten der Gleichung drei- oder vierstellige Näherungswerte sind.

Es ist dringend zu empfehlen, neben dem Normalverfahren die Lösung einfacher quadratischer Gleichungen mit rationalen Wurzeln nach der auf Vietas Wurzelsatz beruhenden Methode der Faktorenzerlegung schriftlich und mündlich zu üben.

Von den mancherlei Arten „schwieriger quadratischer Gleichungen", von denen früher viel Aufhebens gemacht wurde, sind zunächst Bruch- und Wurzelgleichungen anzuführen, dann solche, in denen eine geeignete Substitution zum Ziele führt; ich nenne als einfachere Gruppe $x^{2n} + ax^n + b = 0$. Schließlich kommen noch die

reziproken Gleichungen in Betracht. Ist auch gegen eine gelegentliche Erwähnung nichts einzuwenden, so ist doch davor zu warnen, die Schüler mit diesen nach ganz mechanischen Verfahren zu lösenden Gleichungen allzu lange zu behelligen. Sehr wichtig kann bei manchen der genannten Arten von schwierigeren Gleichungen die Diskussion der Ergebnisse werden, wenn man nämlich Wert darauf legt, die sämtlichen, also auch die imaginären Wurzeln zu bestimmen. Eine gewisse Laxheit in dieser Hinsicht ist nicht selten. Auch sind z. B. bei Wurzelgleichungen nicht immer alle Wurzeln, die man formal erhält, wirklich Wurzeln der Gleichung, wie wir schon in Abschnitt 2 (S. 259) an einem Beispiele gezeigt haben.

Wir haben bisher nur arithmetische Lösungen von quadratischen Gleichungen besprochen. Auf graphische Methoden, wie sie sich aus der Diskussion der Funktion zweiten Grades ergeben, kommen wir im nächsten Kapitel zurück. Hier nur ein Wort über konstruktive Lösungen mit Gerade und Kreis, welche die Geometrie der Griechen nahelegen. Es genügt ein Beispiel der Lösung für viele.[1] Die vorgelegte Gleichung sei

$$x^2 - ax + bc = 0,$$

wobei a und ebenso das Produkt bc positiv sei. Hier ist das konstante Glied im Gegensatz zu sonstigen Lösungsmethoden als ein Produkt angesetzt. Wenn man dann über $b + c$ als Sehne den Kreis mit dem Radius $\frac{a}{2}$ schlägt und durch den Teilpunkt von $b + c$ den Durchmesser legt, so sind die Abschnitte x_1 und x_2, in die jener Teilpunkt den Durchmesser teilt, die gesuchten Wurzelwerte. In der Tat ist

$$x_1 + x_2 = a, \qquad x_1 \cdot x_2 = bc.$$

Ähnliche Lösungen ergeben sich für die anderen Fälle. Auch Diskussionen über die Reellität der Wurzeln lassen sich ungezwungen anschließen.[2]

Früher erfreute sich neben der arithmetischen und der geometrischen Lösung der Gleichung zweiten Grades auch eine goniometrische Methode großer Beliebtheit. Wenn sie sich auch noch in manchen Lehrbüchern findet, ist sie doch mit Recht aus dem Unterricht fast ganz ausgemerzt.

Die Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten waren früher ein beliebtes Steckenpferd der Schulmathematiker. Einen Einblick in dieses Gebiet, wie auch in das der schwierigeren Gleichungen mit einer Unbekannten, erhält man am besten durch das umfangreiche Werk von E. Bardey, Algebraische Gleichungen[3], das in verhältnismäßig schneller Folge sechs Auflagen erlebt hat. Die beiden letzten Auflagen sind von F. Pietzker herausgegeben, Leipzig (Teubner) 1908.

---

[1] Vgl. Ziegler, Über das Zusammentreffen der graphischen und der goniometrischen Auflösung quadratischer Gleichungen, ZmnU 1 (1870), S. 212ff.

[2] Recht beachtenswert will mir von den vielen im Grundgedanken mehr oder weniger übereinstimmenden Verfahren die Kreisringmethode von Grünholz erscheinen; vgl. E. Grünholz, Die Behandlung der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ nach der Kreisringmethode, Lehrproben und Lehrgänge, 1914, 2. Heft (119. Heft), S. 68ff., und dazu Brües, Über die geometrische Lösung der quadratischen Gleichung. ZmnU 46 (1915) S. 208ff.

[3] Vgl. auch E. Bardey, Zur Formation quadratischer Gleichungen, 2. Aufl., Leipzig (Teubner) 1894.

Im Gegensatz zu diesen Methodikern kommt man heute immer mehr von einer intensiven, rein arithmetischen Behandlung dieser Gleichungen in der höheren Schule ab. Geometrische Methoden übernehmen die Führung; man faßt das allgemeine Problem, das der bei den Gleichungen dritten Grades haltmachenden Schule auf arithmetischem Wege unzugänglich ist, als Diskussion der Schnitte zweier Kegelschnitte. Davon wird im nächsten Kapitel die Rede sein. Hier, wo es sich um die arithmetischen Methoden handelt, wird zunächst die Tatsache zu konstatieren sein, daß die Kombination zweier Gleichungen zweiten Grades im allgemeinen Fall auf eine Gleichung vierten Grades führt. Das wird man auch dem Schüler zeigen. Lösbar ist zunächst die Gruppe von Aufgaben, bei denen die eine Gleichung nur vom ersten Grade wird. Dann kommt man auf eine Gleichung zweiten Grades.

Von den anderen Gleichungen interessieren bestimmte Typen, bei denen einfache Methoden schnell zum Ziel führen, so wenn die Summe der Quadrate und das Produkt der Unbekannten oder wenn die Summe und die Differenz der Quadrate gegeben sind oder doch errechnet werden können. Diese Fälle entsprechen übrigens durchweg solchen, bei denen auch die graphischen Methoden sich besonders einfach gestalten. Weiter zu gehen, etwa noch die Fälle zu betrachten, bei denen der homogene Charakter der Gleichungen die Lösung ermöglicht, halte ich für unnötig.

Zum Schluß noch ein Wort über diophantische Gleichungen zweiten Grades, mit denen nebenbei gesagt Diophant selbst nichts zu tun hat. Die Schule pflegt aus der reichen Fülle meist nur eine einzige diophantische Gleichung herauszugreifen, die besonderes Interesse hat, die pythagoreische Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$. Die Lösungen sind bekannt.[1] — Man verweilt gerade in unseren Tagen bei dem Problem gern etwas länger, weil es in naher Beziehung zu einem anderen Problem steht, das die Mathematiker und noch mehr die Laien in den letzten Jahren außerordentlich beschäftigt hat; ich meine den großen Fermatschen Satz. Es ist natürlich, daß die Schüler ihren Mathematiklehrer über dieses mathematische Problem ausfragen, über das in allen Zeitungen zu lesen ist, ja das sogar in Gesellschaften, denen sonst mathematische Gespräche wahrlich fremd sind, lebhaft erörtert wird. Aber nicht nur um diese Neugierde zu befriedigen, wird es gut sein, das Fermatsche Problem in der Schule zu berühren, noch ein anderer Grund scheint mir sehr beachtenswert. Der Schüler sieht hier an einem leicht verständlichen Beispiel, daß es auch in der Mathematik offene Fragen gibt, daß auch diese Wissenschaft nicht, wie gerade Schüler und Laien zu meinen geneigt sind, etwas gänzlich oder auch nur in seinen einfachsten Fragestellungen Erledigtes ist. Wenn der Unterricht dann noch erreicht, daß die Schüler vor unnützer Zeitverschwendung auf

[1] Vgl. dazu die Zusammenstellung in: E. Meyer, Diametralzahlen und pythagoreische Dreiecke, ZmnU 43 (1912), S. 281ff. Über die Frage liegt eine außerordentlich reichhaltige Literatur vor. Ich erwähne nur: O. Lesser, Wie verteilen sich die freien Eckpunkte aller pythagoreischen Dreiecke über die Ebene, wenn die Dreiecke mit einer Kathete über einer festen Geraden stehen und allen der auf dieser Geraden liegende Hypothenusenpunkt gemeinsam ist? Ubl 11 (1905), S. 6ff. und S. 54ff. — Eine auch den Schülern zugängliche elementare Darstellung habe ich gegeben in W. Lietzmann, Der pythagoreische Lehrsatz (MPhB 3), 2. A., Leipzig (Teubner) 1917.

der Suche nach einer eigenen Lösung gewarnt werden, so ist das ein erwünschter Nebenerfolg.

Wie der Lehrer sich seiner Aufgabe erledigt, muß ihm überlassen bleiben. Der eine Weg ist der, mit der Erledigung des Falles für die Exponenten 3 und 4 dem Schüler eine Ahnung von der Schwierigkeit beizubringen. Der Fall $n = 4$ wird ausführlich in der Enzyklopädie von Weber-Wellstein und in meinem Pythagorasbändchen behandelt. Vielleicht aber empfiehlt es sich noch mehr, die Schüler an die Quelle heranzuführen, an Eulers Algebra. Ein anderer Weg ist der, einige der unzähligen Lösungsversuche kritisch zu betrachten. Ein Aufsatz von Maennchen[1] wird dem Lehrer dabei gute Dienste leisten. Bis in das Gebiet, in dem wahrscheinlich die Lösung des Fermatschen Problems zu suchen ist, die algebraische Zahlentheorie, die Schüler hineinzuführen, ist ausgeschlossen.

5. Gleichungen höheren Grades.

In vielen Schulen wird man sich in der Gleichungslehre mit der vollständigen Erledigung der quadratischen Gleichungen begnügen können und bei Gleichungen höheren Grades lediglich auf Näherungslösungen graphischer oder numerischer Art eingehen. An den Realanstalten geht man dagegen in der vollständigen arithmetischen Behandlung literaler Gleichungen zumeist noch einen Schritt weiter vor.

Zunächst werden im Anschluß an das Moivresche Theorem die binomischen Gleichungen behandelt, also Gleichungen der Form $x^n - a = 0$. Wie weit die Beziehungen dieser Gleichungen zum Problem der Kreisteilung, arithmetisch oder geometrisch aufgefaßt, in den höheren Schulen aufgedeckt werden, darüber gehen die Meinungen auseinander. Es ist begreiflich, wenn in Braunschweig das 17-Eck, das sich am Gauß-Denkmal findet, dem Lehrer eine willkommene Anknüpfung an die Gaußsche Entdeckung gibt. Sehr häufig aber wird diese Konstruktion nicht gegeben werden; eine Darstellung der Aufgabe findet sich beispielsweise bei Holzmüller im dritten Teil seiner Elementar-Mathematik, wo sich die Lösung an die von Schlömilch in der Geometrie des Maßes gegebene anschließt.[2] Die Theorie der Kreisteilung gibt auch, wenn man sie zur Zahlentheorie, insbesondere zum Primzahlproblem in Beziehung setzt, eine gute Gelegenheit, die Schüler an noch ungelöste Probleme der Primzahllehre heranzuführen.

In fast allen Realanstalten wird die arithmetische Lösung der Gleichungen dritten Grades behandelt. Von Freunden der Reformbewegung ist mehrfach vorgeschlagen worden, man solle sich mit numerischen oder graphischen Lösungen begnügen; insbesondere hat sich Klein sehr lebhaft dafür ausgesprochen. Es sieht nicht so aus, als ob die Reform mit diesem Vorschlag durchdringen wird. Die graphischen Methoden liefern ebenso wie die numerischen im allgemeinen nur die reellen Werte. Es gibt zwar Methoden, auch der komplexen Werte auf graphischem Wege habhaft zu werden, aber sie sind wenig bekannt.[3] Wenn nun auch für die prak-

[1] Ph. Maennchen, Lösungen und Löser des großen Fermatschen Problems, ZmnU **45** (1914), S. 81ff.

[2] Vgl. auch S. 137 Anmerk. 1.

[3] Vgl. z. B. K. Quensen, Konstruktion der komplexen Wurzeln von Gleichungen 2. und 3. Grades, ZmnU **47** (1916) S. 361ff.

tischen Anwendungen fast ausschließlich die reellen Wurzeln in Betracht kommen, so sind doch aus systematischen Gründen viele Mathematiklehrer nicht geneigt, auf die komplexen Wurzeln zu verzichten. Kein Vorschlag, der von Freunden der Reform gemacht wurde, ist so bekämpft worden wie der, das Komplexe aus der Schulmathematik herauszutreiben; wir haben schon früher davon gesprochen. Man hat in Schulkreisen vielfach das unangenehme Gefühl, daß dem Schüler bei einer Beschränkung auf die reellen Wurzeln der Gleichung dritten Grades etwas Unvollständiges geboten wird, trotzdem er zu einer vollständigen Lösung des Problems wohl imstande wäre. Eine Rolle wird auch die Tatsache spielen, daß erfahrungsgemäß die Schüler die Cardanische Formel gern und mühelos anwenden — selbst dann, wenn sie ihre Ableitung schon längst vergessen haben.

Die arithmetische Lösung der Gleichung dritten Grades geschieht je nach dem Vorzeichen der Diskriminante nach der sogenannten Cardanischen Formel oder nach dem Casus irreducibilis. Man bringt beide Male die Gleichung erst auf die reduzierte Form, bei der also das quadratische Glied in Wegfall gekommen ist.[1] Auf diese reduzierte Form kommt man durch eine Substitution $y = x + m$, wo m in geeigneter Weise zu bestimmen ist. Fehlt in der Gleichung, was recht oft bei Aufgaben aus der Stereometrie vorkommt, das lineare Glied, so führt die Substitution $y = 1 : x$ schneller zum Ziel.

Bei der Ableitung der Cardanischen Formel substituiert man dann $x = u + v$ und erhält für u und v durch ein zweckmäßiges Verfahren zwei Gleichungen, die man nach den bei den quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten entwickelten Methoden lösen kann. Es sollte im Unterricht ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß diese Zerlegung der Wurzel in zwei leichtbestimmbare dritte Wurzeln nicht etwas Zwingendes ist, daß sich die Zweckmäßigkeit eines solchen Ansatzes nur aus dem praktischen Erfolg ergibt. Auch warum man aus der einen Lösung unter Berücksichtigung der dritten Einheitswurzel nicht neun, sondern drei Wurzeln der Gleichung erhält, kann nicht deutlich genug klargelegt werden.

Es verdient ausdrücklich hervorgehoben zu werden, daß die Aufteilung des Wurzelwertes in zwei Summanden, wie sie die Cardanische Formel vornimmt, manchmal große Unzuträglichkeiten für die numerische Berechnung haben kann. Ich hatte einmal Gelegenheit, die Abiturientenaufgaben einer Anstalt durchzusehen, in der es sich u. a. um eine Gleichung $\binom{x+2}{3} = 455$ handelte. Das Symbol war in der Kombinatorik nur für ganze positive Zahlen definiert, auch die ganze Einkleidung entsprach dieser Beschränkung auf ganzzahliges x. Das Natürlichste wäre gewesen, eine Wurzel durch Probieren zu finden. Das tut aber der Schüler merkwürdigerweise im allgemeinen nicht — ich komme noch darauf zurück. Also die Schüler folgten der gewohnten Marschroute und kamen auf einen Ausdruck:

$$\sqrt[3]{1365 + 1364{,}99} + \sqrt[3]{1365 - 1364{,}99},$$

[1] Die nicht von der reduzierten Form ausgehende Herleitung möge man z. B. bei H. E. Timerding, Die kubische Gleichung, ZmnU 47 (1916) S. 24ff. nachlesen. Vgl. dazu noch Quensen, Zur Lösung der kubischen Gleichung. Ubl 22 (1916) S. 53.

den sie auf teilweise logarithmischem Wege erhalten hatten. Zieht man jetzt $\sqrt[3]{0{,}01}$ auch wieder logarithmisch aus, so erhält man, da ja schon die zweite Ziffer unsicher ist, einen sehr ungenauen Wert. Damit wird auch das Ergebnis sehr ungenau, der Wurzelwert wird nicht ganzzahlig, sondern weicht schon in der dritten Stelle davon ab.

Bei Aufgaben ähnlicher Art ist es mir übrigens mehrfach vorgekommen, daß Schüler Ausdrücke wie den eben genannten $\sqrt[3]{0{,}01}$ überhaupt vernachlässigten, weil sie annahmen, daß die dritte Wurzel aus einer verhältnismäßig kleinen Zahl erst recht klein wird. Man sollte etwa die zweite, dritte, vierte bis zehnte Wurzel von 0,1 oder 0,01 ausrechnen lassen, um die Schüler vor Fehlschlüssen zu bewahren. Wer will, mag auch die Funktion $y = \sqrt[x]{a}$ graphisch skizzieren, wo a ein geeigneter echter Bruch ist. Sinn hat das freilich nur, wenn der Ausdruck mindestens auch für rationales x definiert ist.

Alles in allem: die Schüler dürfen die Cardanische Formel nicht mechanisch anwenden, sie müssen auch hier den Weg der Rechnung mit kritischen Augen zu betrachten lernen.

Wie vorsichtig man bei abgekürzter Rechnung manchmal sein muß, mag noch ein anderes Beispiel belegen, das ich einem kleinen Aufsatz von Witting[1] entnehme, und das ich hierher setze, obwohl es dem Sachgebiete nach nicht in den Zusammenhang paßt. Witting behandelt folgende Aufgabe: Gegeben ist eine Kugel vom Radius r, ihr ist ein Kreiszylinder umbeschrieben. Man soll den Radius und den Inhalt einer Kugel bestimmen, die die gegebene Kugel, den Mantel des Zylinders und die Grundfläche des Zylinders berührt. Es ergibt sich beim Kugelinhalt der Faktor

$$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3 = (\sqrt{2}-1)^6 = (3-2\sqrt{2})^3 = 99-70\sqrt{2}.$$

Nun ist zunächst bemerkenswert, daß beim Einsetzen eines bestimmten Näherungswertes für $\sqrt{2}$ durchaus nicht etwa alle diese Ausdrücke den gleichen Näherungswert ergeben. Man erhält z. B. für $\sqrt{2} \approx \frac{7}{5}$

$$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3 \approx 0{,}0046296;$$

$$(\sqrt{2}-1)^6 \approx 0{,}0040960;$$

$$(3-2\sqrt{2})^3 \approx 0{,}0080000;$$

$$(99-70\sqrt{2}) \approx 1.$$

Benutzt man den Näherungswert $\sqrt{2} \approx \frac{17}{12}$, so erhält man für den letzten Ausdruck[2]

[1] A. Witting, Ernst und Scherz im Gebiete der Zahlen. ZmnU 41 (1910), S. 45ff.

[2] Es ist übrigens leicht zu sehen, warum dieser letzte Ausdruck so sehr viel empfindlicher gegen einen relativen Fehler beim Ansatz von $\sqrt{2}$ ist als die vorhergehenden.

gar den ganz absurden Wert $-\frac{1}{6}$. Benutzt man den Wert $\sqrt{2} = 1{,}41412135624$, dann erhält man

$$99 - 70\sqrt{2} = 0{,}005050632.$$

Doch zurück zu den kubischen Gleichungen. Der Casus irreducibilis ist sehr einfach aus der Cardanischen Formel abzuleiten, wenn man den Lehrsatz von Moivre zur Hand hat. Steht dieser Satz nicht zur Verfügung, dann knüpft man an die Identität

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

an und kommt ohne Zwischenschaltung der komplexen Größen durch Koeffizientenvergleichung zum Ziel.

Anwendungen der kubischen Gleichungen bieten Probleme der Stereometrie in großer Zahl.[1] Man sollte nicht versäumen, hier die klassischen Aufgaben der Griechen, Würfelverdopplung, Trisektion des Winkels, Archimedische Teilung der Kugel durch parallele Ebenen ausführlich zu erörtern. Auch einige Beispiele aus der Jugendzeit der kubischen Gleichungen sind zu empfehlen. Es mag aber zum Schluß noch einmal ausgesprochen werden, daß diese Probleme ihre Erledigung genau so auch mit graphischen und numerischen Methoden finden können wie mit Cardanischer Formel und Casus irreducibilis.

Die Gleichung vierten Grades findet sich ausdrücklich wohl in keinem Lehrplan mehr. Immerhin wird die arithmetische Lösung hier und da noch, wie die Jahresberichte der Anstalten zeigen, behandelt. Ob man dazu nur eine Lehrstunde braucht, wie Max Simon meint, erscheint mir recht zweifelhaft. Die Lösung erfolgt nach der Cartesischen, der Eulerschen oder der Ferrari-Simpsonschen Methode.[2]

Man wird bestrebt sein, diejenigen Methoden der Lösung von Gleichungen 2., 3. und 4. Grades zu bevorzugen, die Gemeinsames hervortreten lassen[3]. Man reduziert zunächst die allgemeinen Gleichungen durch $x = x' - \frac{a}{2}$, $x = x' - \frac{a}{3}$, $x = x' - \frac{a}{4}$, man setzt dann $x' = u$ im ersten, $x' = u + v$ im zweiten, $x' = u + v + w$ im dritten Fall (das ist für die biquadratische Gleichung die Eulersche Lösung) und löst die geeignet herausgegriffenen Gleichungen für u, v und w.

Die numerische Lösung von Gleichungen höheren Grades geschieht vorwiegend nach der regula falsi und der Newtonschen Näherungsmethode; wenn Kettenbrüche bekannt sind, wird gelegentlich auch die Lagrangesche Methode benutzt. Bei den erstgenannten beiden Verfahren, auf die man sich in der Schule recht gut beschränken kann, knüpft die Herleitung am besten an die graphische Darstellung an. Wir kommen auf sie im nächsten Kapitel zurück.

---

[1] Es gibt zwei Aufgabensammlungen eigens für dieses Gebiet: E. Lampe, Geometrische Aufgaben zu den kubischen Gleichungen, Berlin (H. W. Müller) 1877; G. Emmerich, Kubische Aufgaben aus der Stereometrie, Weinheim (Ackermann) 1914.

[2] Vgl. darüber das S. 317 erwähnte Werk von Matthiessen.

[3] Vgl. auch H. Keferstein, Eine gemeinsame Methode zur Lösung der Gleichungen 2., 3. und 4. Grades, ZmnU 37 (1906), S. 169ff.

6. Die allgemeine Theorie der Gleichungen.

In den Realanstalten schließt man die Durchnahme der Gleichungen gewöhnlich mit einigen allgemeinen Sätzen aus der Gleichungslehre ab. Man geht dabei von dem Fundamentalsatz der Algebra aus, daß jede algebraische Gleichung mindestens eine Wurzel hat. Dieser Satz wird, man kann sagen, durchweg nur historisch ohne Beweis angegeben. Von den für diesen Satz gegebenen Beweisen wäre der erste Beweis von Gauß[1] in der vereinfachten Form, die ihm H. Weber in seiner Enzyklopädie der Elementarmathematik (Bd. 1) gegeben hat, sehr wohl der Schule zugänglich, wenn er auch einige Vertiefung in den Stoff erfordert. Die Lehrbücher verzichten aber auf einen Beweis, und ich glaube mit Recht. Denn wenn man wirklich die Schüler bis zu einem vollen Verständnis des Satzes bringen wollte, so wäre dazu eine längere Beschäftigung mit dem Gegenstand notwendig, weil man sich etwas intensiver mit den komplexen Zahlen befassen müßte. Nimmt man das graphische Bild der Funktion $n$ten Grades zu Hilfe, so kann man im Falle eines ungeraden n die Existenz einer reellen Nullstelle anschaulich machen. Wenn die Funktion nämlich aus dem positiven Unendlichen in das negative Unendliche geht, so muß sie, da sie stetig ist, einmal die x-Achse schneiden. Bei geradem n versagt aber diese Veranschaulichung, wenigstens wenn das konstante Glied positiv ist.

Aus dem Fundamentalsatz folgert man nun, daß die Anzahl der Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades n ist. Man zeigt zunächst, daß, wenn x_1 eine Wurzel der Gleichung ist, die linke Seite der auf 0 gebrachten Gleichung durch $x - x_1$ teilbar ist. Die Ableitung dieses einfachen Satzes stößt bei den Schülern oft auf Schwierigkeiten. Ich habe früher schon einmal den Grund angedeutet. Wenn man von der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{1}$$

die Gleichung

$$x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x_1 + a_n = 0 \tag{2}$$

abzieht, um an dem Ergebnis zu zeigen, daß der Ausdruck auf der linken Seite von (1) durch $x - x_1$ teilbar ist, so ist ein solches Verfahren bedenklich und angreifbar. In der Gleichung (1) bedeutet das Gleichheitszeichen ein Gleich-sein-sollen, in der Gleichung (2) ein wirkliches Gleichsein. Das halten die Schüler meist nicht auseinander, man kann es ihnen auch nicht übelnehmen. Die Schwierigkeit wird gehoben, wenn man an die Stelle der Bestimmungsgleichung (1) die in x identische Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

setzt; statt zu subtrahieren, kann man auch in diese Funktion den aus (2) gewonnenen Wert von a_n einsetzen.

Nun ist es ein Leichtes, die Produktdarstellung für den Ausdruck $n$ten Grades zu gewinnen und damit den Satz über die Wurzelanzahl zu beweisen. Aus der Pro-

[1] Eine gemeinsame Ausgabe der vier Beweise des Fundamentalsatzes von Gauß ist als Nr. 14 von Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften erschienen: Die vier Gaußschen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Funktionen in reelle Faktoren ersten oder zweiten Grades, herausgegeben von E. Netto, 3. Aufl., Leipzig (Engelmann) 1913.

duktdarstellung folgt dann wieder durch Koeffizientenvergleichung der Satz von Vieta, der die Beziehung zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten der Gleichung ausspricht. Freilich ist die Methode der unbestimmten Koeffizienten nicht selbstverständlich; der Beweis für die Richtigkeit ist aber bei endlicher Gliederzahl leicht zu erbringen.

Man wird gut tun, alle diese Sätze, zu denen noch der Satz hinzukommt, daß die komplexen Wurzeln einer Gleichung mit reellen Koeffizienten paarweise auftreten, daß mit $a + bi$ auch $a - bi$ eine Wurzel ist, schon bei der Durchnahme der quadratischen und kubischen Gleichungen im Auge zu halten und sie dort nach Möglichkeit auszunützen. Schon bei den quadratischen Gleichungen wird man in Fällen, wo eine Wurzel leicht erkennbar ist, die Division durch $x - x_1$ ausführen. Bei den kubischen Gleichungen ist das jedenfalls sofort zu empfehlen, sobald man die Formel für die Cardanische Lösung entwickelt hat, noch ehe die beiden anderen Wurzeln Erwähnung gefunden haben. Andererseits darf diese Möglichkeit nicht dazu verführen, den Cardanischen Ausdruck auf die eine reelle Wurzel zu beschränken. Denn wenn x_1 nicht ein einfacher rationaler Wert ist, hat das Durchdividieren wenig praktischen Wert.

An einigen Beispielen wird dann auch im Falle von Gleichungen höheren Grades die Fruchtbarkeit des Vietaschen Wurzelsatzes zu zeigen sein, wenn man irgendwelche Wurzeln durch Probieren bestimmen kann. Man wird das konstante Glied in Faktoren zerlegen und nun systematisch an die Durchsicht der verschiedenen Möglichkeiten gehen. Oft kann man ja auch schon irgendwelchen kubischen oder biquadratischen Gleichungen, auf die der Schüler stößt, eine oder mehrere Wurzeln unmittelbar ansehen. Die Schüler haben dann, wie ich oben schon gelegentlich bemerkt habe, eine merkwürdige Scheu, diese die Rechnung ganz erheblich abkürzende Tatsache auszunützen. Sie glauben, mit dem Probieren etwas Unerlaubtes zu tun, und ziehen es deshalb vor, die Lösung trotz allem erst noch nach der Cardanischen Formel oder dgl. zu suchen. Manchmal unterstützen die Mathematiklehrer diese Scheu, indem sie geradezu die Anwendung der Cardanischen Formel verlangen, auch wenn der Wurzelwert klar auf der Hand liegt. Ein solches Verfahren ist meiner Meinung nach zu verwerfen. Auch für den Mathematiker gilt das Ökonomieprinzip; kann er schneller als auf dem „Herdenwege" zum Ziel kommen, so soll er unbedingt die Möglichkeit ausnutzen.

Eine wichtige Tatsache der Algebra kann man wieder nur historisch dem Schüler mitteilen; das zu tun sollte man aber nicht unterlassen, da sich sonst der Schüler über einen entscheidenden Punkt der Algebra falsche Vorstellungen macht und leicht den Theorien gewisser mathematischer Laien widerstandslos gegenübersteht. Ich meine den Satz, daß die allgemeine literale Gleichung fünften und höheren Grades nicht durch Wurzelausdrücke lösbar ist. Wie dieser Satz aufzufassen ist, daß er nicht etwa besagt, die Gleichungen wären überhaupt nicht auflösbar, auch nicht, alle Gleichungen fünften und höheren Grades seien mit Wurzelausdrücken unauflösbar, das muß dem Schüler ausdrücklich erklärt werden.

Ich halte es für gut, an dieser Stelle dem Schüler auch ein Wort über den Begriff der algebraischen Zahl zu sagen — ich meine natürlich damit das, was der Mathematiker darunter versteht, nicht etwa die relativen Zahlen (vgl. S. 223). Man

hat also zu konstatieren, daß es algebraische Zahlen gibt, die durch Wurzelausdrücke darstellbar sind, — zur Übung sind die zu irgendwelchen mehr oder weniger einfachen Wurzelausdrücken gehörigen Gleichungen wirklich anzugeben — daneben aber auch solche, bei denen eine derartige Darstellung als endliche Wurzelaggregate nicht möglich ist. Man hat weiter von diesen algebraischen Irrationalitäten die transzendenten Irrationalitäten zu unterscheiden, von denen die bedeutsamsten Beispiele die Zahlen π und e, daneben die Logarithmen der meisten rationalen Zahlen sind. Der Nachweis für die Transzendenz dieser Zahlen kann freilich in der höheren Schule nicht geführt werden.

Auf noch weitergehende allgemeine Sätze der Gleichungslehre wird nur sehr selten in höheren Schulen eingegangen. In den Lehrplänen ist jedenfalls meines Wissens weder von der Cartesischen Zeichenregel, noch etwa vom Sturmschen Satz die Rede. Die Lehrbücher behandeln die Sätze, von verschwindenden Ausnahmen abgesehen, auch nicht. Max Simon scheint mit dem in seiner Didaktik gemachten Vorschlag, im Unterricht der Oberrealschule bis zum Sturmschen Satz zu gehen, kaum Anklang gefunden zu haben. Offenbar ist früher in dieser Hinsicht mehr geschehen. Das sieht man, um nur ein Beispiel zu nennen, an dem Buche von Emsmann, Höhere algebraische Gleichungen für Schulen, Halle a. S. (Schmidt) 1867.

NEUNTES KAPITEL.

Analysis.

A. Der Funktionsbegriff.

1. Einige Vorbemerkungen.

Der Funktionsbegriff hat immer schon in den mannigfachsten Gestalten zu den wesentlichen Bestandteilen des mathematischen Unterrichtes gezählt; er ist keineswegs erst, wie manche wollen, von der Reformbewegung gleichsam entdeckt und nun als etwas gänzlich Neues dem alten Lehrstoff eingeimpft worden. Der Begriff der Funktion kann sich unter verschiedenen Formen verbergen. Da haben wir einmal die analytische Form. Eine Variable y ist abhängig von einer anderen Variablen x, und diese Abhängigkeit ist unter Benutzung algebraischer Symbole ausdrückbar. Solche Funktionen sind immer schon in der analytischen Geometrie, die von fast allen höheren Lehranstalten seit geraumer Zeit getrieben worden ist, ausführlich behandelt worden, oft freilich, ohne daß das Wort Funktion dabei gefallen ist.

Damit zusammen hängt der Begriff der Funktion, bei der die Abhängigkeit in geometrischem Gewande erscheint. Das trifft gewiß auch für die analytische Geometrie zu, kommt aber schon in der allerersten geometrischen Unterweisung zur Anwendung. Wenn ein Winkel gegeben ist, so ist dadurch sein Nebenwinkel bestimmt; der eine Winkel ist eine Funktion des anderen. Wenn ein Kreis gegeben ist, so ist die Länge der Sehne in ihm eine Funktion des Abstandes vom Mittelpunkt; jeder geometrische Ort ist die Festlegung einer funktionalen Abhängigkeit. Bei diesen Funktionen begnügt man sich manchmal zunächst mit einer ungefähren, ich möchte sagen qualitativen Kenntnis der Abhängigkeit. Die weitergehende Untersuchung führt dann zu einer genaueren Festlegung der Abhängigkeit, wenn es sein muß, unter Einführung neuer Symbole, die ausdrücklich aus der geometrisch definierten Beziehung geboren sind. Dahin gehören die trigonometrischen Funktionen. Auch der Funktionsbegriff in dieser Form ist schon sehr lange im Schullehrstoff zu Hause.

Bei den trigonometrischen Funktionen wie bei den Logarithmen tritt uns eine andere Möglichkeit entgegen, die funktionale Abhängigkeit zu kennzeichnen, die Tabelle. Auch die tabellarisch gegebene Funktion kennt ja der Schüler früherer Zeiten zur Genüge, sah man doch einst in dem Wälzen siebenstelliger Logarithmentafeln einen großen Wert des mathematischen Unterrichtes, sei es auch nur, wie einmal Helmes bemerkt, als „Interstitien fürs Atemholen".

Schließlich bleibt noch eine Form der Funktion übrig, eine ganz besondere Art der bereits in ihrer allgemeinen Form erwähnten geometrischen Interpretation der

Abhängigkeit, die graphische Darstellung. Hier haben wir nun freilich einen verhältnismäßig modernen Gedanken. Mag gelegentlich auch wohl schon einmal eine graphische Darstellung in älteren Zeiten vorgekommen sein, das zu untersuchen mag der geschichtlichen Forschung vorbehalten bleiben; sie tritt doch erst in der Mitte des vorigen Jahrhunderts deutlicher hervor. Es ist sehr interessant nachzulesen, wie energisch Du Bois-Reymond in der Vorrede zu den 1848 erschienenen „Untersuchungen über tierische Elektrizität“[1] für die Verwendung graphischer Darstellungen in der Physiologie eintritt; er zeigte damit, wenn man von gewissen Zweigen der Physik, z. B. der Thermodynamik, absieht, den anderen Naturwissenschaften eine ihnen ganz neue Methode. Auch die reine Physik hat sich im großen und ganzen der graphischen Darstellung erst bemächtigt[2], nachdem ihr die Technik den Weg gewiesen. Das war nun also auch für den mathematischen Unterricht etwas wirklich Neues. Und er hat davon in den achtziger und neunziger Jahren des vorigen Jahrhunderts[3] Besitz genommen, wenn auch nur zaghaft, wenn auch zunächst nur an wenigen Schulen, in wenigen Lehrbüchern. Auch die graphischen Darstellungen waren schon vor dem Einsetzen der Reformbewegung da, wenn auch nur in ganz schwachen Ansätzen, keinesfalls in dem Umfange und in der großen Verbreitung wie heute. Bekannt ist ja, daß die Bardeysche Aufgabensammlung schon früh einen besonderen Anhang über graphische Darstellungen enthielt.

So erkennen wir: der Funktionsbegriff, in allen seinen verschiedenen Gestalten, war schon zu Hause in der Schule, ehe er zum Schlagwort der Reform wurde. Jene Anschauung, der z. B. Helmes Ausdruck gab, daß die Elementarmathematik es im Gegensatz zur höheren nicht mit der variablen, sondern mit der konstanten Größe zu tun habe, war schon recht lange durch die Macht der Verhältnisse gewandelt worden.

Was ist nun, so wird man fragen, das entscheidend Neue, das die Meraner Pläne mit ihrer Forderung des „funktionalen Denkens“ gebracht haben? Ihr Verdienst ist es, in den vielerlei Formen, in denen der Funktionsbegriff in der Schule auftrat, das Gemeinsame erkannt zu haben, gezeigt zu haben, wie dieser Begriff in immer wechselnder Gestalt in fast allen Gebieten der Schulmathematik wiederkehrt, sie beherrscht. Hier setzten die positiven Vorschläge ein. Es galt, dieses Durchtränken der Mathematik mit dem Funktionsbegriff gründlicher als bisher zu betreiben, den Funktionsbegriff gewissermaßen als den Kitt zu verwenden, der alle die verschiedenen Kapitel der Schulmathematik zu einer Gesamtheit zu vereinigen geeignet ist. Wenn

[1] Vgl. Emil du Bois-Reymond, Reden, in 2 Bänden, 2. Aufl., Leipzig (Veit) 1912.

[2] Ich nenne: F. Auerbach, Physik in graphischen Darstellungen, Leipzig (Teubner) 1912. Der Lehrer findet hier fast alles, was er irgend braucht; nur eine größere Anzahl Diagramme von Selbstaufzeichnern — z. B. Barogramme, Seismogramme usw. — vermisse ich. Eine kleinere Darstellung desselben Verfassers ist: Die graphische Darstellung (Aus Natur und Geisteswelt), Leipzig (Teubner) 1914. v. Pirano, Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik (Sammlung Göschen), Leipzig (Göschen) 1914, berücksichtigt neben den graphischen Darstellungen im engeren Sinne auch nomographische Verfahren.

[3] Ich verweise z. B. auf eine Notiz von J. C. V. Hoffmann in seiner Zeitschrift 18 (1887), S. 588ff.: „Die Graphik beim mathematisch-naturwissenschaftlichen, insbesondere beim arithmetischen Unterricht“, die er charakteristischerweise überschreibt: „Etwas Altes, das aber immer wieder aufgefrischt zu werden verdient.“

Höfler [1] schon 1887 seine Überzeugung dahin ausspricht, „daß das Vertrautwerden mit dem Funktionsbegriff, d. h. die Gewöhnung, die Gebilde der Elementararithmetik und die goniometrischen Funktionen ganz ausdrücklich sub specie des ‚Funktions'begriffes zu betrachten und zu beherrschen, das natürliche Ziel des ganzen mathematischen Mittelschulunterrichtes bilden sollte", so wird man dieser Vorwegnahme des Reformprogramms von Meran ganz zustimmen, vielleicht aber noch hinzufügen, daß auch die hier nicht erwähnten Zweige der Schulmathematik, die Planimetrie, die Stereometrie, ihren Anteil an dem Begriff haben.

Rein stofflich hat die Verstärkung der Position des Funktionsbegriffes zweierlei zur Folge. Man begann früher und häufiger als vordem von dem Begriff ausdrücklichen Gebrauch zu machen. Gewisse Formen treten nun in weit niedrigeren Klassen auf als ehedem. Man behandelt graphische Darstellungen schon in den Mittelklassen. Weiter aber führte die Betonung des Funktionsbegriffes dazu, daß man aus der ängstlich gewahrten Reserve gegenüber der Infinitesimalrechnung heraustrat.

Wie für die Arithmetik und Algebra, so muß auch für die Behandlung des Funktionsbegriffes schon der Rechenunterricht die Rolle einer Vorstufe übernehmen. Das wird besonders in der Weise geschehen können, daß der graphischen Darstellung von Funktionen durch geometrische Veranschaulichung von Größen, also durch Strecken-, Flächen- und Körperdarstellung, vorgearbeitet wird. Da solche graphischen Methoden auch wachsende Bedeutung für das praktische Leben und für volkstümliche Darstellungen aus Wissenschaft und Technik bekommen haben, so ist es begreiflich, wenn sogar moderne Lehrpläne für Volksschulen (z. B. München, Groß-Berlin) ausdrücklich ihre Verwendung im Rechenunterricht der letzten Klasse vorschreiben. Erst recht wird man die Forderung geometrischer Veranschaulichungen, etwa des zeitlichen Ablaufes irgendwelcher Vorgänge, im Rechenunterricht der höheren Schulen erheben können. Aber wohlgemerkt, auf keinen Fall möchte ich einer graphischen Darstellung bestimmter, in analytischer Form gegebener Funktionen, beispielsweise der Hyperbel bei indirekter Proportionalität, schon im Rechenunterricht das Wort reden. Das gehört nicht in die Quarta, bleibt vielmehr späteren Klassen überlassen.

Von der ersten Arithmetikstunde an soll dann der Funktionsbegriff seine Rolle als Bindemittel im ganzen Lehrstoff spielen. Um Mißverständnissen vorzubeugen, will ich gleich sagen, wie ich mir das denke. Wenn z. B. der Ausdruck 2a gegeben ist, so bedeutet das, daß a jede Zahl vertreten kann; da liegt es nun nahe, zuzusehen, welche Werte der Ausdruck annimmt, wenn a etwa die Reihe der natürlichen Zahlen durchläuft. Ebenso geht es mit Ausdrücken wie $a + b$, wo a eine feste Zahl ist, vielleicht 3, während b sich ändert, oder wo a und b gleichzeitig wachsen, gleichzeitig abnehmen usw. Derartige Untersuchungen, die besonderen Wert bei den inversen Operationen haben, erschließen einen tieferen Einblick in das Wesen der Rechenoperationen. Der Schüler lernt den ungeheuren Unterschied von $a + b$ und $a \cdot b$ kennen, Ausdrücke, die sonst nicht selten bei flüchtigem Rechnen verwechselt

[1] A. Höfler, Netz, Oberfläche und Kubikinhalt des Zylinderstutzes und der Kugel, ZmnU 18 (1887), S. 1ff.

werden. Wieder ist vor zweierlei zu warnen. Auf keinen Fall möge schon hier das Wort Funktion fallen. Auch von einer graphischen Darstellung in Cartesischen Koordinaten ist dringend abzuraten; um so mehr ist eine Veranschaulichung an der Zahlengeraden zu empfehlen.

Wir werden in den ersten Abschnitten dieses Kapitels untersuchen, in welcher Weise und in welchem Umfange der Funktionsbegriff in Arithmetik und Algebra eingreifen kann. Die dann folgenden Abschnitte sollen sich mit der analytischen Geometrie beschäftigen. Während eben zum analytischen Ausdruck das Kurvenbild gefunden und demgemäß die Analysis der Arithmetik oder Algebra dienstbar gemacht wurde, ist jetzt zur Kurve der analytische Ausdruck zu suchen, die Analysis tritt in den Dienst der Geometrie. Dann aber wird uns in den letzten Abschnitten des Kapitels die Infinitesimalrechnung auf den Gipfel der Schulmathematik führen, wobei es dann nicht so sehr darauf ankommt, wie hoch man steigt, als daß man wirklich den Schüler auf einen und sei es noch so wenig erhöhten Standpunkt heraufbringt, damit er einen Überblick in das durchwanderte Land der Schulmathematik gewinnt und einen Fernblick in das gelobte Land mathematischer Wissenschaft tun kann.

2. Empirische Funktionen.

Eines der umstrittensten Kapitel des Lehrstoffes, der im Gefolge der Reformbewegung seinen Einzug in die höhere Schule gehalten hat, sind die empirischen Funktionen. Man geht so weit, den Ausdruck für einen Widerspruch in sich zu halten. Man sagt, daß eine durch irgendeine Folge von Beobachtungen gegebene Zuordnung von Werten keine Funktion im mathematischen Sinne sei. Es ist im ersten Kapitel des ersten Teiles dieses Werkes auseinandergesetzt, daß diese Anschauung falsch ist.

Andere lassen zwar den Ausdruck „empirische Funktion" gelten, behaupten aber, es sei nicht Sache der Mathematik, sondern Aufgabe anderer Wissensgebiete, sich mit solchen empirischen Funktionen zu befassen. Auch diese Anschauung ist offensichtlich falsch, so verbreitet sie auch sein mag. Es ist ganz unmöglich, sich im mathematischen Unterricht auf die graphische Darstellung solcher Funktionen zu beschränken, für die die Abhängigkeit zwischen den Variablen durch einen hinschreibbaren arithmetischen Ausdruck gegeben wird. Auch die Vertreter dieser Anschauung werden ja jedenfalls, spätestens in der analytischen Geometrie der Oberklassen, von einer gegebenen Geraden, einem gegebenen Kreis, irgendeiner gegebenen Kurve den zugehörigen Funktionsausdruck entwickeln lassen. Ist es von vornherein ganz sicher, daß man dabei auf einen angebbaren arithmetischen Ausdruck trifft? Sollte der Leser etwa mit einem unbedingten Ja erwidern, so weise ich auf die Sinuskurve hin, dort finden wir keinen bekannten arithmetischen Ausdruck, setzen uns aber mit dem Symbol *sin* kühn über die Schwierigkeit hinweg. Er wird aber vielleicht immer noch zögern, auch bei irgendeiner empirisch gefundenen Kurve zuzustimmen. Er wird den Unterschied zwischen beiden Fällen darin sehen, daß es sich einmal um mathematisch genau definierte Gebilde, also um Werte aus der Präzisionsmathematik, bei jenen empirischen Kurven nur um Näherungswerte handelt. Aber wir werden doch immer gewissermaßen im Innern einer solchen empi-

rischen Kurve eine rein mathematische „Seele" annehmen können, die sich von ihr beliebig wenig unterscheidet. Handelt es sich da nicht um ein spezifisch mathematisches Problem, dessen Lösung nicht bloß Sache der Physik oder der Geographie oder der Nationalökonomie oder irgendeiner andern Wissenschaft ist, die uns jene Kurve gegeben hat? Es ist grundsätzlich ganz gleichgültig, ob man bis zur Darstellung der Abhängigkeit durch einen algebraischen Ausdruck vordringt oder sich mit einer mehr oder weniger rohen Annäherung durch algebraische Ausdrücke begnügen muß.

Die einfachsten Fälle graphischer Darstellungen sind solche, bei denen irgendwelche benannte oder unbenannte Größen durch Strecken, Flächen oder Körper in irgendeinem Maßstabe veranschaulicht werden. Das Mittel der Veranschaulichung von Größen durch Körper erfreut sich einer stets wachsenden Verwendung im praktischen Leben. Häufig wird es bei der Reklame oder in populären Aufsätzen angewandt, um etwa Produktions- oder Konsummengen aus verschiedenen Jahren oder verschiedenen Ländern miteinander zu vergleichen. Solche körperlichen Veranschaulichungen werden dann freilich, wenn man von Darstellungen absieht, wie sie heute für Ausstellungen immer mehr beliebt werden, fast durchweg nicht wirklich in den Raum gestellt, sondern im Bilde wiedergegeben. Man muß bei solchen Bildwiedergaben jedesmal ausdrücklich anmerken, ob lineare, quadratische oder kubische Ausdehnung in Rechnung gestellt ist. Es ist eine gute Übung für die Schüler, festzustellen, ob es auf lineare oder räumliche Ausdehnung abgesehen ist. Wenn die Zahlen ihren Bildern zugefügt sind, ist das eine leichte Aufgabe. Man sollte auch die Schüler anhalten, bei Darstellungen ohne Zahlen sich selbst durch Schätzung die Frage zu beantworten. Nicht selten macht eine Reklame absichtlich ein falsches Bild von irgendeiner Entwicklung, indem sie körperliche Darstellung vortäuscht, wo lineare zugrunde gelegt ist, und umgekehrt.

Wird körperliche Darstellung bei Mengen bevorzugt, so naturgemäß flächenhafte bei Flächen, also etwa, wenn bebautes und unbebautes Land, oder wenn Wasser und Land auf der Erde usw. veranschaulicht wird. Aber auch bei volkswirtschaftlichen Beispielen, bei Ein- und Ausfuhrvergleichungen, sind Darstellungen durch ähnliche Flächen, meist Quadrate, Rechtecke oder Kreise, auch wohl Kreisausschnitte, wenn es sich um das Verhältnis der Teile eines Ganzen handelt, sehr gebräuchlich. Die wichtigste anschauliche Vergleichungsart ist die Darstellung durch Strecken. In nicht wenigen Fällen kommt diese Methode ausschließlich in Betracht, z. B. beim Vergleich von Zeiträumen, dann aber auch bei Gewichten, Prozentsätzen, natürlich bei Längen, schließlich auch bei reinen Zahlen.

Bei der späteren graphischen Darstellung im engeren Sinn knüpfen wir an die Streckendarstellung an. Der Schüler sollte deshalb in einigen Beispielen geübt werden, flächenhafte und körperliche Darstellungen in lineare umzuschreiben — eine gute Übung, das Anwachsen zwei- und dreidimensionaler Größen mit wachsender linearer Ausdehnung zu erkennen. Diese Aufgabe kann natürlich erst dann gelöst werden, wenn er mit jeder der einzelnen Methoden vertraut ist, wenn er insbesondere gelernt hat, Tabellen in Darstellungen und Darstellungen in Tabellen umzuschreiben. Alle diese Dinge sollten dem Schüler bereits vom Rechenunterricht

her mehr oder weniger vertraut sein. Wenn dem freilich nicht so ist, muß wohl oder übel der arithmetische Unterricht Versäumtes nachholen.

Das Neue beginnt erst mit der Ausnutzung der Zahlengeraden für unsere Zwecke. Man kann auf eine Zahlengerade die Folge der Jahre eintragen und dann auf ihr wichtige Ereignisse aufzeichnen lassen, man kann auch einzelne Zeiträume angeben lassen und diese dann miteinander in Vergleich setzen. Wenn man etwa auf diese Art die Lebenszeiten der bedeutenderen Dichter unserer klassischen Zeit in eine Jahresgerade, oder noch besser in mehrere nebeneinandergelegte einzeichnet, so kann man einer solchen Darstellung mit einem Blick Dinge entnehmen, bei denen sonst erst eine längere Überlegung nötig ist (Vergleich der Lebensdauer; welche Dichter lebten gleichzeitig usf.). Um noch ein anderes, der Praxis entlehntes Beispiel anzuführen, sei an die „Sonnenstreifen" erinnert; die Sonne brennt in eine Stundenstrecke einen Strich ein und zeigt so selbst an, wann und wie lange sie an jedem Tage geschienen hat. Man braucht bei diesen Beispielen nur kurz zu verweilen; sie bilden die Einleitung zur graphischen Darstellung im engeren Sinne.

Man beginnt am besten mit Aufgaben, in denen als x-Achse die Zeit genommen wird. Um die Schüler in dem neuen Gebiet erst einmal heimisch zu machen, empfiehlt es sich, sie zuerst nicht durch eine große Mannigfaltigkeit zu verwirren, sondern sich an ein einziges Sachgebiet zu halten. Man kann etwa mit Temperaturkurven beginnen; das hat den Vorteil, daß man neben positiven auch ungezwungen gleich negative Funktionswerte einführt. Die Daten für die Tabellen, die in Darstellungen umzusetzen sind, läßt man besser durch eigene Beobachtung der Schüler finden, als daß man sie fertig gibt. Es genügt schon, einen Topf Wasser zu erhitzen und von Minute zu Minute die Temperaturen ablesen zu lassen. Wenn es nicht möglich ist, auch in der Mathematikstunde einmal die geheiligten Räume des Physik- oder Chemiezimmers zu benutzen, so kann man etwa eine auf mehrere Wochen erstreckte, also zeitig genug vorbereitete Tabelle der Tagestemperaturen verwenden. An solchen Beispielen soll der Schüler in die graphische Methode eingeführt werden. Vielleicht ist sie ihm auch bereits aus anderen Fächern bekannt, etwa aus der Erdkunde.

Man darf sich nun aber keineswegs darauf beschränken, Tabellen in Darstellungen umzusetzen. Der Schüler muß von vornherein sehen, daß sich mit den Darstellungen auch etwas anfangen läßt, daß sie in manchen Dingen den Tabellen überlegen, in anderen freilich auch unterlegen sind. Man wird an einer Darstellung Höchst- und Tiefstwerte ablesen, den Mittelwert abschätzen und eintragen lassen, man kann die Änderung der Werte mit fortschreitender Zeit beurteilen. Wenn ich an jenen Topf mit Wasser wieder erinnere: Der Schüler sieht, daß die Temperatur schneller steigt, wenn ich mehr Flammen unter den Topf setze, daß sie langsamer steigt, wenn ich mehr Wasser erhitze, daß sie sich sprungweise ändert, wenn ich kaltes Wasser hineingieße. Natürlich handelt es sich hier nicht um die physikalischen Tatsachen, sondern um die Beschreibung der dargestellten Kurve.

Nun erst, nachdem der Schüler an einem ganz bestimmten Sachgebiet die Grundgedanken der graphischen Darstellungen kennen gelernt hat, ist es an der Zeit, ihm einen Überblick über die wichtigsten Eigenschaften von Funktionen zu geben. Dieser Überblick wird gewiß nicht vollständig sein; so scheiden z. B. bei dieser ersten

Einführung gerade solche Fälle, die später eine wichtige Rolle spielen, vollkommen aus, ganz abgesehen von den pathologischen Kurven der Mathematiker. Unendlichkeitsstellen z. B. gibt es hier nicht; man bleibt mit beiden Koordinaten durchaus im Endlichen. Auch von mehrdeutigen Funktionen wird kaum die Rede sein.

Der erste Grundbegriff, den der Schüler rein anschauungsgemäß und selbstverständlich ohne eine abstrakte Definition kennen lernen muß, ist die Stetigkeit. Wenn eine Tabelle in eine graphische Darstellung umgesetzt wird, so ergibt sich zunächst nur eine Punktreihe. In der Fieberkurve des Arztes werden die Punkte einfach durch Geraden verbunden. Ein genaueres Bild von dem wirklichen Verlauf erhält man, wenn man eine größere Anzahl beobachteter Werte einschaltet. Auch dann aber bleibt die Kurve eine diskontinuierliche Folge von Punkten. Man hat aber die Überzeugung, daß bei stets wachsender Zahl von Beobachtungen der wirkliche Verlauf der Kurve immer genauer wiedergegeben wird. Benutzt man schließlich einen Registrierapparat, so ist man nicht mehr genötigt, einzelne Beobachtungswerte durch eine Kurve zu verbinden, vielmehr besorgt das der Apparat.

Es ist wohl nötig, dem Schüler an geeigneten Beispielen klarzumachen, daß seine Verbindung der Beobachtungspunkte willkürlich ist. Man braucht bloß eine Temperaturbeobachtung von Stunde zu Stunde, die zu einer Kurve vervollständigt wird, mit der Kurve des Registrierapparates zu vergleichen. Gibt nun die Kurve des selbsttätig aufzeichnenden Apparates die richtige Kurve? Gewiß ist sie verläßlicher als unsere nach den Gesetzen einer einfachen Ästhetik durch die Punkte gelegte Kurve stetiger Krümmungsänderung. Ist sie aber eine wirklich einwandsfreie Idealisierung der wirklichen Kurve?

Eine Antwort darauf erhält man, wenn man feinere Apparate benutzt und nun feststellt, ob man richtig interpoliert hat. Vergleicht man ein einfaches Barogramm mit der Aufnahme eines Toeplerschen Luftdruckvariographen, wie wir sie im ersten Teilbande abbildeten (Tafel I), so kommt man zu dem Schluß, daß unsere Idealisierung sicher falsch war. Oder man betrachte die graphische Darstellung der Änderung der Windstärke innerhalb zweier Minuten in Fig. 71, und man wird da zu dem gleichen Ergebnis kommen. Es hat fast den Anschein, als ob mit zunehmender Genauigkeit unserer Apparate bei gewissen empirischen Funktionen die Kompliziertheit wächst. Der normale Flutmesser zeigt die von Ebbe und Flut hervorgerufene Welle an, ein besserer würde auch die größeren Wogen registrieren. Wir können uns aber einen

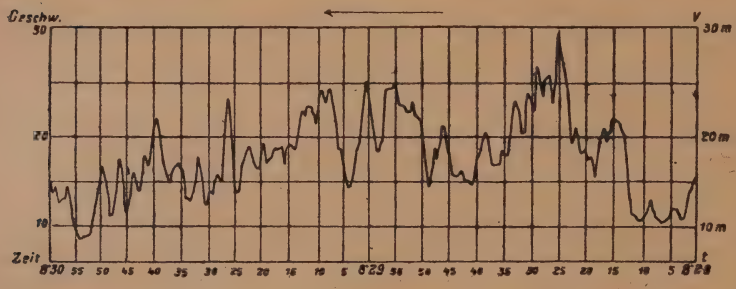


Fig. 71.
Änderung der Windgeschwindigkeit innerhalb zweier Minuten. Aufnahme 8. Febr. 1889 vorm. 8 Uhr 28 Min. bis 8 Uhr 30 Min. (Nach Nimführ.) Aus Bardey-Lietzmann, Reformausgabe.

noch feineren denken, der auch die Kräuselung, die der Wind auf den großen Meereswogen hervorruft, mit zum Ausdruck bringt.

Von diesen Kurven sind nun ganz verschieden die „Treppenkurven". Auf solche Kurven trifft man, wenn man z. B. die Anzahl der Schüler einer Lehranstalt oder etwa die Anzahl der Teiler der ganzen Zahlen graphisch darstellt. Wieder sind es eigentlich Punktfolgen, aber, anders wie eben, läßt sich der Zwischenraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Beobachtungen nicht weiter ausfüllen. Hier haben wir es mit unstetigen Gebilden zu tun.

Hat nun der Schüler einen Überblick über die Möglichkeiten gewonnen, die ihm bei graphischen Darstellungen entgegentreten können, hat er insbesondere stetige und sprunghafte Funktionen voneinander unterscheiden gelernt, so ist es weiter nötig, ihm begreiflich zu machen, was an diesen Kurven wesentlich, was unwesentlich und nur durch die Art der Darstellung bedingt erscheint. Man wird in vorgelegten Kurven Maßstabsänderungen vornehmen (Verwendung eines Barogramms zu Höhenmessungen im Luftballon), man wird die Variablen miteinander vertauschen. Der Schüler hat zu untersuchen, was sich ändert, was bleibt, welche Darstellung im gegebenen Fall zweckmäßiger ist.

Eine Frage, über die sich streiten läßt, ist die, ob man auch auf die technische Seite der Herstellung von graphischen Darstellungen eingehen soll. Gewiß wird man Barogramme, Thermogramme u. dgl. zeigen. In diesen Fällen ist die Anlehnung an die gewöhnlichen Koordinatendarstellungen sehr eng. Soll man aber auch Seismogramme zeigen, bei denen — wie in vielen anderen Fällen — die Zeit durch Lücken im Kurvenstrich angezeigt wird, soll man auch auf Fälle eingehen, bei denen es sich um kurze Zeiten handelt, die durch eine gleichzeitig schwingende Stimmgabel eingetragen werden (Beispiele aus der Physik)?

Nach der Stetigkeit scheint der wichtigste Begriff, der sich bei der Betrachtung der Kurven aufdrängt, die Steigung zu sein. Einfache Beispiele bieten sich hier von selbst. Man wird an graphischen Darstellungen von Gebirgsbahnen oder Flußläufen, für die man die Höhe als Funktion der Länge darstellt, Steigungen ablesen lassen. Schon dem Schüler wird sich die Erkenntnis aufdrängen, daß gerade für die Beurteilung der Steigung oder des Gefälles die graphische Darstellung sinnfälliger ist als die Tabelle. Er wird aber auch schon an der Hand von Beispielen (Überhöhung von Gebirgsreliefen) bemerken, daß die Größe der Steigung nicht unabhängig von dem gewählten Maßstabe ist. Das ist später nicht unwichtig beim Differentialquotienten — natürlich handelt es sich hier um eine vorläufige Vorstellung von diesem Begriff. Es liegt nahe, gestützt auf jene früher erwähnten „Tatterichkurven", schon hier den Schüler darauf hinzuweisen, daß es durchaus nicht selbstverständlich ist, allen durch irgendeine Idealisierung gewonnenen Kurven eine bestimmte Steigung in jedem ihrer Punkte zuzuschreiben, daß jedenfalls unter gewissen Umständen aus einer empirischen Kurve ein Schluß über die Steigungsverhältnisse (d. h. über den Differentialquotienten) nicht möglich ist, wenn nämlich, wie etwa bei der Stromkurve eines Wechselstromes, als Seele der Kurve ein wellenförmiges, mit seinen Ausschlägen ganz im Innern der Kurvenzeichnung liegendes Gebilde anzusehen ist, das erst durch andere Vorkehrungen, etwa einen Oszillographen, erforsch-

bar wird. Doch führt das offenbar hier zu weit. Es findet sich später Gelegenheit, darauf zurückzugreifen.

Ein dritter wichtiger Begriff ist der des Flächeninhaltes von Kurven. Daß eine Kurve, genauer das von zwei Ordinaten, der x-Achse und der Kurve begrenzte Flächenstück, einen bestimmten Flächenwert bestimmt, leuchtet dem Schüler ohne weiteres ein. Die Existenz des Integrals liegt näher als die des Differentialquotienten. Den Ausgangspunkt nimmt man am besten von geeigneten Treppenkurven. Wenn man die Anzahl der Abiturienten einer Schule graphisch dargestellt hat, so wird der durch Abzählung auszuwertende Flächeninhalt die Gesamtzahl aller Abiturienten darstellen. Dieser Art ist später die Benutzung des Flächeninhaltes bei Summationen endlicher arithmetischer Reihen. Andere Beispiele, die man schon bei der Behandlung der empirischen Kurven einbeziehen kann, sind etwa Darstellungen von Niederschlagsmengen u. dgl.

Weniger wichtig, aber doch nicht ohne Bedeutung ist es, schon hier auf einen Begriff einzugehen, der bei manchen Funktionen eine Rolle spielt, die Periodizität. Beispiele für periodische Funktionen empirischer Art sind nicht selten, ich nenne nur die Ebbe- und Flutkurven und die Häufigkeit der Sonnenflecken. Gerade zur Erkenntnis einer Periode und zur Bestimmung ihrer Länge ist die graphische Methode weit mehr geeignet als die tabellarische.

Wenn es sich bisher um die fundamentalen Begriffe handelte, die bei der Kurve und einer Funktion eine Rolle spielen, so können nun weitere Aufgaben dem Schüler einen anderen Vorzug graphischer Methoden vor tabellarisch gegebenen Funktionen zeigen: die Vergleichung zweier Kurven. Wenn man in ein und dasselbe Koordinatenkreuz zwei Kurven einträgt, die in irgendeinem ursächlichen Zusammenhange stehen, so kann ein Blick Beziehungen aufdecken, die sonst erst mühsam gefunden werden. So wird man die Verschiedenartigkeit in der Zunahme der Bevölkerung zweier Länder sehr drastisch aufweisen können, wird zeigen können, daß Sonnenfleckenhäufigkeit und Polarlichthäufigkeit die gleiche Periode besitzen.

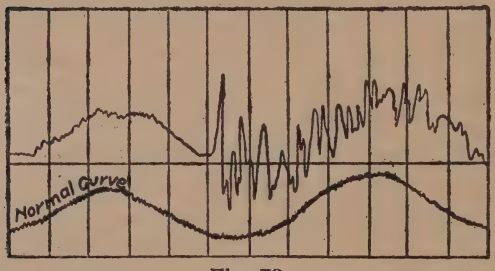


Fig. 72.
Beispiel für die Superposition zweier Bewegungen. Unten gewöhnliche Kurve eines Ebbe-Flut-Anzeigers. Oben Registrierung einer Erdbebenflutwelle. Aufnahme in Nogapatam, Indien. (Nach Hobbs-Ruska.)

Eine besondere Art, zwei vorgelegte Kurven in Beziehung zu setzen, ist ihre Superposition, ihre Addition; Ausfuhr und Einfuhr zusammen ergeben den Gesamthandel. Wichtiger für die Praxis ist die umgekehrte Operation, die Aufdeckung der Superposition zweier Kurven an einer vorgelegten Kurve. Ein Beispiel bietet etwa Fig. 72, wo der von Ebbe und Flut erzeugten Welle eine andere durch Erdbeben hervorgerufene Flutwelle superponiert ist. Spielt auch die Analyse von Kurven in der Schulmathematik nicht die Rolle wie in der Wissenschaft (Fourier-Reihen), so sollte sie doch Erwähnung finden, da sie für die Physik und die Technik später von Wichtigkeit ist.

Ich habe die Fragen angedeutet, die bei der Behandlung empirischer Funktionen aufzurollen sind. Ich will nicht behaupten, daß damit dieser Gegenstand für die Schule erschöpft wäre; in Prima lassen sich andere Dinge heranbringen, wie ich im 3. Teilband zeigen will. Ebensowenig stelle ich die Forderung, nun auch alles, was ich angedeutet habe, vollständig durchzunehmen. Bei einem verhältnismäßig neuen Gebiet der Schulmathematik gehen die Meinungen über das Notwendige und Wünschenswerte noch recht weit auseinander.

Die Anwendungen, an denen alle diese wichtigen Begriffe der Mathematik diskutiert werden, sind zahllos vorhanden. „We live in an atmosphere of functionality", hat einmal ein englischer Reformer, Godfrey, gesagt. Es ist nur ein gutes Zeichen für den Stand unserer Methodik, daß man gerade solche Beispiele ausgewählt hat, die auch ihrem Inhalte nach von Wert sind, daß man also insbesondere die Physik, die Volkswirtschaftslehre, neuerdings auch die Biologie[1], bevorzugt hat. Man hat zuweilen gesagt, das Kapitel der empirischen Funktionen sei ein Kapitel der Physik, die mathematischen Lehrbücher seien „physikalische Bilderbücher" geworden. Ich glaube, das kann nur ein Lob sein, insoweit die gewählten Anwendungen wirklich bedeutsam sind. Im übrigen aber wird die Sachlage von jenen Methodikern verkannt. Wenn wir jetzt glücklich so weit sind, daß bei den eingekleideten Gleichungen physikalische Beispiele eine gewisse Rolle spielen, so ist damit doch nicht die arithmetische Aufgabensammlung zu einer physikalischen Aufgabensammlung geworden, ebensowenig wie die Vektoranalysis ein Gebiet der Physik nur deshalb wäre, weil sie mit Vorliebe in der Physik benutzt wird.

Schließlich noch eine Bemerkung. Manche Lehrbücher der neuesten Zeit gehen so weit, auch Wetterkarten als Beispiele für graphische Darstellungen zu benutzen. Es handelt sich hier, was meist nicht zum Ausdruck kommt, um skalare Felder, in denen die Niveaulinien ausgezogen sind. Wie eine Wetterkarte hätte auch eine Isohypsenkarte, wie sie jedes Meßtischblatt bietet, als Beispiel gewählt werden können. Natürlich liegt auch hier eine mathematische Tatsache vor. Die prinzipielle Frage ist aber, ob es sich empfiehlt, skalare und vektorielle Felder im mathematischen Unterricht der höheren Schulen zu behandeln. Diese Frage läßt sich gewiß nicht so leicht abtun. Die Reihe der Anwendungen, die damit einer vertieften mathematischen Behandlung erschlossen würden, wäre in der Physik nicht klein, zumal wenn man auch die Methoden der Differentialrechnung ausnutzte. Bis heute sind weitergehende Versuche in dieser Hinsicht meines Wissens kaum gemacht worden. Man beginnt eben erst, dem Vektorbegriff im Physikunterricht einige Aufmerksamkeit zu schenken. Aber sei dem, wie ihm sei. Jedenfalls erscheint eine Einschaltung skalarer Felder in das Einführungskapitel der graphischen Darstellungen verfrüht und außerordentlich verwirrend. Der Schüler wird auch hier an empirische Funktionen denken, die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen sind. Verrät er diesen Gedanken dem Lehrer, so ist es nicht allzu schlimm; er wird schnell eines besseren belehrt werden. Um so übler ist es aber mit denjenigen Schülern, die von einem solchen Zusammenhange eine ahnungsvolle Vorstellung haben, ohne sie auszusprechen. Ich habe den Eindruck, als ob die Aussicht, mit einer schönen bunten

[1] Vgl. dazu R. Rein, Die graphische Darstellung in der Biologie, Naturwissenschaftliche Monatshefte III. Reihe 1 (1919) S. 113ff.

Abbildung zu glänzen, für manche Lehrbücher — merkwürdigerweise meist für Mädchenschulen — der wirkliche Trieb zur Aufnahme von Wetterkarten in das Kapitel von den empirischen Funktionen gewesen ist.

Andere Koordinatensysteme als rechtwinklige zu benutzen, würde ich in diesem Stadium des Unterrichts nicht raten, es sei denn, daß man etwa die Darstellung der jährlichen Häufigkeit der einzelnen Windrichtungen oder dgl. als eine Vorwegnahme des Polarkoordinatensystems betrachtet. Der Koordinatenbegriff in allgemeiner Form kann später, in der Einleitung zur analytischen Geometrie, berührt werden, hier jedenfalls noch nicht.

Es wird sich empfehlen, die Schüler schon recht früh an den Gebrauch von Millimeterpapier zu gewöhnen. Andererseits möchte ich auch einer Vergeudung dieses immerhin teuren Papiers nicht das Wort reden. Man kann gewiß nicht die Güte des modernen Mathematikunterrichtes nach Quadratmetern verbrauchten Millimeterpapiers beurteilen, ebensowenig wie den Wert moderner Lehrbücher nach der Anzahl bunter Figuren. Skizzen lassen sich sehr gut auf dem beim Rechnen viel benutzten quadratisch liniierten billigen Papier ausführen. Es gibt Schüler, die viel Geld für Millimeterpapier ausgeben — sie benutzen es oft auch für Textausführungen und für Rechnungen —, der Lehrer mag darauf ein wachsames Auge haben.

3. Lineare Funktionen.

Diejenigen Funktionen, bei denen das geometrische Bild die einfachste Gestalt hat, sind die linearen. Gerade weil das Bild hier so einfach ist, hat man gelegentlich vorgeschlagen, den Anfang mit Funktionen höheren Grades zu machen, damit der Schüler die Eigentümlichkeiten der graphischen Methode an Kurven kennen lerne, die ihm bisher unbekannt waren, nicht ausgerechnet an der ihm vertrauten Geraden oder etwa dem Kreis. Auf dem Göttinger Ferienkurs 1909 empfahl P. Kokott, mit den quadratischen Funktionen zu beginnen[1]; die Gerade $y = x$ biete gewisse Schwierigkeiten für die Auffassung. Bei einer anderen Gelegenheit führte C. Färber aus[2], daß gerade die linearen Funktionen deshalb dem Tertianer besondere Schwierigkeiten machten, „weil bei diesen die Verpflichtung besteht, das aus der Gleichung konstruierte Gebilde mit einem schon vorher bekannten zu identifizieren, während etwa für die Kurven $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, ... eine solche Notwendigkeit nicht vorliegt".

Wenn man ein besonderes Kapitel über empirische Kurven vorausschickt, so wie wir es hier in Vorschlag gebracht haben, wenn man da dem Schüler eine Ahnung von der großen Mannigfaltigkeit der Kurven beigebracht hat, wenn man an vielen Beispielen allerlei Eigenschaften der Kurven studiert hat, so ist gar nichts dagegen einzuwenden, nun mit der ausführlichen Diskussion gerade derjenigen Funktion zu beginnen, deren graphisches Bild am allereinfachsten ist.

---

[1] R. Schimmack, Über die Gestaltung des mathematischen Unterrichtes im Sinne der neueren Reformideen, ZmnU **39** (1908), S. 513ff.

[2] C. Färber, Über die Reformbestrebungen im arithmetisch-algebraischen Unterricht an höheren Schulen, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 8 (1909), S. 55ff. Vgl. auch ZmnU **40** (1909), S. 221ff.

Es dürfte sich empfehlen, zunächst noch einmal an bestimmten Beispielen die Festlegung von Punkten im rechtwinkligen Koordinatensystem, die Vorzeichen der Koordinaten in den einzelnen Quadranten u. dgl. zu wiederholen. Denn nun treten wir aus der Sphäre konkreter Beispiele in die abstrakte Mathematik; bisher war fast immer von benannten Größen die Rede, jetzt herrscht überall, von praktischen Anwendungen abgesehen, die unbenannte Zahl.

Dann kommt man an die Aufgabe, für die lineare Funktion $y = mx + n$ die zugehörige graphische Darstellung zu finden. Man geht zweckmäßig von besonders einfachen Fällen aus und benutzt dabei den Begriff „geometrischer Ort". Allmählich dringt man zum allgemeinen Fall vor, erörtert die geometrische Bedeutung[1] von m und n, berücksichtigt auch andere Formen der linearen Funktion; vor allem wichtig sind $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ und die besondere lineare Funktion $x \pm y = a$. Man findet schließlich, daß der allgemeinen Form ersten Grades $px + qy = r$ immer eine Gerade als Funktionsbild entspricht.

Zu dieser Entwicklung ist nun aber eine Anzahl methodischer Bemerkungen zu machen. Wir bezeichnen bei den Funktionen die abhängige und die unabhängige Veränderliche mit denselben Buchstaben y und x, wie früher bei den Gleichungen die Unbekannten. Es kann nicht scharf genug hervorgehoben werden, daß zwischen der Unbekannten in einer Bestimmungsgleichung und der Veränderlichen in einer Funktion (wenn man durchaus will, in einer Funktionsgleichung) ein fundamentaler Unterschied besteht. Die Unbekannte ist eine bestimmte, wenn auch zunächst noch nicht bekannte Zahl. Die Variable hingegen kann eine unendliche Anzahl von Werten annehmen. Welchen Schaden eine Verwechselung beider Dinge anrichten kann, weiß ja jeder, der analytische Geometrie getrieben hat. Auch da (vgl. S. 314) macht es den Schülern — und sie sind dort doch schon erheblich reifer — immer noch Schwierigkeiten, zwischen beiden Begriffen zu unterscheiden, um so mehr, als in allen Aufgaben der analytischen Geometrie beide Begriffe nebeneinander vorkommen.

Ich weiß wohl, einige Methodiker hauen den gordischen Knoten mit kühner Hand entzwei. Für sie finden sich auch in einer Gleichung mit zwei Unbekannten zwei Variable; jede solche Gleichung ist für sie eine implizite oder explizite Funktion. Und die Wurzel einer Gleichung mit einer Unbekannten $mx + n = 0$ definieren sie als Nullstelle der Funktion $y = mx + n$. Das heißt mit anderen Worten, der Begriff der Bestimmungsgleichung verschwindet ganz und gar. Ich kann mich mit diesem Ausweg nicht befreunden. Man kommt dann jedenfalls in der analytischen Geometrie in die unangenehmsten Verlegenheiten. Was stellt nun $x^2 - a^2 = 0$ dar? Die Nullstellen der Funktion $y = x^2 - a^2$, also die Punkte $x_{1,2} = \pm a$, oder das Geradenpaar $x = \pm a$? Unterscheidet man Bestimmungsgleichung und Funktion, so ist alles klar. Die Wurzeln der Bestimmungsgleichung sind $x_{1,2} = \pm a$, die Funktion wird von dem Geradenpaar $x = \pm a$ veranschaulicht. Ich will nicht unterlassen, auch die folgende, ganz abstruse Anschauung ausdrücklich abzulehnen:

[1] Daß man hier noch nicht vom Tangens sprechen kann, macht dabei nichts aus. Der Begriff der „Steigung" wird jedem Schüler schnell einleuchten. Man kann dann andererseits später in der Trigonometrie an diesen Begriff anknüpfen.

Es gibt Gleichungen mit einer Unbekannten, zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Wenn man aber nur eine von diesen letzteren beiden nimmt, so hat man eine Funktion vor sich. — Danach wäre also $y = a$ keine Funktion. — Ich sehe in dem Nebeneinander der beiden Begriffe Unbekannte und Variable geradezu die einzige wirkliche methodische Schwierigkeit bei der Einführung des Funktionsbegriffes schon in den mittleren Klassen.

Daraus folgt aber für mich eine methodische Forderung, mit der ich mich allerdings in Gegensatz zu manchen Anhängern der Reformbewegung stelle. Ich kann mich durchaus nicht dafür aussprechen, arithmetische und graphische Lösung der Gleichungen ersten Grades von vornherein nebeneinander zu betreiben. Dann ist, so meine ich, eine Verwirrung in den Köpfen der Schüler unausbleiblich. Ich rate unbedingt, zunächst die arithmetische Lösung der Gleichungen ersten Grades mit einer, zwei und mehreren Unbekannten vorweg zu nehmen, erst dann einige allgemeine Ausführungen über empirische Funktionen einzuschalten, und schließlich die linearen Funktionen zu behandeln; dabei ist dann, wie wir noch näher ausführen werden, auch auf die linearen Gleichungen zurückzugreifen.

Ich habe oben schon gewisse Ausdrücke gebraucht, die ich noch einmal genau festlegen möchte. Weil ein Unterschied zwischen Bestimmungsgleichung und Funktion besteht, sollte man es vermeiden, von der graphischen Darstellung einer Gleichung zu sprechen. Man stellt eine Funktion graphisch dar, nicht eine Gleichung. Eine Gleichung, nicht eine Funktion, wird graphisch gelöst.

Als Anwendungen der Lehre von den linearen Funktionen, mit denen man nicht zu sparsam sein sollte, kommen zunächst solche Fälle in Betracht, bei denen der Wert der abhängigen Variabeln durch Rechnung bestimmt und in Tabellenform gebracht wird. Ich denke an die Abhängigkeit von Celsius- und Reaumurgraden — man kann schon hier auf den Einfluß eines Wechsels der Achsen auf das Kurvenbild hinweisen —, an Lohntabellen, an die Darstellung des Weges als Funktion der Zeit, an einfache Zinsen als Funktion des Kapitals oder der Zeit. Die genannten Beispiele liefern sämtlich Funktionen der Form $y = mx$. Praktische Anwendungen für die allgemeine Form der linearen Funktion, bei denen auch das konstante Glied vorhanden ist, sind nicht so zahlreich. Beliebte Beispiele sind die Abhängigkeit zwischen Fahrenheitskala und einer der beiden anderen Temperaturskalen, die Kalkulation etwa eines Buches, bei dem die Seitenzahl veränderlich, aber der für den Einband in Ansatz zu bringende Betrag in gewissen Grenzen unverändert ist.

Es ist zu empfehlen, bei solchen graphischen Darstellungen für den Anfang immer mehr Werte wirklich ausrechnen zu lassen, als unbedingt notwendig sind, damit der Schüler die Tatsache, daß der linearen Funktion eine Gerade entspricht, recht gründlich auffaßt. Es ist auch anzuraten, den mit den Mitteln der Ähnlichkeitslehre zu führenden Nachweis für die Notwendigkeit dieser Tatsache mehrfach und an den verschiedensten Beispielen zu wiederholen. Ob man hier schon auf den bei solchen Betrachtungen auftretenden Differenzenquotienten $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ hinweist, wohl gar den Namen nennt, stelle ich anheim. Immerhin bedenke man, daß schon ein etwas fremdartiger Name dem Schüler eine Sache schwieriger erscheinen läßt, als sie wirklich ist.

Während man zunächst solche Aufgaben an die Spitze stellt, bei denen der Maßstab sich ohne weitere Überlegung von selbst ergibt, muß man bei späteren Beispielen zunächst eine Beurteilung des Maßstabes vom Schüler verlangen. Man gewöhne den Schüler nicht daran, immer 1 cm für die Einheit auf x- und y-Achse anzunehmen. Die bei den empirischen Funktionen notwendigen Erörterungen über den Maßstab haben genügende Vorübungen für eine sachgemäße Beurteilung geliefert. An einigen bestimmten Beispielen linearer Funktionen wird man zeigen, welchen Einfluß auf das Bild der Funktion eine gleichartige und ebenso eine ungleichartige Änderung des Maßstabes auf beiden Achsen hat.

Es hieße die graphischen Darstellungen von Funktionen nur um ihrer selbst willen treiben und einer zeitraubenden aber rein mechanischen Herstellung graphischer Bilder Vorschub leisten, wollte man sich mit der bloßen Zeichnung des Schülers begnügen. Er soll vielmehr seiner Zeichnung nun Werte der Funktionen entnehmen, die ihm vorher nicht gegeben waren, oder die er doch nicht berechnet hatte. Hin und wieder wird man solche graphischen Bestimmungen durch die Rechnung nachprüfen lassen. Wir haben es da mit den einfachsten Fällen der Interpolation zu tun. Ob man diese Frage schon hier allgemein aufwirft, oder erst später bei Kurven, die nicht geradlinig sind, die Bedeutung des Verfahrens aufweist, bleibe dahingestellt. Jedenfalls muß früher oder später das folgende Problem erörtert werden: Zwischen zwei Punkten mit den Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2, die ziffernmäßig gegeben sind, verläuft eine Kurve angenähert geradlinig. Für irgendwelche Werte x_3, die zwischen x_1 und x_2 liegen, sind Näherungswerte y_3 der Funktion durch lineare Interpolation erst graphisch, dann rechnerisch zu bestimmen.

Bisher war noch gar nicht die Rede von derjenigen Anwendung, die von den meisten Lehrbüchern in den Vordergrund gerückt wird, die vielfach sogar als die einzige Anwendung auftritt: die graphische Lösung linearer Gleichungen. Besonderen Wert haben graphische Lösungen nur für den Fall zweier linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten und auch da nur, wenn die Koeffizienten nicht allzu groß sind. Freilich sind gerade diese Gleichungen auch auf arithmetischem Wege immer recht schnell zu lösen. Der Vorteil liegt also jedenfalls nicht in der Schnelligkeit der Lösung. Außerdem ist zu beachten, daß die graphische Lösung ja immer nur Näherungswerte gibt. Wenn man also z. B. auf ganzzahlige Werte der Unbekannten gestoßen ist, so muß man sich erst überzeugen, ob diese Werte auch genaue Lösungen sind.

Trotz solcher Skepsis rate ich durchaus nicht, auf die graphische Lösungsmethode zu verzichten, man bleibe sich nur ihrer Grenzen bewußt. In gewissen Fällen ergeben sich bedeutsame Vorzüge der graphischen vor der arithmetischen Lösung. Das sieht man am deutlichsten an den beliebten Bewegungsaufgaben. Ich gebe zwei Beispiele:

1. Zwei Freunde, welche 25 km voneinander entfernt wohnen, gehen einander entgegen. Der erste legt stündlich $3\frac{1}{2}$ km, der zweite stündlich 4 km zurück. Wann treffen sie zusammen, wenn sie gleichzeitig aufbrechen?

2. Ein Baum ist 28 Fuß hoch. Ein Wurm sitzt unten am Stammende und klettert tagsüber 10 Fuß nach oben, nachts 8 Fuß wieder nach unten. Ein zweiter Wurm sitzt oben und klettert tagsüber 10 Fuß nach unten, nachts 6 Fuß nach oben. Wann treffen sie zusammen?

Die graphische Lösung dieser Aufgaben läßt nicht nur die Zeit des Zusammentreffens erkennen, die die arithmetische Lösung allein liefert, sondern man kann ihr auch entnehmen, wo die beiden Wanderer sich zu irgendeiner anderen Zeit befinden, also auch, wie weit sie zu irgendeiner Zeit voneinander entfernt sind. Die zweite Aufgabe — ich wähle eine der beliebten alten Einkleidungen — ist rein arithmetisch recht schwer zu übersehen. Wie oft treffen sich die beiden Würmchen? Fünfmal, wirklich fünfmal. Der graphische Fahrplan der beiden Reisenden zeigt das sofort.

Man begreift, warum die graphische Methode gerade bei den Bewegungsaufgaben von besonderem praktischen Wert ist. Man sollte nicht verfehlen, graphische Pläne der Eisenbahnen im Original, und da diese recht verwickelt sind, zumal bei vielbefahrenen Strecken, in vereinfachten Skizzen vorzuzeigen. Auch Pläne für den Pendelbetrieb elektrischer Straßenbahnen sind recht lehrreich.

Einen anderen Vorzug der graphischen Lösung linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten sehe ich darin, daß im graphischen Bilde diejenigen Fälle, in denen zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten keine Lösung besitzen, sehr deutlich in die Augen springen. Man sieht, wie zwei Gleichungen, die einander widersprechen, auf parallele Geraden, zwei Gleichungen, von denen die eine aus der anderen folgt, auf eine und dieselbe Gerade führen und also keine Lösungen haben können.

Von Wert ist weiter die graphische Methode für die diophantischen Gleichungen ersten Grades. Auch hier werden die Lösungen durch den einfachen Augenschein gefunden — wobei freilich immer wieder die Möglichkeit, daß es sich um Näherungswerte handelt, beachtet werden muß —, und der Schüler bekommt eine Übersicht über alle Lösungsmöglichkeiten auf einen einzigen Blick, während er bei der Rechnung die Lösungen nacheinander findet.[1]

Ganz ohne praktische Bedeutung ist nach meiner Ansicht die graphische Lösungsweise für die Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Man löst sie als besonderen Fall eines Gleichungssystems mit zwei Unbekannten, nämlich bei der Gleichung $mx + n = 0$ als Schnitt der beiden Geraden $y = mx + n$ und $y = 0$. Man bedenke aber, daß die arithmetische Lösung einer Gleichung ersten Grades, die bereits auf die Normalform gebracht ist, wirklich kein Kunststück mehr ist. Bei der graphischen Lösung muß erst der Wert der Funktion für irgend zwei Werte der unabhängigen Veränderlichen bestimmt werden; das Ergebnis ist dann schließlich doch nur ein Näherungswert, bei dem nötigenfalls noch eine Probe notwendig ist. Freilich ist eins zu bedenken. Wir pflegen bei den eingekleideten Gleichungen vielfach Aufgaben zu lösen, die ihrem ganzen Charakter nach Gleichungen mit zwei Unbekannten sind. Bei Bewegungsgleichungen z. B. ist man besonders groß darin. Dagegen ist vom arithmetischen Standpunkt aus nichts einzuwenden. Denn was man da zur Beseitigung der einen Unbekannten unternimmt, ist, wie früher schon

[1] Alles Nötige findet man schon bei F. Haag, Graphische Lösung der diophantischen Gleichungen 1. Grades, ZmnU 23 (1892), S. 161ff. — Derselbe Gedanke liegt ja der Darstellung der Zahlen eines quadratischen Zahlkörpers (am allereinfachsten des k (i), des durch Adjunktion von $\sqrt{-1}$ zum rationalen Zahlbereich gewonnenen Körpers — Darstellung in der Gaußschen Ebene) zugrunde und wird auf Zahlkörper beliebigen Grades erweitert. Das führt zu der Geometrie der Zahlen, wie Minkowski sie genannt hat.

gesagt, nichts anderes als eine nicht ausdrücklich in arithmetischen Symbolen formulierte Substitution. Man rechnet also doch mit zwei Unbekannten, schreibt sie nur nicht hin, sondern gleich das im Kopf errechnete Ergebnis der Substitution. Bei Aufgaben dieser Art kann die graphische Methode doch ihre Dienste leisten, wenn man von dieser Substitution absieht.

Unseren Ausführungen wird man jetzt ohne weiteres die Gründe entnehmen, warum wir nicht dafür eintreten können, schon bei den Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten die Darstellung der linearen Funktion zu bringen, wie es manche Lehrpläne vorzuschreiben scheinen. Man soll gewiß die Bedeutung graphischer Methoden nicht unterschätzen, man darf sie aber auch nicht überschätzen.

Die Analysis kann Bedeutung gewinnen auch für die Arithmetik im engeren Sinne. Wenn auch für das Verständnis der Rechenoperationen erster Stufe die Zahlengerade ausreicht, so ist doch bei der Erklärung der Rechenoperationen zweiter Stufe die Heranziehung der zweidimensionalen Zahlenebene sehr lehrreich. Auch das haben wir früher ausgenutzt, indem wir ein Produkt als Flächeninhalt deuteten. Hier nun aber noch eine Bemerkung, die früher bereits angekündigt wurde. Dem Schüler machen erfahrungsgemäß die Regeln über die Multiplikation relativer Zahlen Schwierigkeiten. Noch später fehlt es vielfach am Begreifen, wenn die Anwendung schon ganz sicher ist. Wenn die Ableitung dieser Regeln auf der Tagesordnung steht, ist zumeist die graphische Darstellung der linearen Funktion dem Schüler noch nicht bekannt. Man will natürlich erst mit negativen Zahlen rechnen können, ehe man sich in die Zahlenebene mit ihren negativen Ordinaten und Abszissen begibt. Wenn nun aber einige Zeit später die Darstellung der Funktion $y = mx$ behandelt wird, so sollte man sich nicht die Möglichkeit entgehen lassen, jene Regeln noch einmal zu beleuchten. Der graphische Ausdruck für die Multiplikationsregeln

$$m \cdot (-x) = -mx$$
$$(-m) \cdot (-x) = +mx$$

ist dann der, daß wir die Funktion $y = mx$, wo m positiv ist, durch Fig. 73, nicht durch Fig. 74 darstellen, ebenso, wenn m negativ ist, nicht durch Fig. 76, sondern durch Fig 75..

Es mag zum Schluß die Frage aufgeworfen werden, welche von den vier Ausdrücken

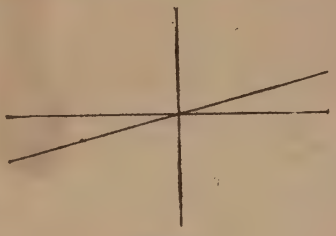


Fig. 73.

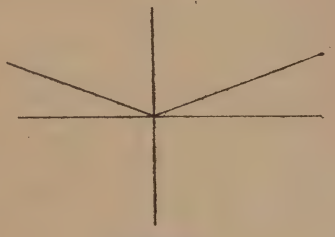


Fig. 74.

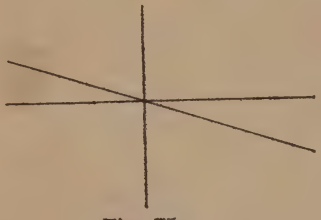


Fig. 75.

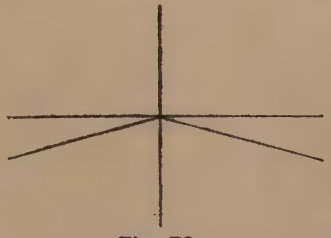


Fig. 76.

(1) $a + b = c,$
(2) $a - b = c,$
(3) $a \cdot b = c,$
(4) $a : b = c,$

die uns die Rechenoperationen erster und zweiter Stufe in den einfachsten Fällen geben, wir nun in funktionaler Hinsicht beherrschen, indem wir also c auffassen als Funktion einmal von a, das andere Mal von b. Man konstatiert, daß wir (1), (2) und (3) für beide unabhängigen Veränderlichen, $a : b = c$ nur für den Fall, daß b konstant gehalten wird, übersehen. Mit der Variabilität von b in (4) kommen wir aus dem Bereich der linearen Funktionen heraus.

4. Die Funktion $y = x^n$.

Wie wir eben bei der Behandlung der vier ersten Rechenoperationen die Ausdrücke $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ in funktionaler Hinsicht untersucht haben und dabei mit nur einer unerledigten Ausnahme auf lineare Funktionen gestoßen sind, so gibt nun der Ausdruck a^n Anlaß zu neuen Funktionsuntersuchungen. Wir lassen zunächst den Exponenten n konstant und nehmen die Basis a variabel. Von selbst ergibt sich ein natürlicher Fortschritt, wenn wir erst n positiv ganzzahlig, dann negativ ganzzahlig, schließlich als Bruch voraussetzen.

Den allereinfachsten Fall und zugleich eine dem Schüler gänzlich neue Kurve liefert die Funktion $y = x^2$. Es ist ratsam, diese Kurve recht sorgfältig zu studieren, insbesondere in ihrem Verhalten zur x-Achse, sind doch sogar die Figuren mancher Lehrbücher recht ungenau. Als Anwendungen der Parabel zweiten Grades bietet sich, nachdem man noch die Funktionen $y = ax^2$, wo a eine negative oder positive Zahl ist, hinzugefügt hat, eine ganze Reihe von Funktionen aus der Geometrie und Physik.

Die graphische Darstellung der Funktion $y = x^3$ zeigt dann wieder ein ganz anderes Bild. Auch hier ist darauf zu achten, wie sich die Kurve der x-Achse anschmiegt. Der Schüler lernt zum ersten Male eine Tangente kennen, die die Kurve durchsetzt.

Für höhere Exponenten genügen nun einige wenige Beispiele. Der Schüler sieht bald, wie sich die Parabeln mit geraden n von denen mit ungeraden n unterscheiden, wie alle Parabeln durch die Punkte (0,0) und (1,1) gehen, wie alle die x-Achse zur Tangente haben, wie sie mit wachsendem n sich einmal immer mehr und mehr der x-Achse anschmiegen, andererseits jenseits von $x = \pm 1$ steiler und steiler werden.

Ich halte es für wünschenswert, daß man den Schülern zeigt, wie man in diesen graphischen Darstellungen ein Mittel hat, über den bisherigen Bereich der Arithmetik hinauszukommen. Ich empfehle deshalb dringend, an der Parabel zweiten Grades zunächst Gleichungen der Form $x^2 = a$ graphisch lösen zu lassen, und zwar nicht nur für Quadratzahlen a, sondern auch für andere Größen. Das kann schon vor der Einführung des Wurzelalgorithmus geschehen. Der Schüler überzeugt sich durch die Probe, daß er dabei nur recht rohe Näherungswerte erhält. Der Nutzen eines arithmetischen Algorithmus zum Ausziehen der Quadratwurzeln springt dann in die Augen.

Ich gebe weiter zu bedenken, ob nicht schon hier Gleichungen zweiten Grades der Form $ax^2 + bx + c = 0$ gelöst werden können durch Schnitt einer Parabel zweiten Grades $y = x^2$ mit der Geraden $ay + bx + c = 0$. Die Methode selbst ist ja allgemein bekannt, nur wird sie fast immer erst dann behandelt, wenn die arithmetische Lösung der Gleichung zweiten Grades zur Diskussion steht. Die grundsätzlichen Schwierigkeiten für den Schüler sind aber nicht größer als bei der graphischen Methode zur Lösung von zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten. Andererseits ist es ein Vorteil, jetzt, wo eine arithmetische Lösung solcher Gleichungen noch nicht gegeben ist, eine Methode zu haben, wenigstens näherungsweise Werte, die der Gleichung genügen, zu finden. Auch hier ist selbstverständlich die Probe in jedem Falle zu fordern, schon um genaue von angenäherten Werten zu unterscheiden. Wenn man auch dafür sorgen muß, daß nicht nur Gleichungen mit rationalen Wurzeln vorgelegt werden, so kann man doch hier ruhig Aufgaben bevorzugen, die auf einfache Zahlen führen und bei denen auch die graphische Lösung im Bereiche praktischer Möglichkeit liegt. Wichtig ist nach meiner Meinung in erster Linie, daß die graphische Näherungslösung schon in einem Stadium ausgenutzt wird, wo die arithmetische Lösung noch nicht da ist. Sie wird gerade das Bedürfnis nach einer beliebig genaue Werte liefernden arithmetischen Lösung wachrufen.

Mit den Parabeln, die der Schüler kennen gelernt hat, kann nun aber in genau der gleichen Weise zunächst die Gleichung $x^n - a = 0$, und dann auch jede Gleichung der Form $ax^n + bx + c = 0$ gelöst werden, wo n eine positive ganze Zahl ist. Man pflegt das vielfach erst für $n = 3$ auszunutzen, wenn der Lehrplan die Behandlung der kubischen Gleichungen vorschreibt. Ich kann aber nicht einsehen, warum nicht ebenso gut schon hier davon die Rede sein kann. Es macht für das Verständnis durchaus keinen Unterschied, ob der Exponent 2, 3 oder 4 ist.[1]

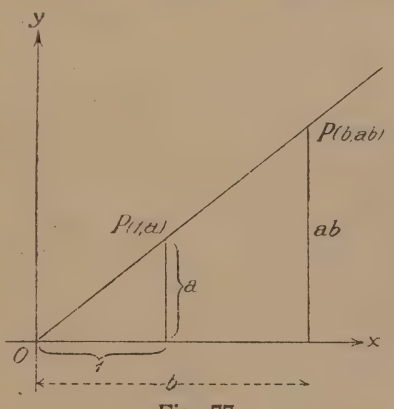


Fig. 77.

Vielfach hat man Mittel und Wege angegeben, die Gesetze der Potenzrechnung, die ja auch erst für positive ganze Exponenten ausgesprochen werden, an den Kurven auf geometrischem Wege zu beweisen. Ich halte zunächst für außerordentlich nützlich, daß man die arithmetisch so leicht zu beweisenden einfachen Potenzregeln an geeigneten Parabeln verifiziert, daß man also beispielsweise durch Messung an der Kurve zeigt, daß $a^2 \cdot b^2 = (ab)^2$ ist. Für noch wichtiger halte ich, daß man in gleicher Weise auch zeigt, daß Formeln, auf die ein Schüler leicht durch naheliegende Analogieschlüsse kommt, falsch sind, daß also z. B. $a^2 + b^2 \neq (a + b)^2$ ist. Das wirkt deutlicher als arithmetisch begründete Warnungen.

Dagegen kann ich mich nicht befreunden mit vollständigen metrischen Beweisen

[1] Vgl. die S. 230 Anm. 2 genannte Arbeit von Flechsenhaar.

der Potenzgesetze. Man führt sie in der Weise durch, daß man mit Hilfe der Ähnlichkeitslehre die Streckenmultiplikation einführt, so daß man also eine geometrisch gegebene Größe mit einer anderen geometrisch gegebenen Größe muliplizieren kann. Die Ausführung ist sehr einfach: Sind die Größen a und b gegeben, so ist zunächst der Punkt $(1, a)$, dadurch der durch den Nullpunkt gehende Strahl, auf dem der Punkt (b, ab) liegt, und damit schließlich die Strecke ab bestimmt (vgl. Fig. 77).

Mit Hilfe dieser Konstruktion läßt sich dann auch geometrisch, also nicht mit dem Maßstab, sondern mit Zirkel und Lineal, untersuchen, ob z. B. das obengenannte Gesetz über das Produkt zweier Potenzen mit gleichem Exponenten zutrifft. Freilich kommt man auf diese Weise nicht zu allen Gesetzen. Will man beispielsweise das arithmetisch allereinfachste Gesetz $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ mit Hilfe der Streckenmultiplikation erproben, so müßte man dazu die Exponentialkurve haben. An dieser Stelle habe ich aber schwere Bedenken, die ich schon einmal (S. 225) geäußert habe. In der Tat scheuen einige Methodiker nicht davor zurück, die Exponentialkurve bereits darstellen zu lassen, wenn der Begriff der Potenz erst für positive ganze Zahlen definiert ist. Von der Exponentialkurve darf nach meiner Meinung erst dann die Rede sein, wenn der Begriff der Potenz mindestens für rationale Exponenten erklärt ist. Fällt die Exponentialkurve fort, so ist ein geometrischer „Beweis" — der genau genommen auch nur eine Bestätigung ebenso wie eine einfache Messung ist — nur bei einzelnen Potenzgesetzen möglich. Da noch obendrein nach meinem Empfinden ein regelrechter arithmetischer Beweis weit durchsichtiger ist, so lasse ich jene geometrischen Überlegungen ganz fallen.

Die Arithmetik läßt auf den Begriff der Potenz mit positivem ganzen Exponenten als erste Erweiterung die Potenz mit negativem Exponenten folgen. Wir werden uns natürlich auch von den Funktionen $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ein graphisches Bild verschaffen wollen. Freilich kommt man bei den Hyperbeln in der Schule schließlich allein mit der Hyperbel $y \cdot x = a$ aus. Wenn man will, kann man auch noch die Hyperbel $y = ax^{-2}$ hinzunehmen. Gerade die Physik liefert zahlreiche Beispiele von Funktionen, die sich durch solche Hyperbeln darstellen lassen. Ob man auch hier wie bei den Parabeln das verschiedene Verhalten der Hyperbeln von geradem und von ungeradem Grade zur Sprache bringt, bleibe dahingestellt; im Bereiche der Möglichkeit liegt es jedenfalls.

Wie eben hat man jetzt auch Gelegenheit zur graphischen Lösung von Gleichungen der Form $\frac{a}{x^n} + bx + c = 0$ oder $px^n + qx^{n-1} + r = 0$.

Der dritte Schritt, von den ganzzahligen Exponenten zu den gebrochenen, gibt Anlaß zur Ausnutzung einer wichtigen graphischen Methode. Es handelt sich im allereinfachsten Falle um die graphische Darstellung der Quadratwurzelkurve, wie ich zunächst einmal sagen möchte. Man kann hier in der üblichen Weise verfahren, indem man für einzelne Werte Punkte der Kurve rechnerisch finden läßt. Dieses Verfahren empfehle ich an Schulen, die später nicht auf Logarithmen eingehen, also z. B. an den preußischen Lyzeen. Anders an den übrigen Schulen. Man benutzt später, doch noch auf der Mittelstufe, bei der logarithmischen Kurve mit Vorteil die Tatsache, daß die Bilder einer Funktion und ihrer inversen Funktion durch Spiege-

lung an der Geraden $y = x$ ineinander übergehen. Die Schüler sollten mit dieser Methode bereits vertraut sein, wenn man an die Logarithmen kommt; man zeige sie deshalb schon bei den Wurzelkurven. Natürlich wird man dann auch auf einfache lineare Funktionen, etwa $y = ax$ und $y = \frac{x}{a}$ oder $y = x + a$ und $y = x - a$, die zueinander invers sind, zurückgreifen.

Es macht jedenfalls keine methodischen Schwierigkeiten, von der Parabel $y = x^2$ zu der Parabel $x = y^2$ oder $y = \pm \sqrt{x}$ überzugehen. — Ich mache ausdrücklich auf die beiden Vorzeichen aufmerksam. Der arithmetische Unterricht hat ja das Wurzelsymbol eindeutig gemacht; wenn man also beide Hälften der Parabel, die in der oberen Halbebene liegende ebenso wie die in der unteren Halbebene, meint, so muß man auch beide Vorzeichen schreiben. Jetzt kann man auch die Parabeln $y = \sqrt[3]{x}$, wenn man will $y = \pm \sqrt[4]{x}$ zeichnen. Der Hauptgewinn liegt hier wieder darin, daß man Näherungswerte für die zweiten, dritten Wurzeln ablesen kann, ehe noch der arithmetische Algorithmus zum Wurzelziehen entwickelt ist. Das gibt einen Fingerzeig dafür, wann die Wurzelkurven zu behandeln sind. Vielleicht auch zeigt man hier schon die Bedeutung der linearen Interpolation, indem man Rechnung und geometrisches Bild in Parallele setzt. Es ist gut, wenn auch in diesem Punkte die Logarithmenlehre auf bereits Bekanntem fußen kann. Vorbereitet werden kann die Interpolation, wie wir gesehen haben, schon im Anschluß an die linearen Funktionen.

Weiterzugehen bis zu Funktionen $y = x^n$, wo n ein einfacher Bruch ist, liegt eigentlich kein zwingender Grund vor. Wer Wert darauf legt, kann an den Beispielen für $n = \frac{2}{3}$ und $\frac{3}{2}$ schon alles Nötige sehen. Das Wichtigste ist dabei die Tatsache, daß die Bilder der Funktionen $y = x^n$, wo n eine rationale Zahl ist, in der Tat in gewissen Punkten und in ihrer Gestalt übereinstimmen, so daß man auch vom Standpunkte der graphischen Darstellung aus berechtigt war, den Potenzbegriff in der Weise, wie es geschehen, zu verallgemeinern.

Jetzt können auch Gleichungen der Form $a \cdot \sqrt[n]{x} + bx + c = 0$ graphisch behandelt werden. Ich weise z. B. darauf hin, daß hier sehr deutlich wird, warum bei dem arithmetischen Verfahren, das die Gleichung auf eine quadratische Gleichung zurückführt, unter Umständen Ergebnisse herausspringen können, die gar nicht Lösungen der vorgelegten Wurzelgleichung sind (vgl. S. 259). Die Wurzelgleichung bezog sich eben nur auf die eine Halbparabel, die zugehörige quadratische Gleichung aber auf beide Hälften.

Fassen wir zusammen, was dem Schüler bisher geboten ist: vom Standpunkt der Arithmetik aus ist es die vollständige Beherrschung des Ausdruckes a^n für rationales n und für variables a; die Kenntnis läßt sich zusammenfassen in die Kurvenschar $y = x^n$, wo n verschiedene rationale Werte annimmt. Für die Gleichungslehre ist eine graphische Methode zur Lösung aller Gleichungen der Form $ax^n + bx + c = 0$ gewonnen, wo n eine rationale Zahl ist. Über eins muß man sich allerdings klar sein, die zweite Tatsache kann auf dieser Stufe nur dann ausgenutzt werden, wenn die Schüler schon von früher her mit Näherungswerten vertraut und mit ihnen zu rechnen gewohnt sind.

5. Die graphische Lösung der Gleichung zweiten Grades.

Der Schüler wird leicht an die Frage herangeführt werden, welche Form eine Funktion annimmt, die zu einer Parabel zweiten Grades gehört, die man aus ihrer Lage heraus bewegt hat. Er wird auch sehen, daß es vorteilhaft ist, dabei zunächst von Drehungen abzusehen und sich auf reine Verschiebungen zu beschränken. Man wird also die Funktionsgleichung zu einer Parabel bestimmen lassen, die um konstante, zunächst ziffernmäßig, dann in allgemeinen Zahlen gegebene Strecken nach oben oder unten, nach rechts oder links verschoben ist. Die umgekehrte Aufgabe, zu irgendeinem Ausdruck die zugehörige Parabel in bestimmter Lage zu finden, ist nicht ganz so einfach. Man muß sie aber wohl erledigen, um die Annahme von der Hand zu weisen, es möchten den Funktionen der Form $y = x^2 + ax + b$ auch noch andere Kurven als Parabeln oder auch Parabeln in anderer Lage entsprechen. Der Schüler bemerkt rasch, daß es auch hier auf die Bildung der quadratischen Ergänzung ankommt, die er von der arithmetischen Lösung der quadratischen Gleichungen her kennt. — Die graphische Darstellung der Funktion $y = x^2 + ax + b$ ist noch auf einem anderen Wege zu erreichen, durch graphische Addition einer Parabel $y = x^2$ und einer Geraden $y = ax + b$. Diese Methode wirft neues Licht auf das früher gegebene graphische Verfahren (vgl. Abschnitt 4) zur Lösung quadratischer Gleichungen, das auf den Schnitt einer festen Parabel mit einer beweglichen Geraden hinauslief.

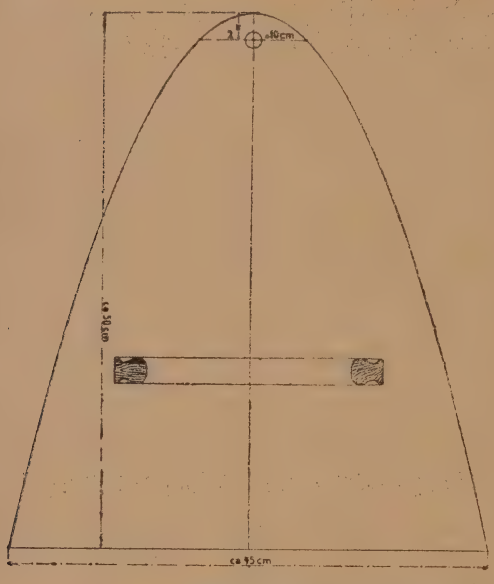


Fig. 78.
Parabelschablone. Die Maße sind eingezeichnet. Ausführung des Polytechnischen Arbeitsinstitutes J. Schröder, Darmstadt.

Von verhältnismäßig geringer Bedeutung ist es, nun auch die Funktion $y = ax^2 + bx + c$ noch ausführlich zu diskutieren; man kann recht gut davon absehen.

Der Lehrer wird sich zu entscheiden haben, was er vorzieht: Soll er die arithmetische oder die graphische Lösung der quadratischen Gleichungen vorwegnehmen. Immer kann er sich bei der Behandlung der zweiten auf Erfahrungen, die bei der ersten gemacht sind, stützen. Ich neige dazu, die arithmetische Methode vorangehen zu lassen, da der Schüler nach meinem Vorschlag schon früher eine andere graphische Methode zur Lösung quadratischer Gleichungen kennen gelernt hat, also zunächst die Forderung nach einer arithmetischen Lösung stellen wird. Das stimmt auch mit dem überein, was später von der praktischen Bedeutung der neuen graphischen Lösung zu sagen ist.

Das Studium der Funktion zweiten Grades wird in erster Linie auf ihre Heran-

ziehung bei der Lösung der quadratischen Gleichung gerichtet sein. Aus der Lage des Scheitels der Parabel ergibt sich sofort, ob die zugehörige quadratische Gleichung zwei, eine oder gar keine reelle Wurzel besitzt. Man kann auch aus den Eigenschaften der Parabel und der Lage des Scheitelpunktes die Lage der Wurzeln rechnerisch angeben. Es ist gelegentlich die Forderung gestellt worden, sich mit dieser an die graphische Darstellung anschließenden Ableitung der Wurzelwerte quadratischer Gleichungen zu begnügen. Ich kann nur raten, auch weiterhin die übliche arithmetische Lösung zu bringen, die die quadratische Ergänzung benutzt. Es kann nur ein Vorteil sein, wenn die Diskriminante dann nachträglich auch geometrisch gedeutet wird. Im übrigen aber wird die Mehrzahl der Mathematiker auch in der Mittelstufe nicht ganz auf die komplexen Wurzeln verzichten wollen.

Und damit komme ich zu einer Beurteilung des Wertes der graphischen Lösungsmethode bei quadratischen Gleichungen. Ich kann ihn ebenso wie bei den linearen Gleichungen nicht so sehr darin sehen, daß man nun mit ihrer Hilfe die Wurzeln tatsächlich graphisch finden kann. Die arithmetische Methode ist ihr dabei immer überlegen, sowohl in der Schnelligkeit wie in der Genauigkeit. Der Wert der graphischen Methode besteht vielmehr in der Bedeutung für die Theorie der quadratischen Gleichungen.

Recht wenig wird die graphische Darstellung für die Theorie der Ungleichungen ausgenützt.[1] Angesichts der starken Vernachlässigung der Ungleichungen im Unterricht der deutschen höheren Schulen sollte man die Möglichkeit, die sich hier bietet, nicht unbeachtet lassen.

Eines fällt, wie gesagt, bei der graphischen Lösung ganz weg: die komplexen Wurzeln. Es ist zwar nicht ganz ausgeschlossen, auch die komplexen Wurzeln aus der graphischen Darstellung der zugehörigen Funktion zu entnehmen. Lenhardt und Quensen haben solche Methoden nach amerikanischen Vorbildern entwickelt[2]; es sind das aber Lösungswege, denen ein gewisses theoretisches Interesse zwar nicht abzusprechen ist, die aber wohl praktisch ohne Bedeutung sind und deshalb ferner liegen.

Wie man durch Verschiebung der quadratischen Parabel auf die zur allgemeinen Funktion zweiten Grades gehörige Kurve kommt, so durch eine entsprechende reine Verschiebung von der gleichseitigen Hyperbel auf die allgemeine Funktion

$$y = \frac{a + bx}{c + dx}.$$

An den deutschen Schulen pflegt man diese Funktion nicht näher zu betrachten; in Frankreich wird sie ausdrücklich in den Lehrplänen angeführt. Es liegt zurzeit kein Grund vor, uns ausführlicher mit der Funktion schon in den Mittelklassen zu befassen; es genügt, wenn man sie als durch Translation aus einer Funktion der Form $yx = a$ entstanden nachweist. Wo in höheren Klassen auf rational gebrochene Funktionen eingegangen wird, mag man an diese Tatsache anknüpfen.

[1] W. Lietzmann, Ungleichungen im Unterricht der höheren Schulen, Lehrproben und Lehrgänge 1921, 1. Heft, S. 69ff.

[2] Ch. Lenhardt, Graphische Darstellung realer und komplexer Lösungen von Gleichungen, ZmnU 44 (1913) S. 116ff. und die S. 271 Anm. 3 zitierte Abhandlung von Quensen.

Wenn wir hiermit unsere Bemerkungen über eine erste Behandlung der rationalen ganzen und gebrochenen Funktionen abschließen, um später denselben Stoff noch einmal mit den Methoden der Infinitesimalrechnung anzugreifen, so sei noch ein Hinweis darauf angefügt, was etwa bei einem vollständigen Verzicht auf infinitesimale Methoden, wie er z. B. an den Realschulen geboten erscheint, über das bisher Behandelte hinaus mit den Schülern durchgearbeitet werden könnte.

Es steht dem nichts im Wege, auch die allgemeine Funktion dritten Grades, gegebenenfalls in der reduzierten Form, graphisch darzustellen und die Nullstellen — damit also die Wurzeln der zugehörigen Gleichung dritten Grades — aufzusuchen. Ich würde es zweckmäßig finden, dann auch die regula falsi hinzuzunehmen, die eine Möglichkeit bietet, Näherungswerte nach Belieben zu verbessern, ohne daß dazu infinitesimale Methoden nötig wären. Auch das Lillsche Verfahren ist zu empfehlen, das praktisch wirklich verwertet wird.[1] An allen Schulen, die bis zur Infinitesimalrechnung vorgehen, ist aber zu raten, mit diesen Dingen so lange zu warten, bis Methoden der Differentialrechnung bekannt geworden sind und eine gewisse Vertrautheit mit der analytischen Geometrie vorausgesetzt werden kann.

6. Algebraische Funktionen.

Man hat früher vielfach in den Kreisen der Reformer schon in den mittleren Klassen allerlei implizite Funktionen zweiten Grades graphisch darstellen lassen, einmal um späteren Pensen vorzuarbeiten, dann aber, um die Auswertung von Wurzelausdrücken zu üben. Heute ist man wohl fast durchgängig davon abgekommen; man will der Diskussion der allgemeinen Form zweiten Grades nicht vorgreifen. Nun bedarf überhaupt die Frage sehr der Erörterung, welche Bedeutung die Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten haben. Könnte man sich nicht vielleicht ganz auf die Fälle beschränken, die später in der analytischen Geometrie zur Sprache kommen, und dann diese Dinge mit der analytischen Geometrie selbst in Verbindung bringen (vgl. S. 313ff.)?

Sei dem wie ihm sei, auf jeden Fall kann man das Kapitel der Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten den Anschauungen älterer Schulmethodiker gegenüber erheblich einschränken und die allgemeine Diskussion in die analytische Geometrie verschieben. Man kann sich in der Untersekunda der Realanstalten und der Obersekunda der Gymnasien mit den allereinfachsten Fällen begnügen und also mit den graphischen Darstellungen einiger ganz weniger impliziter Funktionen zweiten Grades auskommen; es genügen gleichseitige Hyperbel und Kreis, beide in der Gestalt der Mittelpunktsgleichung.

Stimmt man mir zu, so werden also die Funktionsgleichungen $x^2 + y^2 = r^2$ und $x^2 - y^2 = r^2$ zu der schon bekannten Gleichung der gleichseitigen Hyperbel $xy = a^2$ hinzukommen. Daß im ersten Falle der Kreis herausspringt, lehrt sofort der pythagoreische Satz; daß die zweite Kurve mit der schon bekannten gleichseitigen Hyperbel identisch ist, kann nicht ganz so leicht eingesehen werden. Wenn

[1] Vgl. z. B. O. Prölls, Graphisches Rechnen (Aus Natur und Geisteswelt 708) Leipzig (Teubner) 1920 und C. Runge, Praxis der Gleichungen, 2. Aufl. Berlin (Vereinig. wiss. Verl.) 1921.

man den Nachweis durch Drehung für zu schwer hält, kann man ihn auf später verschieben, wo er sich bei der Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades als ein besonderer Fall ergibt.

Man wird bei der Besprechung des graphischen Bildes auf die Realitätsfragen achten; das eine Mal erhält man eine ganz im Endlichen liegende geschlossene Kurve, das andere Mal eine Kurve, die in der Gegend des Koordinatenanfangspunktes keine reellen Werte hat. Zu erörtern sind auch die Symmetrieverhältnisse, die man schon der analytischen Form der Kurve ansehen kann, die Abhängigkeit von den Konstanten — also die Diskussion von Kurvenscharen — und dgl. mehr.

Dabei allgemein ein Wort zu der praktischen Aufstellung von Tabellen als Grundlage der graphischen Darstellungen. Üblich ist die Anlage in zwei Kolonnen. Bei größeren Rechnungen ist es aber zweckmäßiger, auch die Zwischenwerte der besseren Kontrolle wegen in die Tabelle aufzunehmen. Wenn also etwa $x^2 + y^2 = r^2$ vorliegt, mithin $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ auszuwerten ist, so stelle man eine Tabelle her mit folgenden Eingängen:

x	x^2	$r^2 - x^2$	$\sqrt{r^2 - x^2}$

Mit Hilfe der genannten Kurven kann man alle diejenigen Fälle graphisch erledigen, die arithmetisch von besonderes Wichtigkeit sind. Wenn von den folgenden Ausdrücken: lineare Gleichung zwischen den Unbekannten, Summe der Quadrate der Unbekannten, Differenz der Quadrate der Unbekannten, Produkt der Unbekannten irgend zwei gegeben sind, so entspricht der Lösung der Gleichung immer der Schnitt bekannter Figuren. Weiterzugehen, den verschobenen Kreis, die Ellipse und die allgemeine Hyperbel noch hinzuzunehmen, halte ich an dieser Stelle für unnötig. Darauf kann später die analytische Geometrie eingehen.

Auf zweierlei möchte ich noch hinweisen, was sich an die graphische Darstellung der einfachen algebraischen Funktionen anknüpfen läßt. Wir haben bei der Planimetrie von der sogenannten algebraischen Geometrie gesprochen. Ich deutete bereits früher an, daß man die funktionale Abhängigkeit einer Größe von anderen betonen und nun natürlich auch die graphische Darstellung heranziehen kann. So haben es z. B. Behrendsen und Götting in ihrem Lehrbuch getan. Man wird dabei, da wir uns auf Funktionen einer Variablen beschränkten, nur eine einzige der gegebenen Größen variieren lassen. Geht man in dieser Hinsicht die wichtigsten Funktionen durch, so stößt man gerade wieder auf die linearen Funktionen, die einfachen Parabeln, Kreise und Hyperbeln.

Wir hatten bei den linearen Funktionen auf die diophantischen Gleichungen hingewiesen. Gleiches kann hier geschehen. Ich nenne nur das wichtigste Beispiel, die pythagoreische Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

In dieser Form führt die Gleichung freilich auf ein räumliches Problem, wenn man sich nicht auf die Abhängigkeit von nur jedesmal einer Größe bei konstant gehaltener zweiten beschränken will. Auch dieses kann man (vgl. mein Bändchen über den pythagoreischen Satz) durchaus elementar behandeln. Der Darstellung in der Ebene erschließt man die Gleichung, wenn man durch z^2 dividiert und die neuen

Variablen x und y an Stelle der früheren Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ in die pythagoreische Gleichung einführt; sie heißt dann $x^2 + y^2 = 1$. Den ganzzahligen Lösungen der pythagoreischen Gleichung entsprechen die rationalen Punkte — d. h. die Punkte mit rationalen Koordinaten, — durch die der Einheitskreis geht. Ich bemerke in Parenthese, daß in dieser Einkleidung das große Fermatsche Problem besagt, daß eine algebraische Kurve $x^n + y^n = 1$, wo n eine positive ganze Zahl größer als 2 ist, niemals während ihres ganzen Verlaufes im ersten Quadranten durch einen Punkt mit rationalen Koordinaten geht; es ist gewiß eine sehr merkwürdige Tatsache, daß sich die ganze Kurvenschar durch alle die unendlich vielen rationalen Punkte hindurchwindet, ohne auch nur einen einzigen von ihnen zu erreichen. Ich will mit dieser Bemerkung nicht gesagt haben, man sollte nun schon hier algebraische Funktionen der zuletzt erwähnten Art behandeln. Sie mögen einer späteren Zeit überlassen bleiben, wenn auch die infinitesimalen Methoden zu Gebote stehen.

Das gleiche gilt von einem Problem, das nun neben der analytischen Form wieder die geometrische Seite stärker hervortreten läßt. Man kann die algebraischen Kurven im Gegensatz zu den transzendenten durch Gelenkmechanismen erzeugen. Die einfachste dieser Aufgaben ist ja die Geradführung. Ich empfehle eine elementare Darstellung dieser Dinge von H. Mohrmann.[1]

7. Exponentialfunktion und logarithmische Funktion.

Erst nachdem der Begriff der Potenz für rationale Exponenten definiert worden ist, kann man, wie schon gesagt, an die graphische Darstellung der Exponentialfunktion gehen. Ich möchte raten, bei der eigentlichen Potenzrechnung noch ganz von ihr abzusehen. Unumgänglich notwendig wird dann die Diskussion der Funktion aber, wenn man an die Lehre von den Logarithmen herankommt.

Die Zeichnung der Exponentialkurve $y = a^x$ durch Punktkonstruktion macht keine Schwierigkeiten, solange a eine positive Zahl ist. Man wird für einige Basiszahlen a die Kurven ausführen lassen und aus der so entstehenden Kurvenschar ablesen, was an gemeinsamen Eigenschaften der Exponentialkurven erkennbar ist, welcher Unterschied insbesondere zwischen $a < 1$ und $a > 1$ besteht. Wie nun aber bei negativer Basis? Es ist ganz verfehlt, deshalb, weil die Sache hier unangenehm wird, diesen Fall einfach mit Stillschweigen zu übergehen. Es ist doch anzunehmen, daß der eine oder andere der Schüler über die Frage nachdenkt und womöglich auf Schwierigkeiten gerät, aus denen er selbst sich nicht herausreißen kann. Also man lasse frischweg auch die Kurve für ein negatives a bestimmen. Da der Schüler noch nicht beliebige Wurzeln ziehen kann, wählt man für a den Wert -1. Da haben wir zunächst eine wundervolle Warnung vor allzu schneller Herstellung graphischer Darstellungen: Wenn der Schüler die Werte für gerade und ungerade Exponenten eingetragen hat, wird er nur zu leicht schließen: Aha, es kommt eine Zickzackkurve heraus. Wie ist er nachher erstaunt, daß solcher Hinundhergänge noch unendlich viele zwischen je zwei ganzzahligen Exponenten sich abspielen, daß dazwischen un-

[1] H. Mohrmann, Über die Erzeugung algebraischer Kurven mit Hilfe von Gelenkmechanismen, ZmnU 48 (1917) S. 242ff.

endlich viele Lücken sind, in denen die Kurve imaginär wird, daß also die Kurve auf jedem noch so kleinen Stückchen unendlich oft von + 1 nach — 1 und umgekehrt springt und dabei doch noch jedesmal Lücken läßt. Also — und das ist der Zweck der ganzen Übung hier in Untersekunda: Es kommt eine höchst „unvernünftige" Kurve heraus, auf die wir uns besser nicht einlassen. Wir verzichten also auf Exponentialkurven, deren Basis negativ ist.[1]

Weniger einfach steht es mit einem anderen Einwand. Wir hatten uns bei dem Symbol a auf den reellen positiven Hauptwert beschränkt. Daß man die komplexen Werte aus dem Spiel läßt, leuchtet dem Schüler ein. Nicht so sehr die Beschränkung auf die positiven Werte. Wenn n ein Bruch mit geradem Nenner ist, erhalten wir auch einen negativen reellen Wert neben dem positiven. Wir können auch diese Werte mit berücksichtigen. Dann erhalten wir gleichzeitig einen Kurvenzug in der negativen Halbebene, freilich liegen hier die Punkte nur „halb so dicht" wie oben, aber immer noch überall dicht. — Tatsächlich nehmen wir später sogar zu den rationalen noch die irrationalen Werte hinzu. Klein hat ganz recht, daß die Tatsache, daß sich die Hauptwerte oben zu einer kontinuierlichen Kurve zusammenfügen, nicht aber auch unten, im Elementarunterricht undiskutiert bleibt, daß also der Grund für die Beschränkung der Exponentialkurve auf die Hauptwerte dem Schüler diktiert, die Notwendigkeit dieser Einschränkung aber nicht erwiesen wird.

Man wird auf dieser Stufe dem Schüler noch nicht einen Begriff von der Wichtigkeit der Exponentialfunktion in den angewandten Disziplinen, besonders in der Physik, geben können. Eine Ahnung davon wird er aber schon an der Hand einfacher Beispiele erhalten können; man betrachte etwa das Anwachsen der Zahl der Lebewesen nach dem Gesetz der Exponentialfunktion.

Die logarithmische Kurve wird nun als Umkehrung der Exponentialkurve gewonnen, also geometrisch gesprochen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden der Koordinatenachsen. Natürlich kann man auch erst an der Exponentialkurve selbst Logarithmen bestimmen lassen. Wenn freilich, wie wir geraten haben, das geometrische Bild einer Umkehrung von Funktionen bereits bei Gelegenheit der Wurzelkurven behandelt ist, so kann man gleich an die graphische Herstellung der Logarithmenkurve gehen. Es genügt, das für irgendeine beliebige, der praktischen Zeichnung wegen möglichst klein gewählte ganzzahlige Basis, also 2 oder 3, und dann für die Basis 10 zu tun. Im letzteren Falle wird man, wenn man mit der Kurve etwas anfangen will, in der Richtung der y-Achse eine Verzerrung im Maßstabe 1 : 10 vornehmen.

Was eben von der Schwierigkeit bei der Abgrenzung der Exponentialfunktion gesagt worden ist, gilt in ganz der gleichen Weise von der aus ihr durch Spiegelung gewonnenen logarithmischen Funktion. Man wird freilich annehmen dürfen, daß der

[1] Euler schreibt in einem Brief vom 5. November alten Stils 1727 an J. Bernoulli aus Petersburg: „Ich bin zufällig auf diese Gleichung gestoßen: $y = (-1)^x$; was für eine Figur sie darstellt, scheint schwer bestimmbar, da y bald positiv, bald negativ, bald imaginär ausfällt; mir scheint sie nicht eine stetige Linie auszudrücken, sondern unendlich viele Punkte, welche diskret im Abstande gleich 1 zu beiden Seiten der Achse liegen, aber gleichzeitig zusammengenommen der Achse gleichkommen."

Schüler auf dieser Stufe an der dogmatischen Begrenzung des Begriffes keinen Anstoß nehmen wird.

Ganz besonders wertvoll ist die graphische Darstellung für das Verständnis der Interpolation. Ich hatte vorgeschlagen, den Schülern schon früher bei geeigneten Funktionen den Wert und die Begründung des Interpolierens klarzumachen. Die Bedeutung der Logarithmen als praktisches Rechenmittel legt es nahe, etwas ausführlicher die Frage zu erörtern.

Da jede Logarithmentafel die Logarithmen nur auf eine ganz bestimmte Anzahl Stellen angibt, während die genauen Logarithmen im allgemeinen Irrationalzahlen sind, so ist aus der Logarithmentafel genau genommen nicht die logarithmische Kurve, sondern nur ein Streifen, in dem die Kurve liegt, zu entnehmen. Dieser Streifen hat in der Richtung der y-Achse eine Breite von 1 : 10000, wenn es sich etwa um vierstellige Logarithmen handelt. Dieser Streifen ist nun auch wieder nur durch einzelne Punkte angedeutet, da die Tafel ja die Logarithmen nur für gewisse Zahlen gibt, die bei einer vierstelligen Tafel einen Abstand von 1 haben, wenn die Ausdehnung der logarithmischen Kurve von 100—1000 gedacht wird. So ergibt sich also das nebenstehende schematische Bild für den Bereich, in den eine Logarithmentafel die logarithmische Funktion einschließt. Eine Interpolation in der von uns ausgeführten Weise wird dann zu richtigen Werten führen, wenn die logarithmische Kurve und die Sekante, die bei der Interpolation die Kurve ersetzt, innerhalb des Polygonstreifens bleiben. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Funktion monoton wächst oder abnimmt, daß also nicht etwa Ausbuchtungen nach oben oder unten vorhanden sind. Man kann diese Möglichkeit, wie Schwarz[1] gezeigt hat, auf elementarem Wege bei der logarithmischen und bei den trigonometrischen Kurven ausschalten, wenn man es für nötig hält.

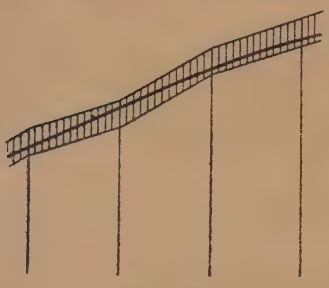


Fig. 79.

In der ersten Begeisterung für die mathematische Reformbewegung ist man an manchen Stellen vielfach mit der Zeichnung von Kurven, deren analytischer Ausdruck vorliegt, sehr weit gegangen. Man hat schon in mittleren Klassen neben algebraischen allerlei höchst komplizierte transzendente Funktionen graphisch dargestellt. Solche Beispiele knüpften gern an die logarithmische Kurve an. Ich kann es nun wohl verstehen, daß man für die häufig gebrauchten Funktionen $y = \log \sin x$, $y = \log \cos x$ usf. nach den Tafelwerten eine graphische Darstellung anfertigen läßt, wenn man Zeit genug hat; ich möchte aber dringend davon abraten, darüber hinauszugehen.[2]

8. Nomographie.

Wir haben uns bis jetzt bei der graphischen Darstellung von Funktionen auf Kurvenbilder in Cartesischen Koordinaten beschränkt. Damit ging Hand in Hand

[1] Schwarz, Kurventheoretisches im Unterricht, ZmnU 45 (1914), S. 235ff.

[2] Hack, Beispiele aus der Elementarmathematik und verwandten Gebieten zur Einführung in den Funktionsbegriff, ZmnU 41 (1910) S. 1ff.

eine Beschränkung auf eine unabhängige Variable. Man kann an die Stelle des cartesischen Koordinatensystems auch andere treten lassen, so etwa ein schiefwinkliges oder ein Polarkoordinatensystem, ja manchmal benutzt man sogar selbst in Fällen praktischer geometrischer Veranschaulichungen Dreieckskoordinaten mit gutem Erfolg. Man kann weiter von der Ebene in den Raum gehen und damit die Funktionen mit zwei Variablen der geometrischen Darstellung erschließen. Auf all das wird man hier und da mit einigen Beispielen einzugehen Anlaß haben.

Neuerdings pocht nun eine andere Art graphischer Methoden recht kräftig an das Tor der Schule, die u. a. das Problem der graphischen Behandlung von Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen in der Ebene meistert, die Nomographie. Zunächst ein Wort über Netztafeln. Wir knüpfen an die graphische Darstellung mit einem einfachsten Beispiel an. Die Funktion $z = xy$ veranschaulichen wir in einem rechtwinkligen Koordinatensystem durch eine Kurvenschar gleichseitiger Hyperbeln $xy = a$, wo a alle Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ durchläuft. Zeichnen kann man natürlich nur einzelne dieser Kurven, etwa $xy = 0$, $xy = +1$, $xy = -1$, $xy = +2$ usf. Ein Wertetripel m, n, p, das die Funktion befriedigt, für das also $m \cdot n = p$ ist, wird durch einen Punkt mit den Koordinaten m und n bezeichnet, durch den eine mit p bezifferte Hyperbel geht. Denke ich mir auch die Schar der Geraden $y = m$, $x = n$ noch ausgezogen, so treffen sich also in jedem Punkte der Ebene je ein Vertreter aller drei Kurvenscharen. Die allgemeinere Form der Netztafel ist dann die, daß nicht wie in unserem Beispiel zwei Geradenscharen mit einer Kurvenschar zusammentreten, sondern irgend drei Kurvenscharen, die gewisse allgemeine Bedingungen erfüllen.

Die besondere Aufgabe dieses ersten Zweiges der Nomographie[1] ist es, bei einer vorgelegten Funktion die drei Netze so zu wählen, daß die Bestimmung der zueinander gehörigen Wertetripel möglichst zweckmäßig ist. Zu diesem Zweck nimmt man eine Transformation der Variablen und damit eine Änderung des graphischen Bildes, eine sog. Anamorphose vor. In unserem Falle bildet man z. B. $\log z = \log x + \log y$ und kann nun auf logarithmischem Koordinatenpapier die Kurven durch Geraden ersetzen.[2]

Das dem besprochenen duale Problem erhält man, wenn man drei Kurven mit Punktescharen hat und nun das Wertetripel dadurch findet, daß zugehörige Punkte der drei Scharen auf der gleichen Schnittgeraden liegen. Im einfachsten Falle sind die Träger der Punktescharen Geraden. Wir haben es in diesem Falle mit Fluchtentafeln zu tun.

Man kann mit der Nomographie auch an die ebene Behandlung von Problemen mit mehr als drei Variablen herangehen; keinesfalls ist es nötig, daß die Funktion in expliziter Form gegeben ist.

---

[1] Vgl. etwa H. Fürle, Rechenblätter, Jahresbericht der IX. Realschule Berlin, 1902; P. Schreiber, Grundzüge einer Flächen-Nomographie, 2 Bände, Braunschweig (Vieweg) 1921 und 1922.

[2] Mannigfache Arten von Funktionspapieren hat die Firma Schleicher und Schüll in den Handel gebracht. Über sie und ihre Verwendung berichtet W. Große, Graphische Papiere und ihre vielseitige Anwendung, Düren (Schleicher und Schüll) o. J. (1917).

Die Schule wird sich zunächst mit Erfolg an die Aufgabe heranmachen können, solche Punktescharen auf einer Geraden als graphische Bilder einer Funktion zu konstruieren. Wenn man die Punkte einer logarithmischen Kurve mit den zugehörigen x-Werten beziffert und nun diese Punkte auf die y-Achse projiziert, so erhält man eine logarithmische Skala oder, wie Luckey sagt, Leiter, wie sie uns vom Rechenschieber her vertraut ist. Andere einfache Skalen lassen sich schon in den Mittelklassen etwa für die Funktionen $y = \frac{1}{x}$ und $y = x^2$ herstellen. Man kann mit zwei Skalen dieser Art graphisch rechnen. Das ist ja beim Rechenschieber allgemein bekannt. Mit der Funktion der reziproken Werte beherrscht man z. B. die in der Physik wichtige Gleichung $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$, ebenso mit der Skala der Quadratzahlen die pythagoreische Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$. Damit die Schüler schon von vornherein an diese Art mechanischen Rechnens durch Verschieben zweier Skalen gewöhnt werden, empfiehlt es sich, schon in den Unterklassen die Addition und Subtraktion mit zwei Meterstäben ausführen zu lassen. Das pflegt den kleinen Rechenschülern großen Spaß zu machen.

Nun kann man, wenn aus der Geometrie die Ähnlichkeitslehre als Beweismittel zur Verfügung steht, zu einfachen Fluchtentafeln übergehen. Die Geraden sind Träger von Funktionsskalen, die der Schüler leicht selbst herstellen kann — wobei aber größte Sorgfalt Vorbedingung für praktische Brauchbarkeit des Nomogramms ist — oder aber aus den käuflichen Funktionspapieren ausschneidet. Zugehörige Wertetripel gewinnt man nicht dadurch, daß man eine Gerade durch das Nomogramm zieht, das würde die Zeichnung bald unbrauchbar machen, sondern indem man einen dünnen Faden darüber spannt oder eine auf durchsichtigem Zelluloid eingeritzte Gerade darüber legt.

Für die Einführung der Nomographie, von der wir hier nur die Grundzüge angedeutet haben, in den Unterricht der höheren Schulen hat sich mit großer Energie immer und immer wieder P. Luckey eingesetzt.[1] Auf Netztafeln hat vor ihm schon J. Druxes[2] hingewiesen. Man sollte in der Tat diesen Vorschlägen mit eigenen Versuchen nachgehen. Zunächst ist der Linearzeichenunterricht eine gute Gelegenheit, Nomogramme wirklich genau zeichnen zu lassen; davon wird noch im dritten Teilband zu reden sein. Immerhin wird dieser wahlfreie Unterricht die Grundlehren dieser Darstellungsweise nicht selbst entwickeln können, er wird sich auf den Mathematikunterricht stützen müssen. Auch diejenigen Fächer, die der Mathematik als Hilfswissenschaft bedürfen, insbesondere die Physik, haben gleichfalls ein Interesse an der Nomographie. Im Kriege hat ja die Nomographie in der Technik einen Siegeszug sondergleichen angetreten. Der Physikunterricht sollte

[1] Ich nenne in erster Linie P. Luckey, Einführung in die Nomographie (MPhB 28 und 37) Leipzig, Teubner, 1918 und 1920. Sodann einige Abhandlungen in der ZmnU, alle von P. Luckey: Die Aufsuchung gewisser Gesetze nach graphischer Methode und die Verwendung des logarithmischen Koordinatensystems **45** (1914) S. 28ff.; Kartesische Koordinaten, Parallelkoordinaten und Funktionsskalen als Arbeitshilfen im Unterricht, **46** (1915) S. 401ff.; Kriegsnomogramme **48** (1917) S. 1ff. und 60ff.; Schulnomogramme, **49** (1919) S. 194ff.

[2] J. Druxes, Ausführlicher Lehrgang der Arithmetik und Algebra nach modernen Grundsätzen, I. Bd. Cöln (Du Mont-Schauberg) 1910.

also seinerseits häufiger als es bisher üblich von Nomogrammen Gebrauch machen.[1] Auch die Anwendungen der Trigonometrie auf mathematische Erd- und Himmelskunde sind zu nennen, ja die ersten praktischen Nomogramme des Altertums und des Mittelalters — darauf hat P. Luckey in einem Vortrage auf der Bonner Versammlung des Förderungsvereins hingewiesen[2] und ist mit diesen historischen Bemerkungen über den französischen Hauptförderer der Nomographie, M. d'Ocagne, hinausgegangen, der sie als einen Zweig neuzeitlicher Forschung ansieht — beziehen sich alle auf dieses Gebiet. Der Schule aber dürften solche Beispiele aus der angewandten Trigonometrie etwas ferner liegen, es sei denn, daß man Sonnenuhren u. dgl. bereits als Nomogramme anspricht.

Keinesfalls kann es sich darum handeln, mit der Nomographie ein neues, in sich geschlossenes Gebiet der Schulmathematik einzugliedern. Genau so wie die übliche graphische Darstellung in Cartesischen Koordinaten benutzt wird, wo sie gerade im Interesse der Anschaulichkeit, der Übersichtlichkeit oder auch der schnelleren Lösbarkeit von Aufgaben erwünscht ist, wird es mit der Nomographie sein. Es wird der Mathematik zukommen, im Arithmetikunterricht den Begriff der Funktionsskala einzuführen, die Idee des Rechenschiebers in größerer Allgemeinheit als bisher, also nicht bloß für die logarithmische Funktion, zu entwickeln und mit den Mitteln der Ähnlichkeitslehre vielleicht dann noch den Grundgedanken der Fluchtentafel herauszuarbeiten. Alles andere wird im Linearzeichnen und in der Physik, nicht zuletzt auch in der Mathematik[3] dann entwickelt werden, wenn man Verwendung dafür hat. An Gelegenheiten dazu wird es nicht fehlen.

B. Analytische Geometrie.[4]

9. Die analytische Geometrie der Geraden und des Kreises.

Fast in allen höheren Schulen gehört die analytische Geometrie zum lehrplanmäßig vorgeschriebenen Stoff der obersten Klassen; wo es nicht der Fall ist, liegt ein beklagenswerter Mangel des Lehrplanes vor.[5] Bekanntlich hat es seinerzeit energischer Forderungen bedurft, diesen Stoff auch den Gymnasien zu erschließen.

[1] Außer an den angegebenen Stellen hat Luckey weitere Beispiele in der ZphchU behandelt: P. Luckey, Nomogramme für den Zustand der Luft **31** (1918) S. 177ff.; —, Graphische Rechentafel für den Zustand der Gase **33** (1920) S. 128ff.; vgl. auch P. Hanck, Die graphische Lösung der Hohlspiegelgleichung Ebenda **34** (1921) S. 166ff.; —, Die Abhängigkeit des Widerstandes von Glühlampen von der Stromstärke **34** (1921) S. 72ff.

[2] Der geschichtliche Teil dieses Vortrages soll ausführlich in den Ubl wiedergegeben werden. Siehe auch P. Luckey, Die Fluchtentafel im Dienste der Himmelskunde, Sirius, 1922 Heft 2/3.

[3] Ich nenne als Beispiel die Zinseszinsrechnung. Hier hat schon Luckey ein Nomogramm angegeben und neuerdings ist eine andere Form beschrieben worden in P. Hanck, Ein Nomogramm für die Zinseszinsformel ZmnU **52** (1921) S. 261ff.

[4] Aus der reichen Literatur, die für den Lehrer in Betracht kommt, wenn er sich über die wissenschaftliche Seite der analytischen Geometrie unterrichten will, greife ich einige Werke heraus, die mir für diesen Zweck besonders geeignet scheinen: Ganter und Rudio, Die analytische Geometrie der Ebene, 8. Aufl., Leipzig (Teubner) 1914; Rudio, Die analytische Geometrie des Raumes, 5. Aufl., Leipzig (Teubner) 1913; C. Runge, Analytische Geometrie der Ebene, Leipzig (Teubner) 1908 betont den Vektorbegriff; R. Fricke, Ana-

Die Älteren erinnern sich vielleicht noch der Rede, die Du Bois Reymond[1] 1877 in Köln über Kulturgeschichte und Naturwissenschaft hielt und die in das „Feldgeschrei" ausklang: „Kegelschnitte! Kein griechisches Skriptum mehr!" Hier wird die „Diskussion der Gleichung zweiten Grades" gefordert und der Wunsch laut, den Schülern der Gymnasien „den Blick in die Differentialrechnung zu eröffnen".

Man kann sich fragen, ob denn eine noch einmal von Grund aus aufbauende analytische Geometrie notwendig ist, wenn der Schüler schon in den Mittelklassen bei Gelegenheit der graphischen Darstellung mit den Grundgedanken der analytischen Geometrie vertraut geworden ist. Stellen wir einmal zusammen, was der Schüler bereits von der analytischen Geometrie der Ebene, insbesondere der Geraden und des Kreises, weiß. Er kennt das rechtwinklige Koordinatensystem, weiß, daß eine lineare Funktionsgleichung eine Gerade darstellt und versteht, sie auf die Normalform $y = mx + n$ zu bringen. Er kennt auch die Bedeutung der darin auftretenden Koeffizienten m und n. Die Mittelpunktsgleichung des Kreises ist ihm nicht unbekannt, und mit der reinen Verschiebung des Koordinatensystems ist er, wenn er sie auch vielleicht nicht auf den Kreis angewandt hat, so doch jedenfalls von der Parabel her vertraut. Ist es da nicht angebracht, ganz auf eine nochmalige Durchsprechung dessen, was die analytische Geometrie über Gerade und Kreis zu sagen hat, zu verzichten und sofort mit der analytischen Geometrie der Kegelschnitte zu beginnen?

Diese Frage ist glattweg zu verneinen. Das Problem der analytischen Geometrie ist, wie schon mehrfach hervorgehoben, ein anderes als das der graphischen Darstellung. Die graphischen Darstellungen haben uns Begriffe und Gesetze aus Arithmetik und Algebra geometrisch veranschaulicht, die analytische Geometrie soll uns die Geometrie arithmetisieren. Die erste Aufgabe der analytischen Geometrie wird also die sein, die elementaren Aufgaben der Dreiecks- und Kreisgeometrie in die arithmetische Form umzusetzen. Man wird sich dabei von vornherein darüber klar sein, daß man diese Aufgabe nicht vollständig für alle Konstruktionen und Sätze der Planimetrie zu lösen braucht, daß man dem Schüler nur an grundlegenden Beispielen zu zeigen hat, wie sie im allgemeinen gelöst werden kann.

Wir gehen bei der Grundlegung der analytischen Geometrie von den von der Planimetrie her bekannten Dingen aus; schon daß man als Koordinatenachsen zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden nimmt, gehört dahin. Eine rein analytische Darstellung des Gebietes wird sich das nicht gestatten dürfen. Für sie ist ein Zahlenpaar (a, b) ein Punkt, eine Funktionalgleichung $cx + dy + e = 0$ eine Gerade. x-Achse ist die Gerade $y = 0$ usf. — Auf der Schule möchte ich einer solchen Dar-

lytische Geometrie, Leipzig (Teubner) 1915. Von den umfangreicheren Werken empfehle ich in erster Reihe H. Beck, Koordinatengeometrie 1. Bd.: Die Ebene, Berlin (Springer) 1919. Über die Geschichte der analytischen Geometrie unterrichten H. Wieleitner, Zur Erfindung der analytischen Geometrie, ZmnU **47** (1916) S. 414ff.; ders., Die Anfänge der analytischen Raumgeometrie, ZmnU **49** (1918) S. 73ff.

[5] Ich habe über einen derartigen Lehrplan aus neuer Zeit berichtet: W. Lietzmann, Über den mathematischen Lehrplan einer sächsischen Reformanstalt, ZmnU **50** (1919) S. 97ff.

[1] Du Bois Reymond, Reden, 1. Band, 2. Aufl., S. 567ff., Leipzig (Veit) 1912.

stellung nicht das Wort reden, es ist aber gut, wenn sich der Lehrer über einen solchen Weg klar ist.

Wenn früher die analytische Geometrie ganz unvermittelt dem Schüler gegenübertrat, so mochte man seine Bedenken haben, sich gleich ausführlich über den allgemeinen Koordinatenbegriff zu äußern. Jetzt scheinen mir diese Bedenken hinfällig, da der Schüler mit dem am häufigsten gebrauchten cartesischen Koordinatensystem schon lange Jahre vertraut ist. Wer trotzdem eine Erörterung des allgemeinen Koordinatenbegriffes hier für verfrüht hält, der mag sie an späterer Stelle einschalten.

Koordinaten sind, wenn man den Begriff ganz allgemein faßt, genaue, gewissen Bedingungen (Eineindeutigkeit, Stetigkeit) genügende Angaben, durch die die Lage eines Punktes auf einer Fläche oder im Raum bestimmt ist.[1] Höfler erzählt von seinem Lehrer Petzval, dieser pflegte zu sagen: die Adresse sei nichts anderes als die Angabe der Koordinaten der Wohnung. Nebenbei bemerkt: Wenn jemand in Mannheim oder in Karlsruhe wohnt, so würde bei der besonderen Bauweise dieser beiden Städte diese Koordinatenangabe bei geeigneter Wahl der Bezeichnungen ganz und gar dem cartesischen bzw. dem polaren Koordinatensystem angepaßt werden können.

Der Schüler wird sofort in der Lage sein, Beispiele für Koordinatensysteme anzugeben, jedenfalls die Längen- und Breitengrade der Erde. Es wird nicht schwer halten, ihm den Unterschied von einfachen und von gewissermaßen überbestimmten Koordinatensystemen klarzumachen. Als Beispiel der letzten Art kann man die Angabe der Lage eines Punktes in der Ebene durch seine Abstände von drei Geraden in der gleichen Ebene wählen. Schließlich erkennt der Schüler als Grundzug eines zweckmäßigen Koordinatensystems in einer Fläche, daß diese mit zwei Scharen von Kurven überdeckt wird, die einander schneiden und von denen jede für sich den in Betracht kommenden Teil der Fläche ohne Lücken überdeckt. Durch jeden Punkt der Fläche geht also von jeder Schar eine und nur eine Kurve. Den einzelnen Kurven jeder Schar müssen dann noch Namen gegeben werden, sie müssen „numeriert" werden. Einfache Beispiele sind das rechtwinklige und das schiefwinklige Koordinatensystem, das Polarkoordinatensystem und als ein etwas weniger bekanntes und für die Schule nur als Beispiel in Betracht kommendes System die beiden Scharen konfokaler Ellipsen und Hyperbeln.

Man wird nicht umhin können, die Gleichungen von Gerade und Kreis wenigstens für einige der neuen Koordinatensysteme auch abzuleiten. Da man später in der Kegelschnittlehre mit schiefwinkligen und mit Polarkoordinaten auskommt, genügen diese beiden Systeme. Auf homogene Koordinaten in der Schule einzugehen, halte ich für überflüssig.

---

[1] Noch allgemeiner kann man sagen: „Koordinaten sind Zahlen, welche die Lage eines geometrischen Elementes (also nicht nur, wie eben gesagt, Punktes) eindeutig bestimmen, und zwar so, daß bei stetiger Änderung der Koordinaten das Element ebenfalls stetig seine Lage ändert und umgekehrt." So heißt es bei P. B. Fischer, Koordinatensysteme (Sammlung Göschen) 1911, einem Buch, auf das hier der Lehrer für die allgemeine Fragestellung verwiesen sei.

Ein weiterer Punkt, der Beachtung erheischt, ist die Transformierung einer Gleichung in eine andere, die bei einem Wechsel des Koordinatensystems notwendig wird. Der einfachste Fall, dem Schüler schon bekannt, ist eine Parallelverschiebung des rechtwinkligen Koordinatensystems. So einfach die Sache an sich ist, so macht doch erfahrungsgemäß das Vorzeichen der Verschiebung Schwierigkeiten. Man muß von vornherein sorgfältig die beiden Fälle auseinanderhalten, einmal, daß das Koordinatensystem verschoben wird und die Kurve fest bleibt, zum anderen, daß die Kurve verschoben wird und das Koordinatensystem fest bleibt.

An zweiter Stelle steht die Drehung eines rechtwinkligen Koordinatensystems um den Anfangspunkt. Wenn nötig, kann hier als Beispiel die Umwandlung der gleichseitigen Hyperbel, deren Gleichung auf ihre Asymptoten als Achsen bezogen ist, in eine andere, die auf ihre Hauptachsen bezogen ist, nachgeholt werden. Der weitere Schritt, ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem durch ein anderes zu ersetzen, ist jetzt sehr einfach zu tun. Die Transformationsgleichungen für die Drehung werden erfahrungsgemäß sehr schwer von den Schülern behalten. Man läßt sie also, wenn sie viel gebraucht werden, gründlich auswendig lernen. Werden sie im Unterricht nur wenig angewandt, so leite man den Schüler an, schnell die zugehörige Figur zu zeichnen und daraus die Gleichung abzulesen.

Des weiteren wird man die Transformation eines rechtwinkligen in ein schiefwinkliges Koordinatensystem — es genügt der Fall, daß beide gleichen Koordinatenanfangspunkt haben — und die eines rechtwinkligen in ein Polarkoordinatensystem zu behandeln haben. Die Aufstellung der Gleichungen von Gerade und Kreis einmal unmittelbar, dann durch Transformation aus der Gleichung für rechtwinklige Koordinaten wird als Beispiel vorerst genügen.

So viel, um die Schüler mehr als bisher mit der Handhabung des Koordinatensystems vertraut zu machen. Der Erledigung harrt noch die oben angedeutete Aufgabe, die grundlegenden Konstruktionen und Berechnungen der Planimetrie in die Sprache der analytischen Geometrie umzusetzen. Wir waren uns schon darüber klar geworden, daß es sich nur um eine Auslese handeln kann. Die Reichhaltigkeit dieser Auslese wird durch die zur Verfügung stehende Zeit bedingt sein. Die einfachsten Aufgaben sind etwa: Welches ist die Länge einer durch ihre beiden Eckpunkte gegebenen Strecke, wo liegt der Mittelpunkt der Strecke, wo liegt ein Punkt, der die Strecke innerlich oder äußerlich in vorgeschriebenem Verhältnis teilt; wie groß ist der Inhalt eines von drei gegebenen Punkten bestimmten Dreiecks? Dann die Aufgaben über die Lage von Geraden: Eine Gerade ist durch zwei Punkte bestimmt oder durch einen Punkt und den Richtungsfaktor usf. Hier stellt es sich als wünschenswert heraus, den besonderen Fällen möglichst gut angepaßte Formen der Gleichung zur Hand zu haben. Man leitet nacheinander die Gleichungen

$$(1)\ \frac{y-y_1}{x-x_1}=m, \qquad (2)\ \frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \qquad (3)\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

ab, (1) für eine durch einen Punkt gehende Gerade mit dem Richtungsfaktor m, (2) für eine durch zwei Punkte gehende Gerade, (3) für eine auf den Koordinatenachsen die Strecken a und b abschneidende Gerade, schließlich die Hessesche Normalform

$x \cdot \cos \varphi + y \sin \varphi = p$. Bei dieser Gleichung macht es oft den Schülern Schwierigkeit, daß p eine absolute Größe ist. Zu erörtern ist auch, wie der Winkel φ in den verschiedenen Quadranten zu zählen ist.[1]

Bei allen diesen Gleichungen ist nicht bloß zu untersuchen, wann sie besonders praktisch anzuwenden sind, sondern ebenso auch, wann sie versagen. So ist $y = mx + n$ unbrauchbar, wenn $m = \infty$ wird, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, wenn a und b Null sind, nur $Ax + By + C = 0$ umfaßt alle Fälle.

Von planimetrischen Konstruktionsaufgaben, die in analytischer Form zu lösen sind, führe ich nun außer den schon genannten an: Es ist durch einen Punkt zu einer Geraden eine Parallele zu ziehen, der Schnitt zweier Geraden zu bestimmen, der Winkel zu bestimmen, den zwei Geraden miteinander bilden, die Winkelhalbierende zweier Geraden anzugeben, von einem Punkte auf eine Gerade die Senkrechte zu fällen und in einem ihrer Punkte auf ihr die Senkrechte zu errichten.

Man tut gut, wohl auch einmal einen bekannten Satz der Planimetrie analytisch zu beweisen, etwa einen der Sätze über die merkwürdigen Punkte im Dreieck. Einmal treten dabei die Grundaufgaben in größerer Zahl auf, dann aber ist eine Erörterung darüber, welche Lage des Koordinatensystems, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu tun, am praktischsten ist, eine nicht zu unterschätzende Übung für später.

Eine Frage mag gleich hier noch einmal gestreift werden: Soll man im Unterricht der höheren Schulen auch die analytische Geometrie des Raumes heranziehen oder sich auf die Ebene beschränken? Die Lehrpläne in Preußen lassen keinen Zweifel, daß sie eine Beschränkung auf die Ebene wollen; wurde doch sogar in der alten Prüfungsordnung für das höhere Lehramt in Mathematik für die zweite Stufe nur die analytische Geometrie der Ebene verlangt. Andererseits ist gewiß nichts dagegen einzuwenden, wenn man an der oder jener Stelle auf räumliche Koordinaten eingeht, zeigt, wie die Gleichung einer Ebene, einer Fläche und ebenso einer Geraden, einer Kurve im Raume aussieht. Nur daß man diese Dinge in demselben Maße systematisch behandelt wie die Gebilde in der Ebene, das wird man ablehnen müssen. Anders liegen die Dinge z. B. an den Oberrealschulen Württembergs, die mit ihrem größeren Stundenausmaß für Mathematik aus dem Rahmen der übrigen höheren Schulen Deutschlands herausfallen. Dort kann wirklich in gewissem Umfange analytische Geometrie des Raumes getrieben werden.

Es ist neuerdings, wie schon früher (S. 168) erwähnt wurde, von einer Seite vorgeschlagen worden, mit der darstellenden Geometrie eine analytische Geometrie des Raumes zu verknüpfen.[2] Das ist gewiß ein sehr beachtenswerter Vorschlag. Eine solche Fusion böte große methodische Vorteile. Ich lehne sie trotz alledem ab, weil

[1] Vgl. Vorschläge zur Vereinheitlichung der mathematischen Bezeichnungen im Schulunterricht. Schriften des DAMNU, Heft 17, S. 9, Leipzig (Teubner) 1913. — Dazu H. Beck, Die Hessesche Normalform, ZmnU 47 (1916) S. 530ff.

[2] W. Rudolphi, Analytische Geometrie des Raumes in Verbindung mit darstellender Geometrie, 4 Teile, Jahresbericht Gymnasium und Oberrealschule Neumünster, Ostern 1911, 1912, 1913, 1914.

es an Zeit gebricht.[1] Eine Stunde, die sich erübrigen läßt, benutzt man viel besser beim Abschluß der analytischen Geometrie zu einem Ausblick. Darüber in Abschnitt 11 einige Worte.

10. Analytische Geometrie der Kegelschnitte.

Für die Definition der Kegelschnitte[2] hat man in der Schule im allgemeinen drei Ausgangspunkte zur Verfügung, wenn ich hier von der Geometrie der Lage absehe: Man definiert die Kegelschnitte entweder auf Grund der Brennpunktseigenschaften als geometrische Örter oder auf Grund ihrer Scheitel- oder Mittelpunktsgleichung oder schließlich als Schnitte des geraden Kreiskegels. In der analytischen Geometrie pflegt man von der Ortsdefinition ausgehend die Mittelpunktsgleichung herzuleiten. Später wird dann in einer stereometrischen Betrachtung die Verbindung zwischen Definition als Schnitt des ebenen Kreiskegels und der Gleichung in einfacher Weise hergestellt. Die dritte, wenn auch nun nicht mehr notwendige Verbindung zwischen Schnittdefinition und Ortsdefinition wird der synthetischen Geometrie überlassen.

Zu der Herleitung der Mittelpunktsgleichungen von Ellipse und Hyperbel ist kaum etwas zu sagen. Man hat hier ein Beispiel für das in der Mittelstufe bei Wurzelgleichungen geübte Verfahren vor sich, bei dem es sich darum handelt, durch zweimaliges Quadrieren die Quadratwurzeln wegzuschaffen. Noch einfacher liegen die Dinge bei der Parabel. Durch die den Schülern bereits bekannten Transformationsgleichungen läßt sich nun der Kegelschnitt in besonderer Lage sofort durch Translation oder Rotation oder durch beides in eine beliebige Lage bringen. Der Schüler wird dabei bemerken, daß man immer auf eine Gleichung kommt, die in x und y vom zweiten Grade ist. Daran ist später wieder anzuknüpfen.

Mit diesen Gleichungen der Kegelschnitte wird man nun an die Lösung von Aufgaben gehen. Man bestimmt den Schnitt von Gerade und Kegelschnitt und dergleichen mehr. An die Bestimmung der Tangente geht man am besten mit infinitesimalen Methoden heran, vorausgesetzt, daß sie zur Verfügung stehen. Ich komme darauf in den folgenden Abschnitten zurück. Hier sei nur gesagt, daß es sich, um einer Zerreißung zusammengehöriger Stoffe vorzubeugen, empfiehlt, die Differentiation der rationalen ganzen und wenn man will auch der gebrochenen Funktionen vorweg zu nehmen[3] und die Differentiation der algebraischen Funktionen mit der analytischen Geometrie der Kegelschnitte zu verschmelzen. Bei gewissen Aufgaben über Kegelschnitte führen schiefwinklige Koordinaten schneller als rechtwinklige zum Ziel; das gilt von allen Fragen, die mit konjugierten Durchmessern zusammenhängen, oder bei der Hyperbel bei manchen Aufgaben über Asymptoten. Auf den gymnasialen Anstalten kann man zur Not diese Transformationen ganz weglassen.

[1] In Württemberg, wo die Oberrealschulen lehrplanmäßig analytische Geometrie des Raumes treiben, dürfte der Gedanke der Fusion auf fruchtbaren Boden fallen. Vgl. die von der Rudolphischen unabhängige Arbeit: W. Dietmann, Über die Verbindung der darstellenden mit der analytischen Geometrie auf den württembergischen Oberrealschulen, Oberrealschule Eßlingen 1914.

[2] Vgl. hierzu die Ausführungen der Abschnitte 2 und 4 im sechsten Kapitel.

[3] Die rationalen ganzen Funktionen kann man ganz gut schon in der Obersekunda der Realanstalten differenzieren, vielleicht auch schon integrieren lassen.

Auch die Transformierung der Kegelschnittgleichungen aus dem cartesischen System in ein Polarsystem, bei der das Gemeinsame der drei verschiedenen Formen zum Ausdruck kommt, kann in gymnasialen Anstalten wegfallen, während man auf realen Anstalten schon wegen der Anwendung auf die Theorie der Planetenbewegung[1] darauf nicht verzichten sollte.

Von besonderer Bedeutung erscheint mir nun die Umkehrung jener Fragestellung, die vorhin erwähnt wurde, die Untersuchung, ob auch jede Gleichung zweiten Grades mit zwei Variablen einen Kegelschnitt darstellt. Wie man schrittweise vorgeht, um zu zeigen, daß man durch geeignete Drehung (Fortschaffung des Gliedes mit xy) und Verschiebung auf einen der Kegelschnitte, bezogen auf den Mittelpunkt oder den Scheitelpunkt, kommt, ist ja allgemein bekannt. Ich halte diese Diskussion für sehr wertvoll, einmal, weil sie auch zur Besprechung der „entarteten" Kegelschnitte führt, dann aber, weil man mit besonderer Sorgfalt die Vorzeichen der Koeffizienten diskutieren muß. In der Prima begegnet es einem nicht selten, daß eine Gleichung der Form $ax^2 + by^2 = c$ für eine Ellipse angesehen wird, weil der Schüler gar nicht daran denkt, daß die Koeffizienten auch negativ und Null werden können.

Diese ganze Diskussion der Form zweiten Grades bleibt nun aber unausgenützt, wenn man nicht zu einer größeren Anzahl von Gleichungen zweiten Grades die Kurvenbilder herstellen läßt. Der reine Mathematiker mag sich damit begnügen, gezeigt zu haben, daß man für eine vorgelegte Form zweiten Grades ein irgendwie orientiertes Kegelschnittbild angeben kann; in der Schule aber können wir uns damit keinesfalls zufrieden geben, wir müssen nun auch die Probe auf das Exempel machen und zu bestimmten vorgelegten Gleichungen die Kegelschnitte wirklich zeichnen. Ich muß bei der praktischen Ausführung noch einmal auf das Vorzeichen der Verschiebungen und Drehungen die Aufmerksamkeit richten (S. 310).

Hier ist nun meiner Meinung nach der Ort, wo eine Behandlung der Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten ihre eigentliche Stelle hat. Wir haben ein vollkommenes gegenseitiges Entsprechen. Die Algebra will die arithmetische Lösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten geben, ihr tritt die geometrische Veranschaulichung zur Seite. Die analytische Geometrie wiederum will die geometrische Aufgabe, den Schnitt zweier Kegelschnitte, lösen, ihr tritt die arithmetische Lösung zur Seite. Können wir beide Lösungen, die arithmetische und die geometrische geben, gut; wenn nicht, auch gut, dann begnügen wir uns mit einer, und sei es nur eine geometrische Näherungslösung. Es hat übrigens, glaube ich, gar keine Bedenken, die Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten bis hierher zu verschieben, wenn man nur vorher solche einfachen Fälle vorweg genommen hat, wie wir sie früher schon für die Mittelstufe der Realanstalten erwähnt hatten (bei denen also, geometrisch gesprochen, außer der Geraden nur Kreis und gleichseitige Hyperbel, auf den Mittelpunkt bezogen, in Frage kommen).

Man kann nun noch ein Drittes hinzunehmen: Die arithmetische Lösung der Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten führt auf eine biquadratische Gleichung. Umgekehrt kann man eine biquadratische Gleichung immer durch zwei

[1] Ich verweise auf P. Meth, Theorie der Planetenbewegung (MPhB 8), 2. Aufl. Leipzig (Teubner) 1921, ein nicht ganz leicht geschriebenes, aber doch einem befähigten Primaner zugängliches Büchelchen.

Kegelschnittgleichungen ersetzen. Dieses Verfahren, Gleichungen durch Schnitt von Kurven graphisch zu lösen, das unserem Unterricht jetzt wieder sehr nahe liegt, war schon einmal vor etwa 150 Jahren sehr in Mode und hat zu zahlreichen Methoden geführt.[1] Historisch ist die Sachlage so, daß man im Altertum und im Mittelalter Gleichungen 3. und 4. Grades graphisch löste[2], während später, nachdem inzwischen die arithmetische Lösung dieser Gleichungen gelungen war, der Kurvenschnitt arithmetisch behandelt wurde. Lehrreich ist die Tatsache, daß man auf diesem analytisch-geometrischen Wege zwei Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten stets auf eine kubische Gleichung zurückführen kann.[3]

Nun noch einige didaktische Bemerkungen. Beim Lösen analytischer Aufgaben ist mit besonderer Sorgfalt auf die Unbekannten zu achten, deshalb, weil diese durchaus nicht immer aus den mit x und y bezeichneten Variablen hergeleitet zu sein brauchen. Aus diesem Grunde hatte ich schon in der Algebra bei den linearen Gleichungen empfohlen, sich nicht auf die Buchstaben x und y als Symbole für die Unbekannten festzulegen. Weit schwerwiegender aber noch ist der Umstand, daß in der analytischen Geometrie andauernd Variable und Unbekannte wechseln (einfachster Fall: Schnitt zweier Geraden). Ich habe im Unterricht der analytischen Geometrie meine Schüler immer daran gewöhnt, die Variablen und nur diese mit x und y ohne Index zu bezeichnen. Handelt es sich um Unbekannte, so werden sie, wenn sie aus den Variablen hervorgehen, mit x und y mit Index bezeichnet. Wenn also beispielsweise die beiden Geraden

$$ax + by = c; \qquad dx + ey = f$$

zum Schnitt gebracht werden, so habe der Schnittpunkt die noch unbekannten Koordinaten x_0 und y_0, dann haben wir zu deren Bestimmung die beiden Gleichungen

$$ax_0 + by_0 = c; \qquad dx_0 + ey_0 = f.$$

Ich unterscheide also auch hier sorgfältig zwischen Funktions- und Bestimmungsgleichung. Tut man das nicht, so ist eine heillose Verwirrung bei allen auch nur ein wenig umfangreicheren Aufgaben die Folge. Eine Idee, die der nun auch schon verstorbene Herausgeber der Lackemannschen Lehrbücher, Kreuschmer, mit mir einmal besprochen hat, scheint mir für die erste Einführung recht beachtenswert. Auch in der Zeichnung unterscheidet Kreuschmer die variablen Punkte von den festen. Ein variabler Punkt wird durch einen kleinen Kreis, also durch

[1] H. Wieleitner, Zur graphischen Lösung von Gleichungen durch den Schnitt von Kurven, Ubl **20** (1914) S. 34ff.

[2] Als Beispiele nenne ich die Lösung der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ durch Schnitt einer Parabel $y = x^2 + ax + b$ mit der gleichseitigen Hyperbel $xy + c = 0$, oder der Gleichung $x^3 + px + q = 0$ durch Schnitt der Parabel $y = x^2$ mit dem Kreis $(x + \frac{q}{2})^2 + (y + \frac{p-1}{2})^2 = \frac{q^2 + (p-1)^2}{4}$. Diese Lösungswege von Descartes sind in unserer Zeit wieder entdeckt worden; vgl. z. B. K. Kruse, Diskussion und Anwendungen der allgemeinen Kegelschnittgleichung, ZmnU **40** (1909) S. 288ff. — Sie finden sich jetzt in zahlreichen Aufgabensammlungen.

[3] P. Zühlke, Eine analytisch-geometrische Lösung des Systems zweier allgemeiner quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten durch eine kubische Gleichung, ZmnU **48** (1917) S. 155ff.

einen auf der Geraden oder der Kurve gleitenden „Ring" bezeichnet, ein fester Punkt durch ein Kreuz.[1]

Von den Aufgaben zur analytischen Geometrie verdient eine Gruppe besondere Hervorhebung, weil sie in methodischer Hinsicht recht wichtig ist, das Aufsuchen geometrischer Örter. Das Problem, den geometrischen Ort von Punkten zu suchen, die irgendwelchen bestimmten Bedingungen genügen, ist ja überhaupt für die theoretische und die praktische Geometrie von großer Bedeutung. In der Art und Weise aber, wie die analytische Geometrie nicht nur bei der Auffindung der Gestalt des geometrischen Ortes, sondern auch bei der Feststellung der Lage in ganz systematischer Weise vorgeht, ist eine besonders fruchtbare Verwendung der funktionellen Betrachtungsweise zu erblicken. Neuere Aufgabensammlungen der analytischen Geometrie bevorzugen deshalb mit Recht derartige Aufgaben vor anderen, die auf öde Rechnereien hinauslaufen.[2]

Noch ein Wort über die Stellung der analytischen Geometrie der Kegelschnitte im Lehrplan und über ihren weiteren Ausbau. Zunächst ist es sehr wohl möglich, daß an den höheren Lehranstalten, insbesondere in den Gymnasien, die Kegelschnittlehre lediglich in ihrer analytischen Form zur Sprache kommt. Häufig wird aber daneben noch eine Kegelschnittlehre nach rein geometrischen Methoden getrieben. Wir hatten früher (S. 190 ff.) ausführlich davon gesprochen. Hier nur noch ein Wort über die Vereinigung einer synthetischen Kegelschnittlehre, die in der Art von Apollonius vorgeht, mit analytischen Methoden. Für ein solches Verfahren liegen praktische Versuche in größerer Zahl vor, leider aber noch keine rechten Lehrbücher. Auf der Versammlung des Förderungsvereins in Halle a. S. 1912 hielt Schrader, Halle, über die Frage einen Vortrag, der aber leider nicht veröffentlicht ist, wohl weil in der Diskussion von mehreren Seiten betont wurde, daß man ebenso verfahre wie der Vortragende. Aber eine Diskussion darüber, welche Sätze man nun bei einem solchen Vorgehen analytisch behandelt, welche synthetisch, scheint mir doch recht wertvoll.

Jetzt sind nun noch einige Kapitel der Kegelschnittlehre zu erwähnen, die zumeist ihre Stelle im Rahmen anderer Gebiete des mathematischen Unterrichtes finden. Von der Berechnung von Flächen, die von Kegelschnitten oder Teilen davon erzeugt werden, handelt die Integralrechnung. Läßt man sie in der Schule weg, dann gibt man elementare Herleitungen — bei Parabel und Ellipse eine sehr einfache Sache. Die Bestimmung der Krümmungskreise wird in der Differentialrechnung geschehen. Die Lehre von Pol und Polare, die zumeist in synthetischer Form abgehandelt wird, läßt sich recht gut auch in das analytische Gewand kleiden.[3] Auch die projektive Geometrie kann man analytisch entwickeln, doch geschieht das recht selten. Wer

[1] Das ist in der der Lackemannschen Planimetrie angehängten „Einführung in den Funktionsbegriff und Funktionen in graphischer Darstellung" in den Figuren durchgeführt.

[2] So z. B. Koppe-Diekmanns Geometrie, 3. Teil. Neue Bearbeitung von K. Knops, Essen (Bädecker), und J. Schroeder, Aufgaben für den Unterricht in der analytischen Geometrie der Ebene, Leipzig (Teubner) 1910. Vgl. auch die Abhandlung: H. Pfaff, Geometrische Örter als Übungsstoff für die Prima, ZmnU 37 (1908) S. 253ff., 321ff.

[3] J. Dronke, Pol und Polare im Unterricht der analytischen Geometrie, ZmnU 45 (1914) S. 623ff.

schließlich die analytische Geometrie noch weiter führen will, kann die Kegelschnittbüschel heranziehen. Das in dieser Richtung gelegene für unsere norddeutschen Schulen nicht erreichbare Maximum gibt eine Programmabhandlung von Silcher.[1]

11. Geometrischer Ausblick.

Ich benutze hier, wo zum letzten Male von der Geometrie gesprochen wird, die Gelegenheit, einige Worte darüber zu sagen, was man in einem Ausblick beim Abschiede vom geometrischen Unterrichtsstoff etwa wird andeuten können. Dabei erinnere ich mit einigen Strichen an jene Auffassung vom Wesen der Geometrie, die F. Klein vor nunmehr über 50 Jahren in seinem sogenannten Erlanger Programm niedergelegt hat.[2] Jeder Raumpunkt ist durch drei Koordinaten oder Zahlenwerte x, y, z gegeben. Die Geometrie ist die Feststellung von Invarianten dieser drei Veränderlichen gegenüber irgendwelchen Transformationen. So die analytische Formulierung des Problems. Anschaulich entspricht der Transformation eine Abbildung; Aufgabe der Geometrie ist also die Untersuchung von Eigenschaften der Figuren, die bei irgendwelchen Abbildungen invariant bleiben. Klein unterscheidet nun eine Reihe von Arten der Geometrie, wobei das Einteilungsprinzip gestellt wird von den Transformationen bzw. von den Abbildungen.

Die metrische Geometrie untersucht diejenigen Eigenschaften, die bei Parallelverschiebung, Drehung, Spiegelung und Maßstabänderung invariant bleiben. Mit unseren Hilfsmitteln der analytischen Schulgeometrie können wir recht gut nachweisen, wie z. B. die Länge einer durch ihre Endpunkte gegebenen Strecke oder der Inhalt eines Dreiecks bei einer Verschiebung und bei einer Drehung unverändert bleibt. Auch der Fall der Maßstabänderung läßt sich ohne weiteres erledigen. Bei der Spiegelung kann man sich analytisch ohne Schädigung der Allgemeingültigkeit auf den Fall der Spiegelung an einer Koordinatenachse beschränken.

Die affine Geometrie behandelt die Eigenschaften der Figuren, die gegenüber den Transformationen

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad y = a_2 x + b_2 y + c_2$$

invariant bleiben; ich beschränke mich auf die Ebene, da ja auch die Schule in der Regel nur ebene analytische Geometrie treibt. Man sieht zunächst, daß die der metrischen Geometrie eigenen Transformationen als Sonderfälle in diesen Gleichungen enthalten sind, z. B. eine reine Verschiebung $x' = x + a$, $y' = y + b$. Welche Ergebnisse der elementaren Geometrie gehören aber darüber hinaus zur affinen Geometrie? Da ist zunächst an den ersten Strahlensatz zu erinnern. Zwei

[1] G. Silcher, Die Verwendung des Kegelschnittbüschels in der elementaren Geometrie, Königl. Oberrealschule Stuttgart-Cannstadt, Ostern 1912.

[2] F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872. Abgedruckt in Mathematische Annalen 43 (1893) S. 63ff. und —, Gesammelte Abhandlungen Bd. I, Berlin (Springer) 1921. Vergl. dazu F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Teil II: Geometrie, 2. Aufl. Leipzig (Teubner) 1913. Ich verweise dann auf das S. 308 Anm. genannte Buch von Beck und auf L. Heffter und C. Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie, 1. Bd. Leipzig (Teubner) 1905, schließlich auf den Artikel III AB 4b von Fano in der großen mathematischen Enzyklopädie.

sich schneidende Geraden werden durch eine Schar paralleler Geraden aufeinander abgebildet — dies der Inhalt des ersten Teils des Strahlensatzes — und zwei parallele Geraden werden durch die Strahlen eines Strahlenbüschels aufeinander abgebildet — dies der Inhalt aus einer Folgerung des zweiten Teiles des Strahlensatzes. In beiden Fällen haben wir auf den beiden Geraden affine Punktreihen. Drehe ich im ersten Falle die eine Gerade um ihren Schnittpunkt mit der andern Geraden so lange, bis beide zusammenfallen, dann habe ich zwei affine Punktreihen auf dem gleichen Träger. Als Modell affiner Punktreihen kann man die bekannten Nürnberger Scheren benutzen.[1] Wie bei den linearen Gebilden kann man nun auch mit zwei Ebenen verfahren, die man — im ersten Fall — durch ein Bündel paralleler Geraden aufeinander bezieht. Man sieht hier z. B. wie ein Kreis mit der Ellipse affin verwandt ist. Als affine Abbildung ergibt sich nicht nur wie in dem eben genannten Beispiel die einfache Verzerrung, sondern auch die Scherung, als deren einfachsten Fall ich etwa die Verwandlung eines Dreiecks in ein anderes, das gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat, wobei sich aber der eine Eckpunkt auf einer Parallelen zur Gegenseite verschoben hat. Als Modell für derartige Figurenverwandlungen eignen sich Zeichnungen auf dem für Stickereien viel benutzten Canevas, Kannefaß oder Stramin[2]. Mit diesen Beispielen ist schon Stoff zur Sammlung von Eigenschaften, die bei affiner Transformation invariant bleiben, gegeben. So bleibt die Halbierung einer Strecke, der Schwerpunkt eines Dreiecks gegenüber einer affinen Abbildung invariant. Parallelogramme und Ellipsen sind Figuren der affinen Geometrie, nicht Rechteck und Kreis.

Die nächste Stufe ist die projektive Geometrie. Hier handelt es sich um Invarianz gegenüber den Transformationen

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_0 x + b_0 y + c_0}, \qquad y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_0 x + b_0 y + c_0},$$

wenn ich mich wieder auf die Ebene beschränke. Während bei der affinen Geometrie der unendlich ferne Punkt unendlich fern blieb, ist das in der projektiven Geometrie nicht mehr der Fall; die Auszeichnung der unendlich fernen Gebilde verschwindet. Die Ellipse ist also nicht Gegenstand der projektiven Geometrie, sondern der Kegelschnitt. Als Invariante gegenüber der projektiven Transformation kann man auch analytisch unschwer das Doppelverhältnis nachweisen. Wenn die Schule aber etwas projektive Geometrie getrieben hat, empfiehlt sich an dieser Stelle mehr die Heranziehung anschaulicher Verfahren, etwa der Kollineationslehre.

Als eine letzte Art der Geometrie, bei der als Transformationen beliebige stetige Funktionen zugelassen werden, kommt schließlich die Analysis situs in Betracht. Hier wird man auf der Schule ganz auf das analytische Gewand verzichten müssen und sich dafür auf die Anschauung einstellen.[3] Einem Rückblick auf den Euler-

[1] Derartige Modelle hat F. Klein zusammen mit Remag hergestellt.

[2] Ich sah derartige Modelle, die Schorer hergestellt hat; sie sind leider noch nicht im Handel erhältlich.

[3] Deutsche Lehrbücher über Analysis-Situs gibt es nicht. Einen Überblick über die Forschungsergebnisse gibt der Artikel III A B 3 von M. Dehn und P. Heegaard, Analysis situs, in der großen mathematischen Enzyklopädie.

schen Polyedersatz in der eindimensionalen, zweidimensionalen und dreidimensionalen Geometrie kann ein Ausblick auf verwandte einfache Probleme folgen, seien es auch die mehr unterhaltenden Aufgaben über unikursale Kurven, das Eulersche Brückenproblem, die Labyrinthe, das Dodekaederspiel von Hamilton, die Kleeblattschlinge usf.[1]

Ich habe jeweils immer gleich angedeutet, in welchem Rahmen eine Besprechung auf der Schule erfolgen kann; man wird immer bestrebt sein, Einzelfragen als Beispiele herauszugreifen. Es kommt nicht darauf an, eine systematisch vollständige Zusammenfassung des im Lehrgang der Schule behandelten Geometriestoffes zu geben, sondern nur, das Einteilungsprinzip aufzudecken.

Bei einem solchen Ausblick am Schluß des geometrischen Unterrichtes hat man nun noch Gelegenheit, auf einzelne Dinge andeutend einzugehen, die erfahrungsgemäß den mathematisch interessierten Schülern am Herzen liegen. Der eine Punkt ist das Hineinspielen des Begriffes des Unendlichen in die Geometrie; darauf wiesen wir ja schon mehrfach hin. Man soll sich gewiß in unteren und mittleren Klassen hüten, mit gelegentlichen Bemerkungen unklare Vorstellungen beim Schüler hervorzurufen. Hier beim Abschluß aber ist der Schüler reif, von Grund aus zu verstehen, was die Einführung der unendlich fernen Gebilde eigentlich bedeuten will. Ebenso geht es mit der mehrdimensionalen Geometrie. Der Laie pflegt immer einen kleinen Schauder zu bekommen, wenn er erfährt, daß der Mathematiker auch vierdimensionale Geometrie treibt. Nachdem die Kunde von der Minkowskischen vierdimensionalen „Welt" überall hingedrungen ist, kann man es den Schülern nicht verübeln, wenn auch sie hierüber etwas Genaueres wissen wollen. Vom Standpunkt der analytischen Geometrie aus läßt sich diesem Wunsche willfahren: Was eine n-dimensionale Geometrie bedeutet, kann man dem Primaner durchaus verständlich machen.

Etwas zurückhaltender möchte ich mich zu zwei anderen Dingen äußern. Das eine betrifft die nichteuklidischen Geometrien, zu denen der Weg von unserem Standpunkt aus ja von Klein und Cayley gewiesen ist. Mir will scheinen, als ob die Schule diesen Überlegungen fernbleiben sollte; ich sage das, trotzdem wieder die Relativitätstheorie, diesmal die große, das Interesse an der nichteuklidischen Geometrie in weiteste Kreise getragen hat. Das zweite betrifft die imaginären Elemente in der Geometrie. Wir pflegen ja auch in der Schule zu sagen, die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Kreis sind imaginär. Der Lehrer, dem diese Erweiterung der analytischen Geometrie fernliegt, kann etwa in dem mehrfach zitierten Buch von Beck nachlesen, welche Konsequenzen es hat, wenn ich für die Koordinaten eines Punktes $(x\,;\,y)$ auch komplexe Werte zulasse, ebenso für die Veränderlichen und die Koeffizienten der Geraden $Ax + By + C = 0$. Nun wird es keinesfalls möglich sein, das auf der Schule auch nur andeutungsweise durchzudenken. Wenn man überhaupt darauf eingeht, dann müßte es an einem besonderen Fall sein, etwa beim Kreise. Ich möchte in dieser Hinsicht auf einen sehr schönen Vortrag von C. Thaer hinweisen[2], in dem er die Aufgabe behandelt,

[1] Vergleiche über diese Probleme z. B. W. Lietzmann, Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen, Leipzig (Hirt) 1922.

[2] C. Thaer, Eine Konstruktion aus imaginären Punkten, Ubl **18** (1912) S. 54ff.

einen Kreis aus drei Punkten zu konstruieren, wobei er zuläßt, daß zwei von diesen Punkten imaginär werden.

Mit dem Schlußwort dieser Abhandlung möchte ich diesen Abschnitt schließen, der uns einen Ausblick in die neuesten Begriffsbildungen und Auffassungen der Geometrie tun ließ: „Es ist nicht immer Unvermögen oder böser Wille, es ist mehr noch das Gefühl, so dem Leben am besten zu nützen, was den Mathematiker veranlaßt, in einer Sprache zu reden, die dem Laien meist, ja mitunter auch dem Fachkollegen unverständlich ist."

C. Infinitesimalrechnung.

12. Infinitesimalrechnung als Unterrichtsgegenstand.

Wenn heute eine Methodik des mathematischen Unterrichtes an höheren Schulen nicht an der Infinitesimalrechnung vorbeigehen kann, so ist das die Folge eines sehr tiefgreifenden Umschwunges, der sich etwa in den letzten zwanzig Jahren vollzogen hat. Um die Wende des zwanzigsten Jahrhunderts herum war die Anzahl von Lehranstalten, die in Deutschland unmaskierte Infinitesimalrechnung trieben, verschwindend gering. Heute kann man wohl sagen, daß die Mehrzahl aller höheren Schulen in der Oberstufe mehr oder weniger ausführlich Infinitesimalrechnung treibt und dabei die Dinge auch beim rechten Namen nennt.

Es gab eine Zeit, in der auch an den Realanstalten Preußens regelrecht Differential- und Integralrechnung zum Unterrichtsstoff gehörte. Die Erlaubnis dazu wurde aber 1882 den Realgymnasien, 1892 auch den Oberrealschulen ausdrücklich entzogen. 1902 setzte dann mit zwei Aufsätzen von Klein und Götting[1] die Bewegung für die Infinitesimalrechnung zunächst an Realanstalten, dann an allen Arten höherer Schulen sehr lebhaft ein. Wie diese Strömungen dann sich zu bestimmten Vorschlägen einer von der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte eingesetzten Unterrichtskommission vereinigt haben, wird im ersten Teilbande ausführlich auseinandergesetzt. Hier muß nun eines hervorgehoben werden. Gerade hinsichtlich der Infinitesimalrechnung sind die Meraner Vorschläge durchaus nicht so energisch vorgegangen, wie dies möglich und nötig gewesen wäre. Sie enthalten nur die sehr zweideutige Formel, die höheren Schulen sollten an die Stufe der Infinitesimalrechnung heranführen. Sie lassen die Frage ganz offen, ob damit diese ersten Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung mit einbegriffen sein sollen oder nicht. Das ist nicht etwa bloß eine ungewollte, unklare Ausdrucksweise gewesen; es wurde damit tatsächlich ein Gegensatz in den Kreisen der Kommission überdeckt. Aus diesem Grunde hat man auch, was doch ganz besonders nahegelegen hätte, von der Aufstellung eines Lehrplanes für Oberrealschulen abgesehen — ein Entwurf liegt bei den Akten der Kommission. Die eigentlichen Väter der Meraner Vorschläge, die in Göttingen saßen, waren von der Einbeziehung der Infinitesimal-

[1] F. Klein, Über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **11** (1902) S. 128ff.; E. Götting, Über das Lehrziel im mathematischen Unterricht der höheren Realanstalten, ebenda **11** (1902) S. 189ff. Beide Aufsätze sind abgedruckt in F. Klein und E. Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen, Leipzig (Teubner) 1904.

rechnung in den Unterricht auch der Gymnasien überzeugt. Götting und Behrendsen (denn sie sind, was ausdrücklich gesagt werden mag, diejenigen Schulmänner, die die Gedanken Kleins zuerst in die Praxis umgesetzt haben, und die mit ihren Erfahrungen die Unterlagen für die Meraner Vorschläge gegeben haben) haben damals schon auch im Gymnasium wirklich Differential- und Integralrechnung getrieben. Daß man später in der Unterrichtskommission jene ausweichende Formel fand, ist auf die Haltung von Pietzker zurückzuführen, der im Grunde die Infinitesimalrechnung ablehnte. Leider waren Behrendsen und Götting nicht Mitglieder der Kommission.

Die Freunde der Einführung der Infinitesimalrechnung konnten sich auf die Erfahrungen vieler Schulmänner aus älterer Zeit stützen, von denen einige nie aufgehört haben, tatsächlich im Unterricht Infinitesimalrechnung zu treiben, obgleich dem in Preußen die amtlichen Verordnungen entgegenstanden. Die Didaktik des neuen Gebietes konnte also an diese Erfahrungen anknüpfen, und es ist gar kein Zweifel, daß diese Vorarbeiten ganz außerordentlich das Eindringen der Infinitesimalrechnung in alle Arten von Schulen gefördert haben. Einige solche Stellen müssen, nicht nur, weil es so die geschichtliche Pietät erfordert, sondern auch, weil wir in der Didaktik des Faches tatsächlich auf den Schultern unserer Vorgänger stehen, im folgenden kurz angegeben werden.

Ich beginne mit dem Norden und dem Süden Deutschlands. In Hamburg und ebenso in Württemberg ist an den Realanstalten seit altersher Infinitesimalrechnung getrieben worden. Man hat auch in den Zeiten, als in Preußen jene amtlichen Verbote ergingen, am gewohnten Stoff festgehalten, und zwar deshalb, weil man sich der guten Erfolge bewußt war. So liegt hier eine Kontinuität der Erfahrungen vor, die freilich fast ausschließlich den engeren Landesgebieten zugute kam, da meines Wissens irgendwelche in weiteren Kreisen bekannt gewordene Darstellungen aus der Unterrichtserfahrung oder auch aus dieser Tätigkeit hervorgegangene Schulbücher nicht veröffentlicht worden sind.

Etwas besser liegen die Dinge mit Erfahrungen, die an einem Mecklenburger Realgymnasium gemacht worden sind. Hier hat der Güstrower Direktor H. Seeger in mehreren Arbeiten seine Ansichten über Stoff und Methode auseinandergesetzt.[1] Sein Leitfaden unterscheidet sich zwar kaum von irgendeinem „Skelett", das man einem Studierenden in die Hand gegeben hätte, aber ganz sicher haben wir es hier mit einer im engeren Kreise erfolgreichen Tätigkeit zu tun, von der auch weitere Kreise Anregungen erfahren haben.

Weit wirksamer waren Unterrichtserfahrungen, die an zwei Stellen in Mitteldeutschland gemacht worden sind, in Berlin und Wiesbaden. — In Wiesbaden war es Johann Heinrich Traugott Müller[2], der von 1845 an als ein entschiedener

[1] H. Seeger, Über die Stellung des hiesigen Realgymnasiums zu einem Beschlusse der letzten Berliner Schulkonferenz, Programm Güstrow 1891; derselbe, Bemerkungen über Abgrenzung und Verwertung des Unterrichts in den Elementen der Infinitesimalrechnung, Güstrow (Opitz & Co.) 1894. Über sein Wirken, auch über seine Lehrbücher, vgl. den Artikel: Das Großherzogtum Mecklenburg von N. Geuther in Bd. I Heft 4 der deutschen IMUK-Abh., Leipzig (Teubner) 1911.

[2] Vgl. C. H. Müller, Traugott Müller und sein Einfluß auf die Methode des mathematischen Unterrichts in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts, ZmnU 42 (1911) S. 265ff.

Vertreter des realgymnasialen Standpunktes ganz Außerordentliches zur Hebung der Schulmathematik geleistet hat. Von seinem Unterricht gibt sein mehr für Lehrer als für Schüler geschriebenes Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und Realschulen ein Zeugnis nach der stofflichen Seite.[1] Leider ist in der zweiten Auflage dieses Buches gerade die Infinitesimalrechnung nicht enthalten, es liegt überhaupt kaum Gedrucktes über seinen Unterricht in den Elementen der Differential- und Integralrechnung vor. Es steht aber fest, daß die Schüler bei ihrem Eintritt in die technische Hochschule in Karlsruhe die Vorklassen überspringen konnten.[2] Und damit stimmt zusammen, was Müllers Schüler und Freunde berichten.

In Berlin waren zwei in ihrer ganzen schulpolitischen Richtung grundverschiedene Naturen gleichzeitig tätig, die beide lebhaft für die Infinitesimalrechnung eingetreten sind, wenn auch in ganz verschiedener Art. Schellbach, der bekanntere von ihnen, war durch und durch Gymnasialmann. Er hat auch bei seinen mathematischen Plänen immer das Gymnasium im Auge, dessen Organisation er sich freilich, wie er sich ausdrückt, nicht als Kreis mit den alten Sprachen als Zentrum, sondern als Ellipse mit den alten Sprachen auf der einen, der Mathematik auf der anderen Seite als Brennpunkten dachte.[3] Schellbach benutzte infinitesimale Methoden im Unterricht ebenso wie in seinen Lehrbüchern, nannte aber die Dinge nicht mit den Leibnizschen Zeichen, offenbar um nicht mit den Verfügungen der Behörde in Konflikt zu kommen. Die Art, wie er in ein scheinbar elementares Gewand kleidete, was doch infinitesimaler Natur war, hat sich zum Teil bis heute erhalten, ohne daß die Notwendigkeit zu einer solchen Verhüllung heute vorläge. Im übrigen ist an dem Lehrgang Schellbachs beachtenswert, daß er in der Lehre von den Extremwerten bis zu den zweiten Differentialquotienten ging, und daß er, ebenso wie übrigens auch Seeger, die Verbindung mit der Mechanik suchte.

Im Gegensatz zu Schellbach ist der vom Niederrhein stammende Gallenkamp ausgesprochener Realschulmann. Wenn er auch für die Gymnasien die Forderung der Infinitesimalrechnung erhoben hat,[4] so ist doch sein sehr weitgehendes, in wissenschaftlicher Hinsicht recht streng angelegtes Lehrbuch, dessen ganzer dritter Band eine umfangreiche „Einleitung in die höhere Analysis" bringt, auf dem Boden der Oberrealschule erwachsen.[5]

Man kann es verwunderlich finden, daß trotz aller dieser Ansätze bester Kräfte die Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen keinen rechten Boden fand. Die Menge verhielt sich ablehnend. Was war es, das mit dem Eingreifen der Unterrichts-

[1] T. Müller, Lehrbuch der Mathematik, Halle a. S. (Waisenhaus). I. Teil die gesamte Arithmetik enthaltend, 1838; II. Teil, Lehrbuch der Geometrie, 1. Abt. Planimetrie, 1844, 2. Abt. Stereometrie, 1851, 3. Abt. Trigonometrie, 1852.

[2] Nach C. H. Müller ist der stoffliche Umfang etwa der des Buches: J. Wenck, Die Grundlehren der Analysis. Ein Handbuch für den ersten Unterricht in der höheren Mathematik. Zum Gebrauch an Lehranstalten, Leipzig (Teubner) 1872.

[3] Vgl. Felix Müller, Karl Schellbach. Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften XX, 1, Leipzig (Teubner) 1905.

[4] W. Gallenkamp, Über den mathematischen Unterricht im Gymnasium, Zeitschrift für Gymnasialwesen 31 (1877) S. 1.

[5] W. Gallenkamp, Die Elemente der Mathematik, Iserlohn (Baedeker), 4 Teile, zum Teil in höheren Auflagen.

kommission die Wendung herbeiführte? Es war der entscheidende Gedanke, daß die Infinitesimalrechnung nicht ein dem bisherigen Unterrichtsstoff aufgesetztes neues Gebiet der Schulmathematik sein sollte, daß sie sich vielmehr organisch dem bisherigen Unterrichtsstoff eingliedern sollte, von unten an in geeigneter Weise vorbereitet. Als das Bindeglied aller der verschiedenen Kapitel und Kapitelchen der Schulmathematik wurde der Funktionsbegriff erkannt. Die Infinitesimalrechnung mußte die letzte Krönung des Studiums des Funktionsbegriffes sein. Gewiß, auch dieser Gedanke entstand nicht plötzlich, wie Athene aus dem Haupte des Zeus. F. Klein, der ihn sehr scharf formuliert hat, ist, wie er selbst gelegentlich erzählt hat, darauf durch die französischen Lehrpläne von 1902 geführt worden; der Funktionsbegriff ist aber auch schon vorher in Deutschland als ein wichtiger Begriff der Mittelklassen von verschiedenen Methodikern angesprochen worden. Jedenfalls muß man festhalten: Die Infinitesimalrechnung muß aufbauen auf der Funktionslehre, die Funktionslehre hinwiederum muß ihren Abschluß finden in der Infinitesimalrechnung.

Ich behandele in den folgenden Abschnitten die Infinitesimalrechnung der Schule in der Weise, daß ich den Stoff so gliedere, wie ich es in meinem gemeinsam mit Zühlke herausgegebenen Unterrichtswerk getan habe. Ich bespreche nacheinander die verschiedenen Arten von Funktionen. Dabei scheide ich jedoch zwei Dinge aus, um sie am Schluß im Zusammenhange zu besprechen: Die Reihenlehre und die Integralrechnung. Ich bin mir vollkommen bewußt, daß das inkonsequent ist. Aber zunächst einmal ist die Reihenlehre nur bei den Realanstalten ein verbindlicher Unterrichtsstoff. Und weiter: der engen Fusion von Differential- und Integralrechnung stehen zurzeit noch Bedenken entgegen. Ich bin gar nicht zweifelhaft, daß wir uns schließlich zu einer solchen Fusion durchringen werden. Jetzt ist sie aber noch nicht vorhanden, und so habe ich an der Abtrennung der Integralrechnung vorderhand festgehalten.

Die Infinitesimalrechnung ist einer der Gegenstände gewesen, mit denen sich die Internationale Mathematische Unterrichtskommssion in mündlicher Verhandlung beschäftigt hat. Die Frage stand auf dem Kongreß in Paris 1914 zur Erörterung. Durch Vorarbeiten war eine Festlegung des Standes aller Fragen über Stoff, Methode und Organisation in allen Kulturländern gegeben. Der Vorbericht für Deutschland, den ich selbst erstattet habe, ist in der ZmnU mit einer großen Reihe ergänzender Bemerkungen deutscher Fachkollegen abgedruckt worden.[1] Die Zusammenfassung für alle Länder gibt dann der ausführliche Vortrag von Beke-Budapest; zur Frage ist aber weiter auch die an diesen Vortrag anschließende Diskussion zu vergleichen.[2]

Nun noch ein Wort über die Literatur. Ganz natürlich mußte es in den ersten Jahren des neuen Aufschwunges an zweckmäßigen Lehrbüchern, die man dem Unterrichte zugrunde legen konnte, fehlen. Man hätte einmal auf die Schulbücher

[1] W. Lietzmann, Die Einführung der Elemente der Differential- und Integralrechnung in die höheren Schulen, ZmnU **45** (1914) S. 145ff.

[2] Die Verhandlungen des Pariser Kongresses sind im Enseignement mathématique **16** (1914) Heft 3 und Heft 4 und gesondert als Fasc. III der 2. Serie der Publications du Comité Central (Genf, Georg & Co., 1914) erschienen. Einen kurzen Bericht habe ich im 4. Beiheft zur ZmnU, Leipzig (Teubner) 1915, erstattet.

aus älterer Zeit, die die Infinitesimalrechnung brachten, die Lehrbücher von Gallenkamp, Seeger usw. zurückgehen können. Man tat es nicht, da der Geist jener Bücher doch ein anderer war. Man hätte zu Büchern greifen können, die nicht eigentlich Schulzwecken dienten, die entweder für das Selbststudium bestimmt oder als Leitfäden zu Vorlesungen gedacht waren. Manche dieser Bücher, wie das von Burckhardt, von Nernst und Schönflies, von Scheffers[1], kamen schon ihres Preises und ihres Umfanges wegen nicht in Betracht, auch brachten sie nicht genügend Aufgaben; aber mehr als das, der Charakter eines dem Selbststudium dienenden Buches ist anders als der eines Schulbuches. Die Bedeutung dieser Bücher für den Unterricht lag in den Anregungen, die sie dem Lehrer für seine Stoffauswahl gaben. Nur die bekannte Aufgabensammlung von Dölp[2] und die Darstellungen von Junker in der Sammlung Göschen[3] sind vielfach unmittelbar im Unterricht benutzt worden.

Gebraucht wurden in der ersten Zeit knappe Leitfäden, die sich im wesentlichen auf die Infinitesimalrechnung in Schulbegrenzung beschränkten, und die bald nach dem Einsetzen der Reformbewegung wie Pilze aus der Erde schossen. Kein einziges dieser Bücher von Schröder, Tesar, Lesser, Steckelberg, Düsing, Heinr. Müller, Handel, Hub. Müller, um nur einige zu nennen, hat festen Boden in der höheren Schule gefaßt. Nur eins hat es meines Wissens zu einer zweiten Auflage gebracht. Keines ist in Preußen amtlich eingeführt worden. Die wahre Methode konnte nur aus der innigen Berührung der Infinitesimalrechnung mit dem anderen Stoff der Arithmetik und Algebra von den ersten Anfängen bis zur Infinitesimalrechnung hin erwachsen. Einige der zuerst mit kleinen „Infinitesimalrechnungen" hervorgetretenen Schulmänner haben uns solche Lehrbücher gegeben. Dazu bedurfte es aber naturgemäß einer längeren Reihe von Jahren. Jetzt ist die Sachlage die, daß alle Unterrichtswerke älteren Datums von einiger Bedeutung moderne Umarbeitungen haben, daß daneben eine Reihe ganz neuer Unterrichtswerke entstanden ist; ich nenne als die verbreitetsten diejenigen von Behrendsen und Götting, von Schwab und Lesser, von Lietzmann und Zühlke.

Der Lehrer kann diesen Unterrichtswerken in methodischer Hinsicht sehr viel entnehmen; ja bei manchen dieser Bücher liegt der Wert vielleicht mehr auf dem Gebiete der Lehrerbelehrung als für einen freien Unterricht gut ist. Ein Wort mag aber noch darüber gesagt werden, wo sich der Lehrer über die wissenschaftliche Seite der Infinitesimalrechnung Rat holen kann. Gerade in der Infinitesimalrechnung be-

[1] H. Burkhardt, Vorlesung über die Elemente der Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen, Leipzig (Teubner) 1908; W. Nernst und A. Schönflies, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie, 7. Aufl., München und Berlin (Oldenbourg) 1913; G. Scheffers, Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik, 3. Aufl., Leipzig (Veit) 1916.

[2] Dölp, Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung, neubearbeitet von E. Netto, Gießen (Ricken), höhere Auflagen.

[3] F. Junker, Höhere Analysis, 2 Teile; derselbe, Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung, dasselbe zur Integralrechnung (Sammlung Göschen Nr. 87, 88, 146, 147), Leipzig, Göschen.

rühren sich ja Schulunterricht und wissenschaftliches Studium enger als sonst irgendwo; das ist auch der Grund, warum es gerade hier von seiten der Wissenschaft manche berechtigte, daneben auch manche unberechtigte Kritik gesetzt hat. Man muß sich darüber klar werden, daß es bei der Infinitesimalrechnung anders ist als beispielsweise bei der Axiomatik. Wenn wirklich der Lehrer, der in Quinta und Quarta in propädeutischer Weise die Grundlagen zur Geometrie legt, nichts von der Axiomatik weiß, so ist das ja recht bedauerlich, aber lange nicht so schlimm, als wenn der Lehrer in der Prima die Infinitesimalrechnung, gleichfalls in propädeutischer Form, seinen Schülern beibringt und selbst nicht über den wissenschaftlichen Kern der Begriffe, mit denen er operiert, orientiert ist. Gerade hier ist also eine gute Vorbildung und gründliches Studium unumgänglich.

Die Zahl der wissenschaftlichen Lehrbücher über die Infinitesimalrechnung ist sehr, sehr groß. Ich will hier nur einige ganz wenige nennen, weil dem Leser mit einer großen Liste nicht gedient sein kann. Ich gebe die an, die mir die geeignetsten scheinen; andere werden vielleicht anders urteilen. Von umfangreicheren Werken nenne ich die mehrbändigen von Serret-Scheffers, Czuber, Fricke, v. Mangold.[1] Eine methodische Behandlung der Grundbegriffe hat Klein in einer Vorlesung gegeben, die er selbst eine „Revision der Prinzipien" nennt.[2] Strenge Fassungen der Lehre sind auch die knappen Leitfäden von Kowalewski und von Bieberbach[3], von denen ich dem Lehrer besonders die letzten beiden Bändchen empfehle.

12. Die rationale ganze Funktion.

Die erste Einführung in die Infinitesimalrechnung knüpft sich am besten an die rationale ganze Funktion. Man hat hier zunächst den Vorteil, ganz allmählich von Funktionen, die dem Schüler schon von der Mittelstufe her vertraut sind, in schrittweiser Entwicklung vorzugehen. Man vermeidet so die Gefahren, die bei der üblichen systematischen Einführung in die Infinitesimalrechnung drohen, daß man die Begriffe gleich an einen allzu allgemeinen Typus von Funktionen anknüpft. Irgendwelche Schwierigkeiten arithmetischer Art treten hier an keiner Stelle auf. Fragen nach Stetigkeit und Differenzierbarkeit, Schwierigkeiten hinsichtlich der Existenz der Extremwerte, alles das erfordert hier keine Erörterung. Trotzdem aber erschließt sich mit jedem Schritt vorwärts ein Reichtum mannigfaltigster Anwendungen geometrischer und algebraischer Art.

Ich will im folgenden kurz einen solchen Gang skizzieren, der als Beispiel, nicht

[1] J. A. Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, 3 Bände, Leipzig (Teubner) in 3. bis 5. Auflage; E. Czuber, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, 2 Bände, Leipzig (Teubner) in 3. Auflage; R. Fricke, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung und ihrer Anwendungen, 2 Bände, Leipzig (Teubner) in 2. Auflage; H. v. Mangold, Einführung in die höhere Mathematik, 3 Bände, Leipzig (Hirzel) in 2. u. 3. Auflage.

[2] F. Klein, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie; eine Revision der Prinzipien. Neuer Abdruck, Leipzig (Teubner) 1907.

[3] G. Kowalewski, Einführung in die Infinitesimalrechnung, 3. A. (Aus Natur und Geisteswelt 197) Leipzig (Teubner) 1919; L. Bieberbach, Differential- und Integralrechnung, 2 Bände, Leipzig (Teubner) 1917 u. 1918.

als Regel aufgefaßt sein will. Dabei wird es sich von selbst ergeben, daß zu den wichtigsten Vorfragen der jungen Infinitesimaldidaktik Stellung genommen wird.

Der Schüler hat sich bei der Potenzrechnung und später bei der graphischen Behandlung der quadratischen Gleichung ausführlich mit der quadratischen Parabel beschäftigt, deren Funktionsgleichung ihm in der allgemeinen Form $y = ax^2 + bx + c$ geläufig ist. Hier knüpft man zweckmäßig noch einmal an. Wann das geschieht, bleibe dahingestellt. Jedenfalls ist es möglich, es schon in Obersekunda zu tun[1], und es verschlägt gar nichts, statt dessen die quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten, die, wie wir in den vorangehenden Abschnitten gesehen haben, stofflich und methodisch mehr zur analytischen Geometrie der Kegelschnitte gehören, nach Prima zu verschieben.

Doch zurück zur Funktion zweiten Grades. Wir stellen die Frage nach der Gleichung der Tangente. Man wird zunächst den Begriff der Tangente, die dem Schüler ja bisher nur vom Kreise her bekannt ist, klären müssen. Ein Frage- und Antwortspiel, bei dem geeignete Gegenbeispiele des Lehrers den Schüler zu immer schärferer Erfassung der wesentlichen Eigenschaften der Tangente an eine beliebige Kurve führen, fördert schließlich die Definition zutage, daß die Tangente die Grenzlage der Sekante sei. Von dieser Tatsache geht man nun aus, wenn es sich um die Feststellung der Lage einer Tangente an die Parabel handelt. Man bestimmt zunächst den Differenzenquotienten, der einer durch den betreffenden Punkt gehenden Sekante entspricht.

Von dem Differenzenquotienten geht man dann mittels einer Grenzbetrachtung, die dem Schüler ganz gewiß keine Schwierigkeiten macht, zum Differentialquotienten über. Es ist anzuraten, diesen Grenzübergang von der Sekante zur Tangente geometrisch und rechnerisch genauer an einem bestimmten Beispiel zu verfolgen. Man läßt etwa bei der Funktion $y = x^2$ den einen Punkt fest an der Stelle $x_1 = 3$. Den andern läßt man nacheinander die Werte 2; 2, 9; 2, 99; 2, 999 usw. annehmen. — Diese Bemerkung gilt übrigens nicht nur für die ganzen rationalen Funktionen. Nur zu leicht erscheint das Differenzieren als eine formal-arithmetische Wegschaffung hinderlicher Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$, ohne daß an den Grenzbegriff selbst noch gedacht wird. Es ist dringend zu raten, hin und wieder einmal die Annäherung $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ an die Grenze $\frac{dy}{dx}$ wirklich rechnerisch zu verfolgen.

Die erste Anwendung von dem erhaltenen Ergebnis wird man machen, indem man zur Zeichnung irgendeiner Parabel nicht nur die Punktdarstellung, sondern auch die Lage der jeweiligen Tangente heranzieht. Es empfiehlt sich, das an einer nicht zu steilen Parabel auszuführen, etwa an der Parabel $y = \frac{x^2}{12}$. Dabei kann dem Schüler schon hier klar gemacht werden, daß die Freiheit, die man bei graphischen Dar-

[1] Über Anstalten, in denen das geschieht, und über die dabei zugrunde liegenden Lehrpläne vgl. W. Lietzmann, Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preußen (Deutsche IMUK-Abh. I, 2), Leipzig (Teubner) 1910. Seit jener Schrift sind viele weitere Erfahrungen mit der Infinitesimalrechnung in Obersekunda gemacht worden.

stellungen hinsichtlich des Maßstabes auf beiden Achsen hat, nicht in gleichem Maße besteht, wenn es sich um den Differentialquotienten handelt. Verzerrt man die Kurve in Richtung einer Achse, so ändert sich damit auch die Neigung der Kurve.

Die Kenntnis des Differentialquotienten einer Funktion zweiten Grades können wir sofort bei der Bestimmung des Minimums oder Maximums solcher Funktionen verwenden. Ich bin nicht der Meinung, daß man die Lehre von den ausgezeichneten Werten zu einem besonderen, nach der Differentialrechnung abzuhandelnden Gebiet zusammenschließen soll, empfehle vielmehr, sofort von dem dieser Lehre zugrunde liegenden einfachen Gedanken Gebrauch zu machen. In unserem Falle erhalten wir freilich nur ein bereits bekanntes Ergebnis, die Lage des Scheitelpunktes, die schon in der Mittelstufe ganz elementar bestimmt worden war.

Hier sei ein Wort eingeschaltet über die verschiedenen sogenannten elementaren Methoden zum Aufsuchen der Maxima und Minima. Es liegt auf der Hand, daß man elementar, d. h. ohne infinitesimale Methoden, einmal bei den quadratischen, dann auch bei den einfachen trigonometrischen Funktionen zum Ziele kommt. Leider aber sind das nicht die einzigen Funktionen, die bei einfachen Aufgaben aus der Geometrie und Physik auftreten. Sehr häufig sind rational gebrochene Funktionen und Wurzelausdrücke, manchmal auch stößt man auf kompliziertere Ausdrücke. Wenn ich eine rein geometrische Behandlung der Frage hier ausschalte, mit der besonders Steiner wertvolle, der Schule zugängliche Ergebnisse erzielt hat[1], so kann ich mich hinsichtlich aller älteren auf eine zusammenfassende Darstellung von K. Schröter[2] beziehen. Von einiger Wichtigkeit ist nur die Heilermannsche Methode, über die man am besten die Darstellung von Heilermann selbst nachliest[3], und das sehr häufig angewandte Schellbachsche Verfahren, das in viele Lehrbücher übergegangen ist: es ist eine regelrechte Differentiation, die nur nicht beim rechten Namen genannt wird. Ein neues elementares Verfahren hat Dörrie entwickelt; er geht von dem Satz aus, daß das arithmetische Mittel von n Größen höchstens gleich ihrem geometrischen Mittel ist.[4]

Von der ganzen Funktion zweiten Grades geht man nun zu den Funktionen dritten Grades über. Der Schüler wird sich zunächst mit dem Kurvenbild der Funktion vertraut machen müssen. Man hat drei Typen zu unterscheiden, eine ohne Maximum und Minimum und mit einem Nullpunkt, zwei andere mit Maximum und Minimum, von denen wiederum der zweite Typus nur eine Nullstelle, der dritte dagegen drei Nullstellen hat. Statt gleich die rationale ganze Funktion in ihrer allgemeinsten Form zu betrachten, kann man sie allmählich aufbauen. Aus $y = ax^3$ gewinnt man durch Addition von $y = px$, durch Scheerung, wie es in der Technik heißt, $y = ax^3 + px$, daraus schließlich durch Verschiebung längs der y-Achse $y = ax^3 +$

---

[1] Vgl. besonders R. Sturm, Maxima und Minima in der elementaren Geometrie, Leipzig (Teubner) 1910.

[2] K. Schröter, Die bekannteren allgemeinen Methoden zur elementaren Bestimmung der Maxima und Minima von Funktionen mit einer veränderlichen Größe, Programm Pädagogium zum Kloster unserer lieben Frauen, Magdeburg 1904.

[3] H. Heilermann, Eine elementare Methode zur Bestimmung von größten und kleinsten Werten, Leipzig (Teubner) 1871.

[4] H. Dörrie, Ein neues Verfahren zur Lösung von Extremaufgaben, ZmnU 50 (1919) S. 153ff.

$px + q$. Die allgemeine Form $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ läßt sich darauf zurückführen durch Verschiebung längs der x-Achse.

Die Bildung des Differentialquotienten macht keine Schwierigkeiten. Damit ist dann sofort auch die Frage nach dem Maximum und Minimum gelöst. Neu ist nun aber die Bestimmung des Wendepunktes und der Lage der Wendetangente, sowie die Entscheidung, ob ein Extremwert ein Maximum oder Minimum ist, auf Grund des zweiten Differentialquotienten.

Um Anwendungen braucht man nicht verlegen zu sein. Viele Maximum- und Minimumaufgaben der Stereometrie führen auf Funktionen dritten Grades. Wichtig ist meiner Meinung nach die Aufgabe, eine Kurve dritten Grades zu bestimmen, die bestimmten Bedingungen genügt, also durch gegebene Punkte geht, bestimmte Maxima und Minima, einen bestimmten Wendepunkt, eine bestimmte Wendetangente besitzt und dgl.

Eingekleidete Aufgaben über Extremwerte pflegen den Schülern Schwierigkeiten zu machen. Sie zu beseitigen achte man auf folgende zwei Fragen: Wie heißt die abhängige Variable, also die Funktion, deren Extremwerte wir untersuchen sollen? Welche Größe wählen wir als unabhängige Variable? Die zweite Frage verlangt oft eine Entscheidung zwischen mehreren möglichen Fällen. Man muß dann zusehen, bei welcher Wahl die Funktion die für die nachfolgende Differentiation einfachste Gestalt annimmt. Übrigens wird man manchmal auch die abhängige Variable durch eine andere ersetzen — etwa wenn sie die Gestalt einer Quadratwurzel hat, durch deren Quadrat.

Man tut gut, in solchen Schulen, wo die numerische Lösung der allgemeinen Gleichung dritten Grades nach der Cardanischen Formel und dem Casus irreducibilis vorgeschrieben ist, die Funktionsbetrachtungen vorweg zu nehmen. Viele Dinge werden dann deutlicher, als wenn man sie rein arithmetisch behandelt. Ich will nur darauf hinweisen, daß dem Reduzieren der Gleichung eine derartige Verschiebung der Kurve entspricht, daß deren Wendepunkt jetzt auf der x-Achse liegt.

Ehe man von der ganzen Funktion dritten Grades zur allgemeinen ganzen Funktion übergeht, kann man noch einen Augenblick bei der Diskussion der Funktion vierten Grades halt machen. Neue Gedanken treten hier freilich nicht auf.

Die allgemeine rationale ganze Funktion stellt zunächst die Aufgabe, den Differentialquotienten der Funktion $y = x^n$ zu entwickeln, wo n eine positive ganze Zahl ist. Das macht nach dem Vorhergehenden keine Schwierigkeiten. Ich empfehle, den Differenzenquotienten hier in der Form

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

zu schreiben. Benutzt man nämlich die andere Schreibweise

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x},$$

so braucht man den binomischen Lehrsatz; das ist hier ganz unnötig. Man sollte umgekehrt später, wenn es sich um die Reihenlehre handelt, den binomischen Lehrsatz gliedweise durch Differentiation gewinnen.

Sodann wird man allgemein schon hier zwei Differentiationsregeln beweisen können,

$$\frac{d\,a\,f(x)}{dx} = a\frac{df(x)}{dx}, \qquad \frac{d[f(x)+g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}.$$

Außerdem ist zu erwägen, ob man nicht auch gleich die Differentiation eines Produktes hinzunimmt. Die Herleitung macht keine Schwierigkeiten.

Man tut bei solchen Lehrsätzen immer gut, gewissermaßen die Probe auf ihre Richtigkeit zu machen, indem man sie auf Beispiele anwendet, bei denen man mit den bisherigen Kenntnissen auch auf anderem Wege zum Ziele kommt. Um bei der letzten Regel zu bleiben: man faßt einen leicht differenzierbaren Ausdruck als Produkt auf, etwa $(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)$, und differenziert ihn nach der alten und der neuen Regel; dann muß man beide Male das gleiche Ergebnis erhalten.

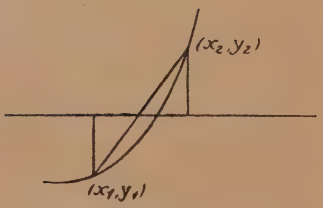


Fig. 80.

Die wichtigste Anwendung der Differentiation rationaler ganzer Funktionen sehe ich, von der Bestimmung der ausgezeichneten Werte abgesehen, in der Ausnutzung für die numerische Bestimmung der Wurzeln von Gleichungen. Wir erinnern uns zunächst der schon früher genannten regula falsi. Der Kurvenzug von (x_1, y_1) bis (x_2, y_2) wird durch eine Sekante ersetzt. Der Schnitt der Sekante mit der x-Achse, der sich nach Ähnlichkeitssätzen leicht berechnen läßt, gibt dann einen Näherungswert für die Wurzel.

Man schreibt den Ausdruck entweder

$$x_3 = \frac{f(x_1)\cdot x_2 - f(x_2)\cdot x_1}{f(x_1) - f(x_2)} \text{ oder } x_3 = \frac{|f(x_1)|\,x_2 + |f(x_2)|\cdot x_1}{|f(x_1)| + |f(x_2)|};$$

die letzte Form ist bequemer; die erste gilt auch für Extrapolation, also für den Fall, daß die beiden Ausgangswerte auf gleicher Seite der x-Achse liegen.

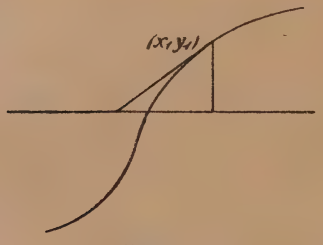


Fig. 81.

Die numerische Berechnung der Wurzel besteht in einer fortgesetzten Anwendung der Regel.

Beim Newtonschen Näherungsverfahren, das man aus der regula falsi in der ersten Form dadurch gewinnen kann, daß man die beiden Ausgangswerte zusammenfallen läßt, braucht man nur einen einzigen Punkt in der Nähe des wirklichen Nullwertes der Funktion zu kennen. Man ersetzt die Kurve durch die Tangente in jenem Punkte. Es läßt sich sehr gut an der graphischen Darstellung erläutern, unter welchen Umständen man tatsächlich einen der Nullstelle näherliegenden Wert erhält, unter welchen Umständen ein solcher Versuch aber aussichtslos oder zweifelhaft ist. Eine vollständige arithmetische Untersuchung dieser Frage scheint noch nicht vorzuliegen. — Auch hier ist das Verfahren mehrfach anzuwenden, um eine Genauigkeit von mehreren Ziffern zu erreichen.

Wir haben bisher immer nur von Differentialquotienten gesprochen, nicht von Differentialen. Es wird später zu erörtern sein, ob es überhaupt, und wenn ja, an welchen Stellen, wünschenswert oder notwendig ist, von Differentialen zu sprechen. Auf jeden Fall möchte ich betonen, daß ich die Benutzung der Differentiale gleich in der Einführung der Infinitesimalrechnung vom methodischen Standpunkte aus ablehne. Ich weiß wohl, daß ich mich damit zu manchen Mathematikern, die von der Physik oder von der Approximationsmathematik her an die Infinitesimalrechnung herankommen, in Gegensatz setze. Zunächst werde ich mich aber ganz und gar mit ihnen in Übereinstimmung befinden, wenn ich von vornherein alle jene Lehrgänge ablehne, die sich in mehr oder weniger metaphysischer Weise mit dem Aktual-Unendlich-Kleinen beschäftigen. Solange diese Lehren noch nicht zu einem wissenschaftlich anerkannten System geführt haben, darf man sie keinesfalls in die Schule tragen, selbst wenn man sich selbst zu diesen Lehren bekannt haben sollte.[1]

Anders liegen die Dinge bei jenen Methodikern, bei denen die Differentiale nicht aktuell-unendlich-kleine Größen sind, sondern endliche, wenn auch sehr kleine Größen.[2] Eine Zahl, die kleiner ist als jede noch so kleine Zahl, ist tatsächlich Null. Eine Zahl dagegen, die kleiner gemacht werden kann als irgendeine bestimmte, wenn auch noch so kleine Zahl, braucht deshalb noch nicht Null zu sein. Es ist das Differential des Physikers und Rechners, bei dem die Größe des dx durch die Zahl der Ziffern bestimmt ist, die bei der Rechnung berücksichtigt werden. Nicht selten begegnet man in derartigen Darstellungen Gleichungen wie $dx = 0{,}1$. Solche Dinge, die ihre große praktische Bedeutung haben, wollen wir durchaus nicht dadurch, daß wir uns für den Differentialquotienten entschieden haben, aus der Mathematik verbannen. Nur wollen wir, mag es nun als Pedanterie angesehen werden oder als die gute Absicht, einer Verwirrung in den Köpfen der Schüler aus dem Wege zu gehen, die Differentiale des Physikers durchweg mit $\triangle x$ und $\triangle y$ bezeichnen. Der Differentialquotient ist vorläufig für uns kein Quotient, sondern die Grenze eines Quotienten.

Über diesen Grenzübergang muß sich zunächst der Lehrer vollkommen klar sein. Es ist das Verdienst Cauchys, daß er bei ihm jedes Spielen mit dem Unendlichkleinen verbannt hat. Habe ich eine Folge von Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$, so versteht man unter

---

[1] Welche Rolle solche metaphysischen Anschauungen vom Unendlichkleinen im Unterricht spielen, zeigte die Diskussion auf dem Göttinger Ferienkursus 1912. Vgl. Weinreich, Mathematische Vorträge und Diskussionen auf dem Osterferienkursus Göttingen 1912 ZmnU 43 (1912) S. 343ff. Im übrigen verweise ich auf G. Hessenberg, Die Mystik der unendlich kleinen Größen. Abhandlungen der Friesschen Schule. Bekanntlich spielen metaphysische Erörterungen bei Leibniz keine geringe Rolle. Vgl. E. Fischer, Über die Begründung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz, Programm Nikolaigymnasium Leipzig 1896, und desselben Verfassers Aufsatz: Leibniz und die Gymnasialmathematik in der Festschrift zur Feier des 400jährigen Bestehens der Nikolaischule Leipzig, Xenia Nicolaitana Leipzig 1912, S. 197ff.

[2] Vgl. die Ausführungen von A. Schülke, Integralrechnung im Unterricht, ZmnU 42 (1911) S. 205ff. und an anderen Stellen. Ferner z. B. A. Richter, Differential- und Integralrechnung für Gymnasial-Oberprima, Programm Königl. Matthias-Claudius-Gymnasium mit Realschule Wandsbeck, Ostern 1911.

$$\lim_{n=\infty} x_n = a \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

(das letzte ist die heute immer mehr sich verbreitende vorsichtigere Schreibweise) in Worten: Die Folge der Zahlen x_n konvergiert gegen a, daß nach Vorgabe einer Zahl δ sich eine natürliche Zahl N so finden läßt, daß für jedes $n > N$ sich $x_n - a < \delta$ ergibt. Man formuliere danach etwa die Konvergenz der Folge $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ gegen 1, der Folge 0,3, 0,33, 0,333, ... gegen $\frac{1}{3}$ und überzeuge sich, daß dabei das Wort unendlich oder unendlich klein gar nicht fällt.

Eine Schwierigkeit für den Unterricht besteht darin, daß die erste unendliche Zahlenfolge, die dem Schüler entgegenzutreten pflegt,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{\frac{1}{n}} = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to 0} \frac{a}{n} = \infty$$

ist, wo n im ersten Falle die Folge der natürlichen Zahlen, im zweiten Falle der positiven Stammbrüche bedeutet. Hier tritt nicht nur eine unendliche Folge von Zahlen auf, es kommt hinzu, daß diese Folge nicht konvergiert oder — in anderer Ausdrucksweise — gegen ∞ konvergiert. Und ein Drittes kommt nun noch hinzu. Es ist $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{-n} = -\infty$. Da man in beiden Fällen für die linke Seite auch kurz $\frac{a}{0}$ zu schreiben pflegt, macht die Tatsache, daß der Grenzwert von rechts und von links verschieden ausfällt, erst recht stutzig. So pflegen gleich bei der ersten Einführung des Symbols allerlei mysteriöse Dinge sich zu vereinigen, die nicht besser werden, wenn der Lehrer erklärt, $+\infty$ und $-\infty$ seien eigentlich dasselbe, man müsse sich die Zahlengerade als einen größten Kreis auf einer großen Kugel denken usf., oder wenn ein anderer Lehrer sagt, es gäbe eigentlich zwei Nullen, eine, wo wirklich nichts ist und eine andere, wo immerhin noch etwas ist, wenn auch beinahe vielleicht fast gar nichts. Ich entsinne mich noch heute, wie mir der Obertertialehrer das seinerzeit auseinandersetzte. Heute kann man über die „relative Null" neben der absoluten Null in dem „Führer und Ratgeber" von Köhler[1] nachlesen.

Man sollte das Zeichen ∞, solange es irgend geht, vermeiden. Wo es dann nicht mehr zu vermeiden ist, sollte man es sorgfältig einführen und jede Geheimniskrämerei dabei lassen. Klein erzählte mir gelegentlich, sein Lehrer im Gymnasium habe ihm einmal gesagt: Es gebe eine Elementarmathematik, da könne man alles beweisen; dann aber gebe es eine höhere Mathematik, da sei das nicht mehr möglich; das sei letzten Endes eine Art Glauben. — Eine solche Meinung dürfen wir, gewollt oder ungewollt, nicht aufkommen lassen.

Bei der Formulierung des Grenzüberganges beim Differentialquotienten wird man mit Ausdrücken genügend groß und beliebig groß, genügend klein und beliebig klein vollkommen auskommen. Die Cauchyschen $\varepsilon - \delta$-Definitionen von Folge, Stetigkeit, Differenzierbarkeit usf. muß zwar der Lehrer vollkommen durchschauen, ihre Einführung in die Schule aber möchte ich ablehnen.

[1] A. Köhler, Methodischer Führer und Ratgeber für den mathematischen Unterricht, III. Bd. Stettin (Fischer und Schmidt) 1920.

Nach allem darf ich den Differentialquotienten nicht wie einen Quotienten behandeln, ebensowenig wie ich, um einen Scherz von R. Graßmann zu wiederholen, nach den Regeln der Bruchrechnung das d im Zähler und Nenner kürzen kann. Man kann so weit gehen, die Leibnizsche Schreibweise $\frac{dy}{dx}$, vielleicht sogar das Wort „Differentialquotient", strikte zu vermeiden; man muß dann mit den Bezeichnungen y' und $f'(x)$ und mit dem Wort „Ableitung" auszukommen suchen.[1] Das scheint mir aber doch allzu große Vorsicht zu sein. Warum nicht jene Zeichen nennen, die nun doch einmal allgemein üblich sind und dem Schüler in jedem Buche über höhere Analysis begegnen? Besser ist, vor Mißverständnis offen zu warnen, als ihm aus dem Wege zu gehen.

14. Die rational gebrochenen und die algebraischen Funktionen.

Ehe man an die Differentiation der gebrochenen Funktionen geht, tut man gut, sich zunächst mit der Bestimmung der Nullstellen und der Unendlichkeitsstellen dieser Funktionen zu befassen. Mit Hilfe dieser Daten wird man dann eine graphische Darstellung versuchen. Hat man schon in den Mittelklassen die beliebig verschobene gleichseitige Hyperbel $y \cdot x = a$ behandelt, so kann man sich jetzt dabei kurz fassen. Das Bild der Funktion lehrt gegenüber den bekannten Bildern, die sich bei den rationalen ganzen Funktionen zeigen, zwei Neuheiten. Das eine sind die Unendlichkeitsstellen bei endlichem Argument. Dabei tritt als beachtenswerte Eigenheit auf, daß manche Funktionen aus dem positiven Unendlichen ins negative Unendliche hinüberspringen, was schon von der *tg*- und *cotg*-Funktion her bekannt ist. Zweitens fällt gegenüber den früher studierten Funktionen auf, daß die gebrochenen Funktionen mit wachsendem Argument je nach ihrem Bau sich entweder der x-Achse nähern oder einem bestimmten endlichen Werte zustreben oder schließlich, wie wir es bei den ganzen Funktionen ausschließlich beobachten, selbst unendlich werden.

Was wir an neuen Differentiationsregeln brauchen, ist schnell gefunden. Wir müssen zunächst die Funktion $y = x^n$ jetzt auch für ein negatives ganzes n differenzieren. Wenn man vom Differenzenquotienten ausgeht, so hat das keine Schwierigkeiten. Weiter wird es sich empfehlen, gleich eine allgemeine Regel für die Differentiation eines Quotienten zu entwickeln. Man könnte ja, wenn man diese Regel hat, auf die ausführliche Entwicklung des Differentialquotienten von $y = x^{-n}$ verzichten. Ich halte aber die Zeitersparnis nicht für gut, denn die Entwicklung der allgemeinen Regel geht einen ganz ähnlichen Weg wie die Herleitung des besonderen Differentialquotienten und kann deshalb in dieser ihr Vorbild nehmen.

Als nützlich, wenn auch nicht als unumgänglich notwendig an dieser Stelle, erweist sich die Differentiationsregel für die Funktion einer Funktion. Auch hier macht die Ableitung keine Schwierigkeiten, wenn man vom Differenzenquotienten ausgeht.

Wir sind nun imstande, die Diskussion der rational gebrochenen Funktionen durchzuführen, sie insbesondere auf Maxima und Minima und Wendepunkte zu

[1] Vgl. z. B. K. Bögel, Über den Anfangsunterricht in der Differentialrechnung, ZmnU 53 (1922) S. 257ff.

untersuchen. Damit werden wir in den Stand gesetzt, zahlreiche geometrische Aufgaben zur Maxima- und Minimalehre zu lösen.

Eine neue Fragestellung, der sich der Schüler bei der Diskussion rational gebrochener Funktionen gegenüber sieht, ist die Bestimmung der Asymptoten. Man kann die Bestimmung von Werten, die zunächst in der Form $\frac{\infty}{\infty}$ auftreten, wobei aber im Zähler und Nenner rationale ganze Funktionen stehen, in einfacher Weise so vornehmen, daß man Zähler und Nenner durch die höchste auftretende Potenz der Variablen dividiert. Vielleicht tut man gut, das allgemeinere Verfahren, Zähler und Nenner zu differenzieren, sich bis zu Fällen aufzusparen, in denen jenes einfache Vorgehen nicht zum Ziel führt.

Wenn man den grundsätzlichen Gewinn kennzeichnen soll, den die Lehre von den rational gebrochenen Funktionen gebracht hat, so ist es der, daß wir eine Eigenschaft der Funktionen jetzt nicht mehr als selbstverständlich ansehen, die Stetigkeit. Wir erinnern uns, daß uns bei den empirischen Funktionen sprunghaft sich ändernde Funktionen entgegengetreten sind; wir folgern, daß wir die in die Herleitung des Differentialquotienten eingehende Stetigkeit ausdrücklich voraussetzen müssen. Wären die beiden Punkte, von denen man bei dem Differenzenquotienten ausgeht, nicht durch einen stetigen Linienzug verbunden, so entständen Schwierigkeiten. — Ich bin nicht der Meinung, daß man an allen Schulen die rational gebrochenen Funktionen in die Infinitesimalrechnung einbeziehen soll. Sie gehören nicht zur ersten Dosis, um mit Höfler zu reden. Wenn man sie aber behandelt, dann sollte man sich die Gelegenheit, auf die Stetigkeit erneut hinzuweisen, nicht entgehen lassen. Man kann dem Schüler im Anschluß daran auch klar machen, wie es durchaus nicht selbstverständlich ist, daß man auf denselben Grenzwert stößt, wenn man einmal von rechts, das andere Mal von links an die Stelle, für die man den Differentialquotienten bilden will, herankommt. Es wird ein Leichtes sein, den Schüler Kurven, freilich ohne die zugehörige analytische Form, erfinden zu lassen, bei denen für gewisse Punkte Differentialquotienten nach rechts und nach links zu unterscheiden sind. Die Definition von Stetigkeit und Differenzierbarkeit nach den Methoden der Cauchyschen „Epsilontik" kommt für die Schüler nicht in Betracht.

Auf einige einfache algebraische Funktionen sollte der Unterricht in der Infinitesimalrechnung auf alle Fälle eingehen. Für die Grenzen aber, bis zu denen er geht, ist hier ein besonders weiter Spielraum. Als Mindestmaß ist einmal die Differentiation der Funktion $y = x^n$ anzusehen, nun auch für den Fall eines beliebigen reellen Exponenten. Dann aber die infinitesimale Diskussion der Kegelschnitte, deren Gleichung der Schüler von der analytischen Geometrie her kennt. Dieser letztere Umstand läßt es wünschenswert erscheinen, die analytische Geometrie der Kegelschnitte mit dem Kapitel der algebraischen Funktionen zu verbinden, mit anderen Worten, das Kapitel von der Differentiation der rationalen ganzen, vielleicht auch der gebrochenen Funktionen vor die analytische Geometrie zu setzen.

Die Ableitung der beliebigen Potenz nach der Basis begegnet keinen Schwierigkeiten, wenn man die Differentiationsregel $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$ anwendet. Diese Regel

selbst hat in der Schulliteratur eine gewisse Rolle gespielt. Schimmack hatte in einem kleinen Aufsatz in den Unterrichtsblättern[1] darauf hingewiesen, man dürfe diese Regel nicht als selbstverständlich ansehen; der Differentialquotient sei kein Quotient, und also dürfe man ihn auch nicht ohne weiteres als solchen behandeln. Er hat dann eine geometrische Deutung der Regel gegeben (Fig. 82). Es wird die dem Schüler schon von der Mittelstufe her vertraute Tatsache benutzt, daß Funktion und Umkehrung symmetrisch zur Winkelhalbierenden der Koordinatenachsen liegen. Aus der Tatsache, daß die Neigungswinkel der Tangente in einem Kurvenpunkte und in dem entsprechenden des Spiegelbildes sich zu einem Rechten ergänzen, wird dann die Differentiationsregel anschaulich abgelesen.

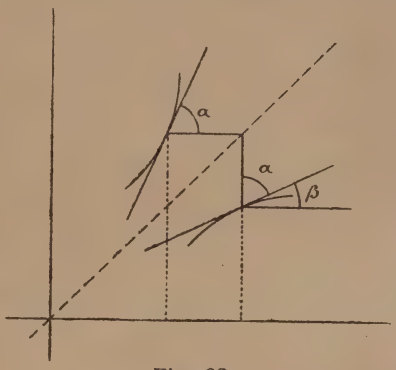


Fig. 82.

Dieser geometrische Beweis ist vielfach übernommen worden. Es ist dazu zu sagen, daß das Ganze viel einfacher sich ohne Spiegelung an ein und derselben Ausgangsfunktion ergibt, wie ein Blick auf Fig. 83 zeigt; $\frac{dy}{dx}$ wird durch tg α, $\frac{dx}{dy}$ durch tg β dargestellt, und die beiden Winkel α und β ergänzen sich zu einem Rechten; das Produkt der Tangensfunktionen ist also 1.

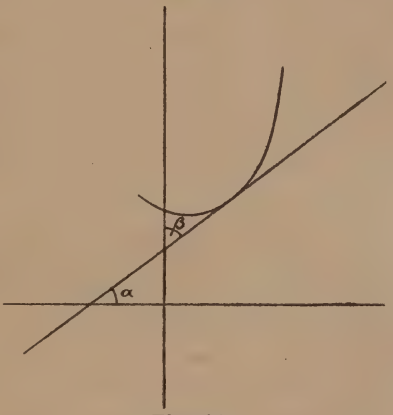


Fig. 83.

Ist nun aber tatsächlich ein solcher geometrischer Beweis nötig? Daß er recht nützlich sein mag, versteht sich von selbst. Ist es aber grundsätzlich geboten, die Quotientendefinition so weit abzuweisen, als es hier geschieht? Tatsächlich ist der Differentialquotient der lim eines Differenzenquotienten. Für die Differenzenquotienten gilt unser Satz. Er gilt von selbst auch für die Differentialquotienten, wenn man von dem Satz Gebrauch macht, daß $\lim \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim a}$ ist. Darf man das ohne weiteres? Nach meiner Meinung ganz unbesorgt. Es ist nicht nötig, daß auf der höheren Schule derartige Sätze über den Grenzbegriff streng behandelt werden. Daß die Grenze einer Summe, einer Differenz, eines Produktes, eines Quotienten gleich der Summe, der Differenz, dem Produkt, dem Quotienten der Grenzen der im Ausdruck auftretenden Größen ist, kann, solange es sich um eine endliche Anzahl von Summanden, von Faktoren usw. handelt, in der Schule ohne Beweis hin-

[1] R. Schimmack, Eine spezielle Frage der Schul-Infinitesimalrechnung, Ubl 14 (1908) S. 30f. Vgl. auch R. Schimmack, Über die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen, ZmnU 39 (1308) S. 513ff.

genommen werden. Jedenfalls haben wir es, und ebenso auch alle Lehrgänge, die mit einem Male an der Stelle $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$ so streng werden, bei früheren Gelegenheiten, z. B. bei der Differentiation einer Summe oder der Funktion einer Funktion, unbesehen hingenommen.

Eben lehnten wir allzu weitgehende Strenge ab. Wir müssen uns nun aber auch gegen ein anderes Extrem wenden. Es gibt tatsächlich Lehrbücher, die die Differentiation der Potenz nur für ganze Exponenten ableiten, dann aber schließen: „Bekanntlich" kann man einen Wurzelausdruck als Potenz mit gebrochenem Exponenten schreiben. Tut man das und wendet die „bekannte" Regel an, so erhält man ... Das ist eine regelrechte Erschleichung des Ergebnisses. Der Schüler, der versuchen wollte, den bei dem Beweis der ersten Tatsache eingeschlagenen Weg wirklich noch einmal zu gehen, um ebenso die zweite Tatsache zu beweisen, muß vollkommen scheitern, weil eben für den Weg die Tatsache, daß der Exponent eine ganze Zahl ist, wesentlich war.

Um der wichtigen Anwendungen auf die Kegelschnitte willen halte ich es für wünschenswert, daß auch diejenigen Schulen, die nur eine kleine Ration von Infinitesimalrechnung bewältigen können, bis zu den algebraischen Funktionen vordringen. Von hier aus lassen sich die Gleichungen der Tangenten an die Kegelschnitte ungezwungen erledigen. Es gibt ja auch elementare Methoden, die darin bestehen, daß wie bei der Infinitesimalrechnung die Tangente als Grenzfall der Sekante aufgefaßt wird, daß aber der Grenzübergang jeweilig ganz durchgeführt wird, und zwar mit Hilfe einer zweckmäßigen Umformung der arithmetischen Ausdrücke.[1]

Gerade bei den algebraischen Funktionen bestehen nun aber die mannigfaltigsten Möglichkeiten, sowohl in der Benutzung des Stoffes als in der Wahl der Methoden über das eben angedeutete Mindestmaß hinauszugehen. Einiges deute ich kurz an. Es ist etwas umständlich, bei den in impliziter Form gegebenen Funktionen erst die explizite Form herzustellen und dann zu differenzieren. Es liegt also nahe, die Differentiation impliziter Funktionen an dieser Stelle einzuführen. Gewöhnlich zieht dieser Schritt auch den weiteren nach sich, die Differentiation von Funktionen mehrerer Variablen, mit anderen Worten die partielle Differentiation, zu berühren. Einige reale Lehranstalten gehen in der Tat so weit, z. B. die württembergischen Oberrealschulen und ebenso die hamburgischen. Bei dem Stundenausmaß der preußischen Realanstalten möchte ich davor warnen, unter normalen Umständen so weit vorzudringen. Mit der Differentiation impliziter Funktionen wird doch manche Frage aufgerollt, die, gründlich erledigt, längere Erörterungen erfordert.

Gesteht man, wie wir es oben vorschlugen, die Freiheit in der Vertauschung von Operationssymbol und lim-Symbol zu, so erschließt sich damit ein Weg, auch bei nicht ganz einfachen impliziten Funktionen ohne Weiterungen zum Ziel zu kommen.

[1] Eine Kritik siehe bei Hubert Müller, Unvollkommene Darstellungen in Lehrbüchern der analytischen Geometrie und die mutmaßlichen Ursachen derselben, ZmnU 41 (1910) S. 529ff.

Es liege die Funktion

$$y^2 - 2xy = 3x$$

vor; der Differentialquotient soll bestimmt werden. Man hat zunächst

$$(y + \triangle y)^2 - 2(x + \triangle x) \cdot (y + \triangle y) = 3(x + \triangle x),$$
$$y^2 + 2y\triangle y + \triangle y^2 - 2xy - 2x\triangle y - 2y\triangle x - 2\triangle x\triangle y = 3x + 3\triangle x.$$

Subtrahiert man davon die gegebene Gleichung und ordnet, so hat man

$$\triangle y(2y + \triangle y - 2x - 2\triangle x) = \triangle x(3 + 2y)$$
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{2y + 3}{2y - 2x + \triangle y - 2\triangle x}.$$

Geht man jetzt zur Grenze über, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y + 3}{2y - 2x}.$$

Ich habe absichtlich ein Beispiel hierher gesetzt, das gelegentlich von Flechsenhaar gewählt worden ist, um den Nutzen der Differentiale für den Schulunterricht ins rechte Licht zu setzen. Er nimmt an, daß „der Nachbarpunkt" (gibt es einen solchen?) die Koordinaten $x + dx$, $y + dy$ hat und gewinnt ähnlich wie wir

$$y^2 + 2ydy + dy^2 - 2xy - 2xdy - 2ydx - 2dxdy = 3x + 3dx.$$

Jetzt liefert ihm „die Vernachlässigung von dx^2, dy^2, $dxdy$" den Ausdruck

$$2ydy - 2xdy - 2ydx = 3dx$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y + 3}{2y - 2x}.$$

Hier wird also dx^2, dy^2, $dxdy$ gleich Null gesetzt. Ein anderer Verfechter der Benutzung von Differentialen im Schulunterricht, A. Schülke, entwickelt

$$y = ax^2$$
$$y + dy = a(x^2 + 2xdx + dx^2)$$
$$\frac{dy}{dx} = a \cdot 2x + adx = 2ax,$$

setzt also dx einfach Null. Hätte ich das schon vorher getan, dann wäre solche Rechnung überhaupt unmöglich gewesen. Das Ganze erinnert durchaus an die früher (S. 330) erwähnte Begriffsbildung der „relativen" Null.

Man möge sich mit seinen Beispielen nicht auf die Kegelschnitte beschränken, sondern andere algebraische Kurven hinzunehmen. Es ist recht wichtig, daß der Schüler auch einige andere Kurven kennen lernt, seien sie nun praktisch oder theoretisch wichtig. Recht viel läßt sich auch hier schon mit unserem Mindestmaß erreichen. Will man noch einen Schritt weitergehen, so nehme man die Parameterdarstellung hinzu (x und y sind gegeben als Funktionen einer dritten Veränderlichen t); dann erschließt sich eine Fülle neuer Anwendungen. Notwendig ist aber auch das nicht.

Gleichgültig, ob man sich auf die Kegelschnitte beschränkt oder neben ihnen noch andere Kurven betrachtet, immer wird erwägenswert sein, ob man auch auf die Krümmung der Kurve eingeht. Die Diskussion der Kurven wird durch die Berücksichtigung des Begriffes der Krümmung in wichtigen Punkten ergänzt, auch im

Interesse der zeichnerischen Behandlung der Kurven. Einen Beweis für die praktische Bedeutung mag man auch darin sehen, daß Holzmüller in seinem methodischen Lehrbuch elementare Methoden ersonnen hat, um auch — scheinbar — ohne Differentialrechnung bis hierhin vorzudringen.[1]

15. Transzendente Funktionen.

Diejenigen transzendenten Funktionen, deren Differentiation sich auch auf den Gymnasien kaum umgehen lassen wird, sind die trigonometrischen Funktionen. Man darf annehmen, daß bereits in der Trigonometrie die Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens graphisch dargestellt worden sind. Wenn es nicht früher schon geschehen ist, so muß nun hier in Prima neben dem Gradmaß des Winkels das Bogenmaß eingeführt werden. Freilich findet man heute nicht selten schon in Darstellungen für Untersekunda das Bogenmaß erwähnt, meist ohne daß es nachher bei der Rechnung benutzt wird. Ich kann mich damit nicht befreunden. Das Nebeneinander von Bogen- und Gradmaß muß nach meiner Erfahrung den Schüler, der eben die trigonometrischen Funktionen kennen lernt, nur verwirren. Notwendig wird die Einführung des Bogenmaßes erst dann, wenn der Differentialquotient die Willkürlichkeit des Maßstabes auf x und y Achse unmöglich macht.

In der Physik handelt es sich meist nicht um die Funktion $y = \sin x$, sondern um die allgemeinere Funktion $y = a \sin bx$. Es wird zweckmäßig sein, das Kapitel der transzendenten Funktionen mit dem Studium dieser Funktion noch einmal aufzunehmen. Praktische Anwendungen aus der Wellenlehre, der Akustik, der Wechselstromtechnik bieten sich in großer Zahl dar.

Zur Herleitung der Differentialquotienten der trigonometrischen Funktionen ist nur ein einziger neuer Satz nötig, nämlich $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Dieser Satz wird bekanntlich in der Weise bewiesen, daß man (Fig. 84) die Flächen der Dreiecke BAM und DCM und des Sektors BMC durch den Radius und den Zentriwinkel ausdrückt. Die anschauliche Tatsache, daß der Inhalt des Sektors zwischen den Inhalten der beiden Dreiecke liegt, führt dann zu dem Ergebnis, daß man für den Quotienten $\frac{x}{\sin x}$ eine obere und eine untere Grenze findet, die mit abnehmendem Winkel beide gegen 1 konvergieren. Man kann den Beweis auch kürzer führen, wenn man davon ausgeht, daß die halbe Sehne BA kleiner, die Tangente DC größer als der Kreisbogen BC ist. Freilich kann man einwenden, daß diese schon bei der archimedischen Kreisberechnung benutzte Tatsache nicht ebenso anschaulich wie die Inhaltsvergleichung ist und deshalb eines ausdrücklichen Beweises bedarf.

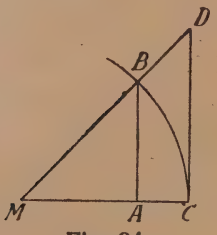


Fig. 84.

[1] 3. Teil, 2. Aufl., 1903, S. 100ff. — Als Gegenstück einer Behandlung der gleichen Fragen mit den Mitteln der Infinitesimalrechnung nenne ich B. Lindow, Die Anwendung der Differentialrechnung auf das technische Zeichnen. Jena (H. W. Schmidt) 1910.

Man sollte sich nicht mit diesem Beweise begnügen, sondern am besten schon vorher rechnerisch zeigen, daß sich jener Quotient mit kleiner werdendem x tatsächlich dem Werte 1 nähert. Auch darauf ist der Schüler hinzuweisen, daß die graphische Darstellung die gleiche Tatsache erkennen läßt; in der Nähe des Nullpunktes schmiegt sich die Sinuskurve der Geraden $y = x$ an. Nach meiner Erfahrung macht es dem Schüler einige Schwierigkeit, wenn er nun das erhaltene Ergebnis auf Grenzwerte der Form $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx}$ anwenden soll. Er neigt dazu, auch hier den Wert 1 als Ergebnis anzusehen, weil ja genau so wie vorher Zähler und Nenner dem Werte 0 zustreben. Es ist besser, mit einigen Übungen diese Unklarheiten zu zerstreuen, ehe man an die Ableitung der Differentialquotienten von Sinus und Kosinus geht, die in bekannter Weise zu erledigen ist.[1]

Über die Differentialquotienten von Tangens und Kotangens, die sich durch Anwendung der Produkten- und Quotientenregel ergeben, braucht kein Wort weiter verloren zu werden, ebensowenig über die zahlreichen Anwendungen aus der Physik und der Geometrie. Man kann in den Kurvendiskussionen hier sehr weit vordringen, wenn man die Parameterdarstellung von Kurven, etwa von Zykloide, Trochoide, Astroide usw. benutzt.

Welches ist das Mindestmaß von Differentialrechnung auf dem Gymnasium, welches das Höchstmaß in der Obersekunda einer Oberrealschule? Beidemal will ich mich von den Rücksichten auf die Anwendungen, d. i. im besonderen der Mechanik, leiten lassen. Es ergibt sich, daß man in den Anfängen der Mechanik mit den Funktionen $y = x^n$, wo n eine ganze Zahl ist, und $y = a \cdot \sin bx$ auskommt. Man braucht dazu dann noch die Differentiation von Summen, Produkten und Quotienten. Auf die Differentiation von Funktionen einer Funktion kann man zur Not verzichten. Die allgemeine Sinusfunktion, der man z. B. bei der harmonischen Bewegung begegnet, läßt sich auch ohne diese Regel unmittelbar differenzieren.

Die Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen, die zyklometrischen Funktionen, können wohl nur an Realanstalten behandelt werden; sich auf die Definition ohne ausführlichere Diskussion der Funktionen zu beschränken, wie es in manchen Lehrbüchern geschieht, ist unfruchtbar. Das Neue, was dem Schüler bei diesen Funktionen entgegentritt, ist die unendliche Vieldeutigkeit; diese Tatsache, die durch die graphische Darstellung sehr einleuchtend gemacht wird, ist bei dem Rechnen mit diesen Funktionen recht wohl zu beachten. Die Herleitung des Differentialquotienten von arc sin x usw. begegnet keinen Schwierigkeiten, wenn man sich auf die Differentiation inverser Funktionen beziehen darf.

Die dritte Gruppe transzendenter Funktionen sind Exponentialfunktion und logarithmische Funktion. Auch diese Funktionen können nach meiner Meinung nur an den Realanstalten ausführlicher behandelt werden; eine Diskussion in elementarer Form, die bei den Gymnasien ausreichen muß, ist schon in den Mittelklassen

[1] Als Beispiel einer anschaulich-geometrischen Herleitung der Differentialquotienten der trigonometrischen Funktionen sei genannt: B. Petronievics, Déduction des dérivées de fonctions circulaires par la méthode géométrique des limites, Enseignement mathématique 22 (1921/22) S. 195ff.

vorausgegangen. Die Definition dieser Funktionen berührt sich aufs engste mit zwei anderen Gebieten, die wir hier aus Zweckmäßigkeitsgründen ausgesondert haben, der Reihenentwicklung und der Integralrechnung. Wir kommen hier zu Fragen, bei denen man sich darüber klar werden muß, welchen Grad von Strenge man in der Schule anzuwenden hat. Der alte Zustand war der: Man ersann elementare Methoden, mit denen man sich durch alle Schwierigkeiten hindurchwand, um schließlich zum richtigen Ergebnis zu kommen. Einer kritischen Prüfung, warum man gerade so verfuhr, ob die einzelnen Schritte auch ohne weiteres zulässig waren, ging man aus dem Wege.

Die erste Aufgabe, der man begegnet, wenn man an die Differentiation des Logarithmus herankommt, ist die Definition von e. Man pflegt die Zahl e in der Schule als Grenzwert eines unendlichen Produktes einzuführen

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Wenn wir mit der Selbstverständlichkeit, die wir bei endlicher Faktorenzahl zuließen, vorgingen, so könnten wir — und immer wieder wird der eine oder andere intelligente Schüler es so versuchen — sagen: Der Wert der runden Klammer wird nach dem Grenzübergang zu 1, mithin ist der Wert der Zahl e nach dieser Definition selbst gleich 1. Ich kann da nur raten, den Wert des Ausdruckes, der unter dem Limeszeichen steht, ausrechnen zu lassen, erst für $n = 10$, dann für $n = 100$, für $n = 1000$ usf. Man kann gegen ein solches Verfahren einwenden, daß man diese Rechnung tatsächlich nur logarithmisch durchführen kann, daß aber die Logarithmentafeln nur mit Hilfe des Wertes e zustande gekommen sind — also ein Zirkelschluß. Meiner Ansicht nach verschlägt das nichts. Wir haben den Schülern in Untersekunda gezeigt, daß man Logarithmen auch mit beliebiger Genauigkeit, wenn auch auf recht langweiligem Wege, elementar berechnen kann. So könnte ich mir ja auch die Logarithmen berechnet haben, die ich jetzt für meine Rechnung brauche.

Die Differentiation des Logarithmus, zu der man nun übergehen kann, deckt die Bedeutung der Zahl e und die besondere Stellung der natürlichen Logarithmen auf. Erfahrungsgemäß macht das Nebeneinander von Logarithmen verschiedener Basis, der Übergang von den einen zu anderen, den Schülern Schwierigkeiten. Um so mehr ist es notwendig, in zahlreichen Übungen numerischer Art die gegenseitigen Beziehungen einzuprägen. Es muß den Schülern nicht nur theoretisch, sondern auch praktisch-rechnerisch deutlich werden, daß sie mit einem Logarithmensystem alle anderen beherrschen.

Auch bei der Differentiation der Exponentialfunktion, die man ausgehend von der Differentiation des Logarithmus durch die Regel von der Differentiation der inversen Funktion leicht bewerkstelligt, tritt die Bevorzugung der Basis e in die Erscheinung.

Als Anwendungen kommen Diskussionen der logarithmischen und der Exponentialkurve in Betracht, von weitergehenden Kurven insbesondere noch die Ketten-

linie. Auch bei diesen Kurven kann man, wenn die Zeit dazu ausreicht, bis zur Diskussion der Krümmung vorgehen. Perry[1] hat auf die Wichtigkeit der Funktion $a \cdot e^{bx} \cdot \sin cx$ hingewiesen, den Ausdruck für den Ausschlag im Falle der gedämpften Schwingung; ihre Bedeutung für die Technik läßt eine Diskussion wichtig erscheinen.

Wir sind hier von einer ganz bestimmten Seite aus an e und den Logarithmus herangekommen. Das unendliche Produkt, das uns als Ausgangspunkt diente, hängt freilich etwas in der Luft. Es ist vielleicht nicht überflüssig, noch ausdrücklich darauf hinzuweisen, wie man von praktisch wichtigen Fällen aus zu diesem Produkt gelangt. Wenn man in der Zinseszinsrechnung die Zinstermine verkleinert, so wird das Endkapital dadurch vergrößert, aber nicht etwa ins Ungemessene. Was geschieht, wenn die Zinstermine an Länge gegen Null, in ihrer Anzahl gegen ∞ zu gehen? Die Durchführung dieses Problems führt auf jenes unendliche Produkt, mit dessen Hilfe wir e definierten. Daß es die Funktion des stetigen Anwachsens ist, um die es sich hier handelt, sieht man auch dann, wenn man etwa die Luftdruckformel streng herleitet. Wir werden gleich einen anderen Weg kennen lernen, später dann noch einen dritten, der zu diesen transzendenten Funktionen, dem Logarithmus und der Exponentialfunktion, hinführt, die unendliche Potenzreihe.[2]

16. Unendliche Reihen.

Wir hatten schon gehört, daß in allen Schularten im Anschluß an die endlichen regelmäßig auch unendliche geometrische Reihen zur Besprechung kommen. Bei dieser besonderen Art unendlicher Reihen erledigt sich die Untersuchung der Konvergenz sehr rasch. Wenn man sich nun an den Realanstalten noch einmal ausführlicher der Lehre von den unendlichen Reihen zuwendet, so ist es unbedingt geboten, mit einer ausführlichen Erörterung des Begriffes der Konvergenz von Reihen den Anfang zu machen. Man tut gut, sich zunächst ganz an Reihen zu halten, deren Glieder zahlenmäßig gegeben sind, erst später zu dem nachher wichtigsten Falle, den Potenzreihen, überzugehen.

Den Schülern ist recht klar zu machen, daß eine Summe von beliebig vielen Summanden zunächst gar keine Bedeutung hat, geschweige denn, daß man mit einem solchen Gebilde alles tun darf, was bei endlicher Summandenanzahl erlaubt ist. Die Bedeutung von $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ liegt lediglich darin, daß die Folge der zugehörigen Teilsummen $s_1, s_2, s_3, \ldots$ gegen einen bestimmten, endlichen Wert konvergiert. Es ist bisher auf den Schulen Gebrauch gewesen, immer gleich von unendlichen Reihen zu sprechen und nicht vorher von unendlichen Folgen. Mir scheint,

---

[1] Ich nenne hier das für den Lehrer außerordentlich anregende Werk Perrys: Höhere Analysis für Ingenieure. Deutsch von R. Fricke und F. Süchting, 2. Aufl., Leipzig (Teubner) 1910.

[2] Die schulmäßige Behandlung von e hat in letzter Zeit mehrere Abhandlungen beschäftigt; ich nenne: A. Loewy, Zur elementaren Behandlung von Exponentialfunktion und Logarithmus, ZmnU **50** (1919) S. 330ff.; E. Götting, Die Exponentialfunktion im Unterricht, ZmnU **51** (1920) S. 58ff.

daß die Trennung der Begriffe Folge und Reihe die Schwierigkeiten erleichtert, weil sie in zwei Schritte teilt, was auf einmal zu schwer fällt.[1]

Man darf sich nicht damit begnügen, den Begriff der Konvergenz einer Reihe zu erklären, dann ein Konvergenzkriterium anzugeben und seine Gültigkeit zu beweisen und danach ein paar Reihen zu untersuchen. Der Schüler würde damit nicht wirksam genug gegen übereilte Schlüsse gewappnet sein, die sich ihm früher oder später aufdrängen, wenn er sich mit unendlichen Reihen beschäftigt. Man lasse also zunächst einmal bei einigen Reihen die Summen der ersten Glieder tatsächlich ausrechnen, damit der Schüler deutlich sieht, wie manche von ihnen einer bestimmten Grenze mit wachsender Gliederzahl zustreben, andere nicht. Man stelle den Schüler vor die Frage: Wann wird eine unendliche Reihe konvergieren? Er wird als erste Bedingung finden, daß die Glieder abnehmen müssen. Man läßt ihn nun Beispiele bilden, bei denen die Glieder abnehmen, ohne doch gegen Null zu konvergieren: etwa $2 + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{8} + \ldots$. Er wird jetzt als Bedingung für die Konvergenz hinzufügen, daß die Glieder gegen Null konvergieren müssen. Man zeigt ihm wieder Reihen, bei denen das der Fall ist, deren Summe aber doch nicht endlich ist, etwa die harmonische. Nun erst mag man ihn auf das einfachste und bekannteste Konvergenzkriterium führen, die Untersuchung des Quotienten zweier aufeinanderfolgender Glieder, bei dessen Ableitung man sich nach der „Majorantenmethode" auf die unendliche geometrische Reihe bezieht. Man läßt jetzt vorgelegte Reihen auf ihre Konvergenz untersuchen, zeigt, daß für Reihen mit abwechselndem Vorzeichen ein einfacheres Kriterium ausreicht, und belegt durch mehrere Beispiele, daß die angegebenen Kriterien keine Allheilmittel sind. Man könnte versucht sein, dem Schüler noch irgendein schärferes Konvergenzkriterium anzugeben. Da man aber bei den später zu behandelnden Potenzreihen mit dem einfachsten Kriterium auskommt, rate ich davon ab.

Soll man auf den Unterschied zwischen bedingter und unbedingter Konvergenz eingehen? Ich halte es nicht für nötig, sich so ausführlich mit der Konvergenz zu beschäftigen, es genügt meines Erachtens, wenn man die Schüler durch ein Beispiel belehrt, daß sie nicht ohne weiteres die Summandenvertauschung auf unendliche Summen übertragen dürfen.

Man zeigt etwa, daß die Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$, die nebenbei gesagt den Wert log nat 2 darstellt, konvergent ist, daß man sie in

$$(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \ldots) - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \ldots)$$

verwandeln kann, oder in

$$\left[(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \ldots) + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \ldots)\right] - 2(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \ldots).$$

Das würde aber heißen, es ist jene obige Reihe auch gleich

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots) - (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots),$$

d. h. gleich Null. In ganz ähnlicher Weise kann man durch solche nicht erlaubte Vertauschung der Glieder log nat 2 = 2 log nat 2 „beweisen". Solche Warnungsbeispiele reichen wohl aus.

[1] Als die beste wissenschaftliche Darstellung nenne ich K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin (Springer) 1922. — Einen Überblick über die Geschichte gibt R. Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen, Tübingen (Laupp) 1889.

Sehr wesentlich erscheint mir nun eine ausdrückliche Erörterung der Praxis der Reihen. Für die Konvergenz macht es theoretisch nichts aus, wie die ersten n Glieder gestaltet sind, wenn nur n eine endliche Zahl ist. Für die praktische Rechnung fallen aber die ersten n-Glieder tatsächlich recht sehr ins Gewicht, zumal wenn n einigermaßen groß ist. Für die Konvergenz ist es theoretisch belanglos, von welchem Gliede ab die eigentliche Konvergenz beginnt, d. h. von welchem Gliede an die Glieder tatsächlich kleiner und kleiner werden. Für die Rechenpraxis ist aber z. B. eine Berechnung des Wertes

$$e^{100} = 1 + \frac{100^1}{1!} + \frac{100^2}{2!} + \frac{100^3}{3!} + \cdots$$

durch die Reihe gänzlich ohne Bedeutung. Für die Theorie ist es nicht ausschlaggebend, ob die Konvergenz einer Reihe langsam oder schnell ist, um so mehr für die praktische Rechnung. Für die Theorie kommt alles darauf an, ob eine Reihe konvergiert oder nicht, für die Praxis eigentlich verschwindend wenig. Ihr liegt nur daran, daß, wenn ich mit einer bestimmten, nicht zu großen Anzahl von Gliedern abbreche, der Rest unter die Genauigkeitsgrenze sinkt; ob er tatsächlich sich der Grenze Null nähert, ist für die Rechnung gleichgültig. Deshalb kommt z. B. die astronomische Störungsrechnung sehr gut mit ihren Reihen aus, obwohl sie gar nicht ganz sicher weiß, ob diese Reihen konvergieren oder nicht.

Doch wir sind damit schon hinübergekommen zu den Reihen, die in ihren Gliedern eine Variable enthalten. Von diesen Reihen kommt, da man auf die Fourierentwicklungen auf der höheren Schule wohl ganz verzichten muß, nur die Potenzreihe in Betracht. Hier ist es nun der Begriff des Konvergenzbereichs, der in voller Klarheit vom Schüler erfaßt werden muß, natürlich unter Beschränkung auf den reellen Bereich. Man muß an bestimmten Beispielen zeigen, wie eine Überschreitung des Konvergenzbereiches zu schlimmen Fehlern führt; historisch bedeutsame Beispiele, wie sie sich bei Leibniz, Waring, Jakob Bernoulli finden, werden den Vorzug vor gleichgültigen anderen verdienen. Die Schüler vermuten vielfach, die Divergenz trete nur dann ein, wenn der entsprechende Funktionswert unendlich wird. Das erste und beste Gegenbeispiel bietet die binomische Reihe.

Der Zweck, den man mit der Einführung der Reihenlehre in die höheren Schulen verfolgt, ist der, den Schülern eine wirklich brauchbare Methode zu geben, die Logarithmen, die trigonometrischen Funktionen, die Zahlen e und π praktisch zu berechnen. Sie wissen aus der Mittelstufe, daß solche Berechnungen auf elementarem Wege an sich möglich sind, sie haben aber auch erfahren, daß diese Wege langwierig und deshalb langweilig sind. Man muß dieses Ziel beachten, wenn man den Standpunkt richtig wählen will, den die Reihenlehre auf der höheren Schule einzunehmen hat. Das Ziel ist durchaus rechnerisch-praktisch, keinesfalls eine strenge Grundlegung der Analysis. Man hat deshalb auch nicht von seiten der mathematischen Wissenschaft die Berechtigung, eine übertriebene Strenge in der Ableitung zu fordern.

Diejenigen Funktionen, die fast durchweg in den Realanstalten in unendliche Reihen entwickelt werden, sind $(1 + x)^n$ für beliebiges rationales n (der sogenannte binomische Lehrsatz), dann die trigonometrischen Funktionen sin x und cos x, da-

mit mit ihrer Hilfe eine Berechnung der in der Tafel enthaltenen Werte möglich ist, weiter, aus dem gleichen Grunde, die beiden Funktionen e^x und $\log(1+x)$, schließlich noch die Reihe für arc tg x, damit mit ihrer Hilfe der Wert π bestimmt werden kann.

In einer Zeit, in der die Infinitesimalrechnung durch die Lehrpläne ausdrücklich verboten, gleichzeitig aber die Reihenlehre durch dieselben Lehrpläne vorgeschrieben war, mußten sogenannte elementare Methoden erdacht werden, mit deren Hilfe diese Funktionen in Reihen entwickelt wurden. Werfen wir zunächst einen Blick auf derartige Methoden.

Der binomische Lehrsatz ist für positive ganze Exponenten bereits im Anschluß an die Kombinatorik bewiesen worden. Man kann nun in der Weise vorgehen, daß man im Falle eines negativen oder eines gebrochenen Exponenten n die Reihe in der gleichen Weise formal ansetzt und die Richtigkeit des Ansatzes unter Benutzung der Funktionalgleichung $f(n) \cdot f(m) = f(n+m)$ nachweist.

Eine andere, häufig anzutreffende Methode ist die, eine Potenzreihe mit unbestimmten Koeffizienten anzusetzen und sie dann zu differenzieren. Freilich wird der Ausdruck „differenzieren" nicht gebraucht, man führt vielmehr den ganzen Grenzprozeß schrittweise ausführlich durch, indem man also in unserem Falle $(1+x)^n - (1+y)^n$ bildet, durch $x-y$ dividiert und zur Grenze $x=y$ übergeht. Dann erhält man links, abgesehen von einer Konstanten, wieder einen binomischen Ausdruck, für den man abermals eine Reihe einsetzen kann; durch Koeffizientenvergleichung bestimmt man die Koeffizienten selbst. Wir wollen das hier angewandte Verfahren, das uns noch öfter begegnen wird, kurz die „anonyme" Differentiation nennen. Der heikle Punkt in dieser anonymen Differentiation ist, daß man kritiklos den Grenzübergang über die unendliche Anzahl von Gliedern einzeln ausübt.

Der binomische Satz gibt jetzt die Möglichkeit, eine Reihe für e und ebenso für e^x zu entwickeln, indem man in dem Ausdruck $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ den Exponenten n zunächst endlich annimmt und dann zur Grenze übergeht. Unzweifelhaft ist auch dieser Grenzübergang sehr angreifbar. Es ist schon auf das Bedenkliche dieses Verfahrens hingewiesen worden; ich halte es aber doch für wichtig, an einem Gegenbeispiel die große Willkürlichkeit des Verfahrens zu zeigen; ich entnehme es einem schon recht alten Artikel von Schlömilch[1], der freilich wenig gefruchtet hat.

Die n-gliedrige Reihe

$$(1)\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)+\dots,$$

die man erhält, wenn man den binomischen Satz anwendet, geht für $n=\infty$ über in

$$(2)\qquad \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$$

[1] Vgl. O. Schlömilch, Bemerkungen über Grenzwerte, ZmnU 9 (1878) S. 197ff. Dazu derselbe, Über die unendliche Reihe für die Zahl e. Ebenda 17 (1886) S. 183/4, wo ein einwandfreier Beweis angefügt ist. Dieser Beweis befindet sich bereits in dem 3. Teil der Elemente der Mathematik von W. Gallenkamp (Iserlohn 1880).

Nun geht aber beispielsweise auch die n-gliedrige Reihe

$$(3) \qquad \left[\frac{1}{1}+\frac{1}{n^2}\right]+\left[\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n^2}\right]+\left[\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{3}{n^2}\right]+\dots$$

für denselben Grenzwert in die gleiche Reihe (2) über, wenn man, wie eben, gliedweise zur Grenze übergeht. Andererseits überzeugt man sich durch Summation der Zusatzglieder, die (3) gegenüber von (1) aufweist,

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\dots+\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n^2}(1+2+\dots+n)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

davon, daß tatsächlich der Grenzwert der Reihe (3) um die Größe $\frac{1}{2}$ größer ist als der Grenzwert der Reihe (1). Damit dürfte die Unzulänglichkeit dieses „elementaren" Verfahrens hinlänglich erwiesen sein.

Die Reihe für den Logarithmus erhält man, wieder fußend auf den binomischen Satz, durch einen Kunstgriff, indem man nämlich die Formel

$$\lim_{n\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{n}=\log\text{nat}\,(1+x)$$

benutzt. Bei diesem Grenzübergang, in der gewohnten Weise ausgeführt, ist natürlich derselbe Einwand zu machen wie eben bei der Reihe für e.

Die Reihen für sin x kann man entweder durch zweimalige anonyme Differentiation mit nachfolgender Koeffizientenvergleichung ableiten (ebenso die cos-Reihe, die aber auch sofort durch einmalige anonyme Differentiation aus der sin-Reihe folgt), oder aber man macht wieder einen bedenklichen Grenzübergang, der durch Hinzunahme des Imaginären nicht besser wird, man setzt nämlich

$$\cos x+i\sin x=\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n}+i\sin\frac{x}{n}\right)^n.$$

Für die arc tg-Reihe schließlich leitet man aus $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ eine Beziehung

$$\text{arc tg}\,x=\frac{1}{2i}\log\text{nat}\,\frac{1+ix}{1-ix}$$

ab und kommt so mit imaginären Hilfstruppen, in der Regel ohne vorher die Logarithmen imaginärer Zahlen überhaupt erörtert zu haben, zu der gewünschten Reihe.

Stellt man die Requisiten dieser elementaren Methoden zusammen, so sind es: „Anonyme" Differentiationen, gefährliche Grenzübergänge, Hineinziehen des Imaginären und, last not least, die kunstreiche, als gütiger deus ex machina auftretende Formel, auf die ein Schüler niemals kommen würde, wenn sie nicht der Lehrer zur Stelle schaffte.

Ich hielt es für nötig, diese Ableitungen doch wenigstens zu charakterisieren. Sie waren eine Art Notbehelf, als man kurzsichtigerweise die Differentialrechnung verboten hatte. Sie sollten sofort in der Versenkung verschwunden sein, als man wieder frischweg differenzieren durfte. Sie sollten — sie sind es leider nicht! Noch heute gibt es Lehrbücher, deren Differentialrechnung vor den unendlichen Reihen halt macht. Deshalb hier unsere Warnung vor diesen Methoden.

Wenn wir die Dinge beim Namen nennen und differenzieren, so stehen zwei Wege zur Ableitung der Reihen offen: einmal die schrittweise Differentiation, das andere Mal die Methode der Koeffizientenvergleichung. Wenn ich z. B. die Reihe für sin x ableiten will, so setze ich die Reihe mit unbestimmten Koeffizienten an, und kann die Koeffizienten nun entweder durch schrittweise Differentiation nacheinander bestimmen, oder aber zweimal differenzieren, um dann für den jetzt rechts stehenden Ausdruck $(-\sin x)$ die ursprüngliche Reihe mit unbestimmten Koeffizienten einzusetzen. Durch Koeffizientenvergleichung erhalte ich dann Rekursionsformeln für die Koeffizienten. — Die erste Methode kommt auf die Mac Laurinsche und die Taylorsche Reihe hinaus, sofern man nämlich die Bestimmung der Koeffizienten ein für allemal vornimmt. Die zweite Methode ist trotzdem in vielen Fällen praktischer oder doch eben so praktisch wie die erste. Da von allen hier in Frage kommenden Funktionen die Differentialquotienten bekannt sind, macht die wirkliche Aufstellung der Reihen keine Schwierigkeiten.

Die eben angedeuteten Wege verdienen vor den vorher beschriebenen den Vorzug, weil sie einfach und übersichtlich sind. Man braucht auch nicht, wenn man nun einmal auf eine andere Funktion stößt, die in eine Reihe zu entwickeln ist, auf neue kunstreiche Formeln zu sinnen, derselbe Weg führt bei den für die höhere Schule in Frage kommenden Funktionen immer zum Ziel, wenn auch manchmal der Bau der Koeffizienten nicht so ganz einfach ist. Man sollte es nicht versäumen, einige Funktionen, z. B. arc sin x, tg x, $\sin^2 x$, auch log sin x, log cos x in Reihen entwickeln oder doch wenigstens ihre ersten Glieder bestimmen zu lassen.

Wie steht es nun aber mit der mathematischen Strenge bei diesen Ableitungen? Da muß man sagen: Wenn es auch weit besser mit ihnen bestellt ist als bei jenen früheren Methoden, so sind auch sie keineswegs einwandsfrei. Natürlich wird man bei jeder der Reihen, die man erhalten hat, nachträglich auch den Konvergenzbereich feststellen. Genügt das aber? Bekanntlich sagt die Wissenschaft: Nein! Nur dann weiß man von einer Reihe, daß sie die Funktion auch wirklich darstellt, wenn man sich überzeugt hat, daß das Restglied mit wachsendem n gegen Null konvergiert — vorausgesetzt, daß man sich nicht auf anderem Wege von der Übereinstimmung von Reihe und Funktion überzeugt hat. Es gibt ja verhältnismäßig einfach aussehende Funktionen, bei denen die nach den beschriebenen Methoden abgeleitete Reihe konvergiert, ohne doch die Funktion darzustellen. Ich glaube, daß die Mehrzahl der Realanstalten auf die Forderung einer strengen Diskussion des Restgliedes, so wie die Dinge heute liegen, verzichten wird. Das besagt nicht, daß man im Unterricht über diese Unterlassungssünden stillschweigend hinweggleiten soll; ich meine im Gegenteil, daß man nachdrücklich den Finger auf die Stelle legen muß: Da fehlt noch etwas, da stimmt nicht alles! Aber zu einer wirklich sorgfältigen Erörterung solcher Fragen wie nach der Differentiation und Integration von Reihen, zu einer wirklich vollständigen Diskussion des Restgliedes wird fast immer die Zeit fehlen. Ich kann auch wirklich nicht einsehen, warum man der Schule in dieser Hinsicht Vorwürfe machen könnte. Es fällt ja auch niemandem ein, sie deswegen anzuklagen, daß sie in den Elementen der Planimetrie nicht auf die Axiomatik, also auf die strenge Grundlegung eingeht; warum stellt man nun bei den Elementen der Infini-

tesimalrechnung erhöhte Anforderungen?[1] Wir treiben in der Schule die Reihenlehre, wie schon im Anfang gesagt, um ihres Nutzens zur Berechnung von Funktionswerten willen. Warum sollen wir uns da so strenger Methoden bedienen, auf die jeder Physiker verzichtet? Nur um des Phantoms der mathematischen Strenge willen, die doch sowieso an so vielen Stellen der Schulmathematik gar nicht vorhanden ist, wenn auch ihre Defekte dem Schüler kaum zum Bewußtsein kommen? Daß die Wissenschaft mit unseren Methoden nicht zufrieden ist, das wollen wir, wie gesagt, ja nicht den Schülern verschweigen. Die Schüler haben in der Prima eine Ahnung davon bekommen, daß der Stoff mit der Schulmathematik nicht abgetan ist — deswegen nennen wir ihnen z. B. den Fundamentalsatz der Algebra, ohne ihn zu beweisen, deswegen werden wir ihnen sagen, daß man eine Potenzreihe differenzieren darf, ohne nachzuweisen, daß das gestattet ist — sie sollen auch erfahren, daß ebensowenig die wissenschaftlichen Methoden ausgeschöpft sind, deswegen sagen wir ihnen: hier bleibt einer strengeren Wissenschaft von heute noch etwas zu tun. Man kann dem Schüler sehr wohl klarmachen, daß mathematische Strenge ein relativer Begriff ist, daß die Strenge von gestern nicht die Strenge von heute ist, und daß die Strenge von morgen wieder eine andere sein wird.

Übrigens haben wir in der vielerörterten, von F. Klein zuerst entwickelten Theorie der Schmiegungsparabeln[2] einen willkommenen Weg, rein anschaulich zu zeigen, daß die Potenzreihen in der Tat das leisten, was sie sollen, nämlich eine Annäherung an die wirklichen Werte innerhalb eines bestimmten Bereiches. Ich halte diese Methode für sehr wertvoll; freilich liegt ihre Bedeutung nicht darin, daß mit einem großen Zeitaufwand bis zur soundsovielsten Schmiegungsparabel eine sorgfältige Zeichnung für jede der in Frage kommenden Funktionen entworfen wird; erst recht nicht darin, daß sie, was selbstverständlich falsch ist, den Beweis der Konvergenz ersetzen. Viel wichtiger ist das Grundsätzliche: Man sieht in geometrischem Gewande die Bedeutung der Annäherung durch Polynome, überblickt den Grad der Konvergenz an den verschiedenen Stellen der Funktion, kann schließlich die Grenzen des Konvergenzbereiches erkennen.

Neuerdings scheint sich die Zahl der Anstalten zu mehren, die im Interesse einer strengeren Handhabung der Infinitesimalrechnung auf die Diskussion des Restgliedes nicht verzichten wollen. Es gibt bereits mehrere schulgemäße Darstellungen dieses Abschnittes der Infinitesimalrechnung[3] — eine solche findet sich auch schon

[1] F. Klein hat neulich eine sehr plausible Erklärung dafür gegeben: Weil sich die Universitätsmathematiker in ihrer Mehrzahl um die Planimetrie der Schule gar nicht kümmern, weil sie überhaupt erst bei der Infinitesimalrechnung Gelegenheit genommen haben, sich näher über die Schulmathematik zu orientieren, und da mit einmal bemerken, daß die ihnen heute gewohnte Strenge in der Schule nicht zu Hause ist.

[2] Vgl. W. Lorey, Über die Maclaurinsche und Taylorsche Entwicklung einer Funktion, ZmnU 39 (1908) S. 361ff. und R. Schimmack, Über die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen, ebenda 39 (1908) S. 513ff.

[3] Als Beispiele nenne ich: M. Diesing, Einführung in die Differentialrechnung und Anwendung derselben auf Maxima, Minima, unendliche Reihen und Quotienten in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, Programm Städtische Oberrealschule Halle a. S. 1912. — W. Freise, Behandlung der Reihen im Unterricht, Programm Kaiser-Wilhelm II.-Oberrealschule Göttingen 1913.

in den alten „Elementen" von Gallenkamp. Ich möchte besonders auf die geometrische Deutung hinweisen, die F. Klein dem Restglied in seiner vorletzten Vorlesung über Differential- und Integralrechnung gegeben hat — einer Vorlesung, die gerade für den Betrieb der Infinitesimalrechnung an höheren Schulen außerordentlich schätzenswerte Fingerzeige bot[1], leider aber bisher nicht veröffentlicht worden ist.

Die Anwendungen, die an die unendlichen Reihen anschließen, haben in erster Linie numerische Berechnungen von Funktionswerten zum Gegenstand. Darüber braucht weiter nichts gesagt zu werden. Eine über die Berücksichtigung der linearen Glieder hinausgehende Ausnutzung zur Inter- oder Extrapolation findet im allgemeinen nicht statt. Von anderen Anwendungen kommen dann einige Probleme in Betracht, die einen Einblick in das Reich des Imaginären gestatten. Den Hinweis auf die „Zauberformel", die Schellbach sogar gern den Gymnasien zugebilligt hätte, wird sich kaum jemand entgehen lassen. Man halte sich aber immer vor Augen, daß man sich dabei einer gefährlichen, möglicherweise durch Fehler bestrafbaren Grenzüberschreitung schuldig macht: Es handelt sich bei dem Funktionsbegriff der Schule, in der ganzen Analysis, nur um reelle Funktionen reeller Variablen. Es müßte sehr genau untersucht werden, ob man überhaupt komplexe Variable zulassen darf, denn beispielsweise der Konvergenzbegriff der Reihen ist da doch durchaus nicht erörtert. Man würde einen Abstecher in die Theorie der Funktionen komplexer Veränderlicher machen, ohne sich mit deren grundlegenden Sätzen beschäftigt zu haben. Ob man neben $\cos x + i \sin x = e^{ix}$ auch die Formel $x = \frac{2}{i} \log \text{nat } i$, setzt, wie Schellbach wollte[2], erscheint mir sehr fraglich. Meines Erachtens genügt der Ausblick, den die erste Formel gibt, vollständig, sei es nun, daß man sich damit begnügt, dem Moivreschen Theorem eine neue Fassung zu geben, sei es, daß man bis zu den hyperbolischen Funktionen vordringt.

Man hat damit eine letzte Gelegenheit, das Permanenzprinzip auf den Begriff der Potenz anzuwenden. Vorsicht ist aber gerade hier am Platz. Man verfalle nicht in den häufig gemachten Fehler, in der beiderseitigen Potenzierung der Formel für e^{ix} einen neuen Beweis für das Moivresche Theorem zu sehen. Denn daß man die durch eine Reihe definierte Potenz mit imaginären Exponenten in derselben Weise potenzieren darf, wie eine Potenz mit reellem Exponenten, muß doch erst bewiesen werden. Man kann natürlich an den Reihen selbst zeigen, daß die Potenzgesetze auch für die neudefinierten Potenzen mit imaginären Exponenten gelten. Und wenn man das tatsächlich getan hat, so hat man auch einen neuen Beweis für das Moivresche Theorem. Meist geschieht das aber nicht; vielmehr wird die Ausdehnbarkeit der Potenzgesetze umgekehrt durch Heranziehung des früher schon bewiesenen Moivreschen Theorems zu zeigen sein.

Zum Schluß noch eine Bemerkung zur Definition der transzendenten Funktionen, um die es sich hier immer wieder handelt. In der wissenschaftlichen Mathematik

[1] Vgl. darüber W. Lorey, Zur geometrischen Veranschaulichung des Taylorschen Lehrsatzes und ähnlicher Annäherungsformeln, ZmnU **43** (1912) S. 544ff.

[2] K. H. Schellbach, Über die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien, Berlin (Reimer) 1887.

hat man es vielfach vorgezogen, die Funktionen von vornherein durch ihre Reihen zu definieren. Wir können das in der Schule bei den trigonometrischen Funktionen nicht nachmachen, denn wir brauchen sie schon viel früher in der Geometrie. Außerdem aber kann uns an einer derartigen Arithmetisierung von Dingen, die für uns in erster Linie geometrische Bedeutung haben, nicht gelegen sein.

Anders liegt die Frage hinsichtlich der Exponentialfunktion, mit anderen Worten mit der Definition von e. Es ist sehr wohl zu erwägen, ob man nicht hier von der Reihendefinition ausgeht. Dadurch werden jedenfalls die Schwierigkeiten aus der Welt geschafft, die sich für die Schule in dem Auftreten eines sonst für sie nie wiederkehrenden unendlichen Produktes ergeben. Denn daran, daß wir etwa neben den unendlichen Reihen auch die unendlichen Produkte in den Kreis der Unterrichtsstoffe aufnehmen, wird wohl zurzeit niemand denken.

17. Integralrechnung.

Während sich die höheren Lehranstalten, in erster Reihe die Realgymnasien und Oberrealschulen, nachdem einmal die Bahn zur Infinitesimalrechnung freigegeben, mit großer Einmütigkeit der Differentialrechnung angenommen haben, verhalten sie sich bei der Integralrechnung noch heute vielfach abwartend. Der Hochschulmathematiker, dem Differentialrechnung und Integralrechnung miteinander eine Einheit bilden, steht dieser Zurückhaltung etwas erstaunt gegenüber.

Man muß sich fragen, welches der Grund für diese Ablehnung der Integralrechnung ist. Ende 1910 hatte eine Rundfrage bei 30 Oberrealschulen das Ergebnis, daß 29 von ihnen Differentialrechnung trieben, aber nur 20 auch Integralrechnung[1]; für die Gymnasien würde der Unterschied wahrscheinlich noch stärker sein. Man muß sich, wenn man ein solches Verhalten verstehen will, klar machen, daß bei uns die Einfügung der Infinitesimalrechnung mehr eine Frage der Methode als des Stoffes gewesen ist. Man wollte den Stoff, den die Lehrpläne schon seit langem vorschreiben, also Dinge wie die Lehre von den Maximis und Minimis, die Newtonsche Näherungsmethode, die Tangentengleichungen der auftretenden Kurven, die Lehre von den unendlichen Reihen usf., einwandfreier und sachlich einfacher behandeln. Dazu brauchte man die Differentialrechnung.

Geht man nun aber den bisherigen Stoff der Lehrpläne durch, um in gleicher Weise Gebiete zu finden, die durch die Einfügung der Integralrechnung entlastet werden, so hält man keine so reiche Ernte. Flächenlehre und Körperlehre, beides Anwendungsgebiete der Integralrechnung, werden schon in verhältnismäßig frühen Klassen erledigt: Wo der Grenzbegriff eine Rolle spielt, wie bei der Kreislehre und der Körperberechnung, hilft man sich mit archimedischen Mitteln und mit dem Grundsatz des Cavalieri und befindet sich offenbar sehr wohl dabei. Nur wenn die analytische Geometrie der Kegelschnitte bis zur Flächenberechnung vorschreitet, werden die Dinge etwas unbequem, man kommt aber auch hier zur Not mit „elementaren" Überlegungen aus.

Etwas günstiger liegen die Dinge, wenn man auch an den Lehrstoff der Physik denkt. Dieses Fach braucht in genau dem gleichen Umfange wie die Differential-

[1] Vgl. den Bericht über die Versammlung der Oberrealschuldirektoren am 4. und 5. Februar 1911 in Berlin in der Zeitschrift für lateinlose höhere Schulen 22 (1911) S. 289ff.

rechnung auch die Integralrechnung. Das Verständnis von Arbeitsbegriff, Trägheitsmoment, Schwerpunkt, Potential, um nur einige Stichworte aus der Mechanik zu nennen, fordert gebieterisch die Methoden der Integralrechnung.

Sicherlich darf die höhere Schule nicht bei der Differentialrechnung stehen bleiben. Auch vom Standpunkte der reinen Mathematik aus, ganz unabhängig von dem Komplex der Anwendungen, ist es notwendig, daß der Begriff der Fläche, des Volumens eine Vertiefung erfährt. Auch die Gymnasien dürfen an den Grundgedanken der Integralrechnung nicht vorübergehen, selbst wenn sie mit dem eigentlichen Integrieren nur einen kleinen Anfang machen.

Die erste Frage, die uns entgegentritt, ist die: Wann sollen wir die Integralrechnung einführen? Vor der Differentialrechnung, gleichzeitig mit ihr oder nach ihr? Die Hochschule befolgt fast ausschließlich den dritten, nur in seltenen Fällen den zweiten Weg. Man mache sich aber klar, daß der natürliche Weg eigentlich der erste ist. Sir George Greenhill sagte mir einmal, als wir auf einem Spaziergange darüber sprachen: „Ja, man sieht doch hier im Walde auch nicht das Wachsen, sondern das, was gewachsen ist!" Recht betrachtet, beginnen wir ja in der Schule tatsächlich mit der Integralrechnung, wenn wir in der Obertertia Flächenlehre treiben. Zumal wer sich nicht mit den üblichen geradlinig begrenzten Figuren begnügt, sondern Näherungsmethoden zur Berechnung krummlinig begrenzter Flächen mit berücksichtigt, so wie wir es früher empfohlen haben, treibt recht eigentlich Integralrechnung, freilich ohne den Namen zu nennen: Es ist, um den Ausdruck des vorigen Abschnittes wieder zu gebrauchen, eine „anonyme" Integration. — Auf der Hauptversammlung des „Förderungsvereins" Pfingsten 1909 in Freiburg i. Br. ist Lüroth sehr lebhaft für eine Behandlung der Infinitesimalrechnung auf der Schule eingetreten, die mit der Integralrechnung beginnt. Und ebenso hat Runge auf dem Göttinger Ferienkurs zu Ostern 1912 diesen Weg empfohlen.[1] Bis heute liegt aber noch keine Veröffentlichung vor, die über praktische Erfahrungen mit diesem Wege in unseren höheren Schulen berichtet.

Anders liegt es mit dem zweiten Vorschlag, Differential- und Integralrechnung nebeneinander zu treiben. Schon ein praktischer Grund fällt hier in die Wagschale. Wie wir hörten, läßt es die Rücksicht auf die Physik geboten erscheinen, an den Realanstalten die Differentiation der rationalen ganzen Funktion und der Sinusfunktion schon nach Obersekunda zu verlegen, damit die Mechanik diese Dinge verwenden kann. Der Physik liegt nun ebensoviel auch an der Integration dieser beiden Funktionen. Danach dürfte es sich empfehlen, beides, Differentiation und Integration der rationalen ganzen Funktion und der Sinus- bzw. Kosinusfunktion, schon in Obersekunda zu erledigen, ehe man sich in der Prima anderen Funktionen zuwendet und damit auch weitergehenden Methoden. Damit ist ein gewisses Nebeneinander von Differentiation und Integration von selbst gegeben.

Das Integral tritt in zwei Formen auf, wenn dieser Ausdruck erlaubt ist. Einmal als Grenze einer Summe, geometrisch gesprochen als Flächeninhalt, als bestimmtes

[1] Vgl. Dankworth, 18. Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts in Freiburg i. Br., ZmnU **40** (1909) S. 576; und H. Weinreich, Mathematische Vorträge und Diskussionen auf dem Osterferienkursus Göttingen 1912, ebenda **43** (1912) S. 343ff.

Integral, das andere Mal als primitive Funktion, definiert durch Umkehrung der Differentiation, als unbestimmtes Integral. Man braucht, wenn man überhaupt etwas mit der Integralrechnung anfangen will, beides. Zwei Wege stehen offen, entweder man wählt die eine Definition und leitet daraus die andere Bedeutung des Integrals ab, oder aber, man führt beide Definitionen nebeneinander ein und beweist dann nachher, daß beide auf das Gleiche hinauslaufen. Der zuerst genannte Weg wird tatsächlich wohl überall eingeschlagen. Ich verstehe nicht recht, aus welchem Grunde er bei einer Diskussion über diese Fragen auf dem schon erwähnten Ferienkurs in Göttingen 1912 von einigen Schulmännern abgelehnt worden ist.

Jetzt ist die nächste Frage: Womit beginnt man, mit der Definition als primitive Funktion, oder mit derjenigen als Grenzfall einer Summe? Das ist nun in der Tat ein außerordentlich strittiger Punkt. Es liegt sehr nahe, vom Flächeninhalt auszugehen, da der ja den Schülern bereits begrifflich vollständig bekannt ist. Wenn man jetzt die Summe ansetzt und sie für die wichtigsten Funktionen auswertet, um dann zur Grenze überzugehen, dann wird der Schüler geradezu induktiv dazu geführt, in der Integration die Umkehrung der Differentiation zu erkennen. Denn bei seinen Integrationen sieht er Funktionen, deren Differentialquotienten die Integranden sind. Wenn man nun aber bei der Durchführung dieses methodisch gewiß ausgezeichneten Gedankens verweilt, etwa in der schönen Programmarbeit von Lony[1], so sieht man, was für ein entsetzlich umständliches Formelmaterial dazu nötig ist. Gewiß, bei der Integration der Funktion $y = x^2$ kommt man mit der meist schon im Anschluß an die arithmetischen Reihen abgeleiteten Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen aus. Aber schon wenn man die Herleitung auf die Funktion $y = x^n$ verallgemeinert, werden eigens für diese Zwecke abzuleitende Formeln nötig, es sei denn, daß vorher die arithmetischen Reihen höherer Ordnung behandelt worden sind. Noch schlimmer wird es dann bei den trigonometrischen und den anderen Funktionen. Ich meine, die Durchführung des an sich gewiß guten methodischen Gedankens wird zu teuer erkauft.

Ich halte deswegen trotz allem für den gangbarsten, weil bequemsten Weg den, erst das unbestimmte Integral zu definieren. Freilich kommt man nicht darum herum, in größerer Anzahl zunächst rein formale Übungen im Integrieren folgen zu lassen. Es genügt fürs erste, sich ganz auf die Funktionen zu beschränken, die die Differentialrechnung uns ohne weiteres bietet.

Man wende nicht ein, daß hier die geometrische Veranschaulichung entbehrt werden muß. Wenn man schon früher zu einer Kurve das Bild der ersten, der zweiten Ableitung gezeichnet hat — schon mit Rücksicht auf die Beziehung der Nullstellen der einen zu den ausgezeichneten Werten der anderen —, so liegt die Umkehrung des Problems nicht sehr fern. Bemerkenswert ist hier auch die geometrische Bedeutung der Integrationskonstante.

Nach der Einführung des bestimmten Integrals wird dann das alte Flächenproblem hervorgeholt. Es wird die Schwierigkeit der wirklichen Ausführung des Grenzwertes der Summe an dem einfachsten Falle der Funktionen $y = x$ und

[1] G. Lony, Einführung in die Integralrechnung im Schulunterricht, Oberrealschule vor dem Holstentore Hamburg, Ostern 1912. — Freise verfährt in seiner S. 345 Anm. 3 genannten Programmabhandlung ähnlich; er knüpft an früher entwickelte endliche Reihen an.

$y = x^2$ gezeigt und dann gleich der Hauptsatz abgeleitet, daß für den Flächeninhalt $F(x)$ einer Kurve $f(x)$, der als Funktion der begrenzenden Ordinate aufgefaßt wird, die Beziehung $f(x) = F'(x)$ gilt. Das wird geometrisch leicht abgeleitet, wenn man erst von den Differenzen ausgeht und danach zum Differentialquotienten übergeht. Ich bemerke noch, daß den Schülern die Auffassung des Flächeninhaltes als Funktion der einen variablen Begrenzungsordinate manchmal etwas schwer fällt.

Manche Schulmänner sind der Meinung, daß die Schüler an der Leibnizschen Schreibweise des Integrals dann Anstoß nehmen, wenn sie vorher das Differential nicht kennen gelernt haben, vielmehr nur den Differentialquotienten — sie begründen damit geradezu ihre Einführung der Differentiale in den Schulunterricht. Gewiß sollte hier beim Integral ähnlich wie früher beim Differentialquotienten, der als Grenzwert des Differenzenquotienten eingeführt wurde, ausdrücklich gesagt werden, daß es sich nicht um eine „Summe unendlich vieler, unendlich kleiner Summanden" handelt, sondern wieder um einen Grenzwert. Selbst wenn man die Differentiale eingeführt hat, kommt man um die Definition des Integrals als Grenzwert nicht herum.

Was versteht man denn unter den Differentialen? Es sei $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$, dx eine kleine, endliche Größe, dann setzt man $dy = f'(x)\,dx$. Hierin heißen dx und dy Differentiale. dx ist nichts anderes als unser früheres $\triangle x$, dy aber etwas anderes als unser früheres $\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x)$. Wenn ich in einem Punkte an die Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ die Tangente lege, dann wird das Dreieck, dessen Katheten die Differenzen $\triangle x$ und $\triangle y$ sind, durch den Berührungspunkt und einen zweiten Punkt der Kurve, das Dreieck, dessen Katheten die Differentiale dx und dy sind, durch den Berührungspunkt und einen zweiten Punkt der Tangente bestimmt. Übrigens muß ich die Tangente — und entsprechend analytisch gesprochen den Differentialquotienten — schon haben, um die Differentiale einzuführen.[1] Nun ist gewiß der Übergang von $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ zu $y = \int f'(x)\,dx$, was die Schreibweise anlangt, schwieriger als von $dy = f'(x)\,dx$ zu $y = \int dy = \int f'(x)\,dx$. Aber um den Grenzübergang komme ich auch im zweiten Falle nicht herum; mit den endlichen Differentialen dx und dy gelangt man nicht früher und nicht später zum Ziel als mit den Differenzen $\triangle x$ und $\triangle y$.

In welchem Umfange ist nun die Integralrechnung an den höheren Schulen zu treiben? Das wird natürlich ganz von der zur Verfügung stehenden Zeit abhängen. Ich sagte schon oben, daß auch das Gymnasium nicht ganz auf die Integralrechnung verzichten sollte. Hat es in der Differentialrechnung sich mit der Funktion $y = x^n$ und den trigonometrischen Funktionen beschäftigt, so kann es das in entsprechendem Umfange auch bei der Integralrechnung tun. In den Realanstalten wird man natürlich auch die Kenntnis der Differentialquotienten der anderen Funktionen ausnützen. Ob man neben der rationalen ganzen auch systematisch die rational-

[1] Die strenge Einführung des Differentialbegriffes ist mir aus der Schulbuchliteratur nicht bekannt. Doch wird sie an manchen Schulen — ich kenne Fälle aus Norddeutschland und Süddeutschland — wie man mir sagt, mit Erfolg vorgenommen.

gebrochene Funktion integriert, wird zu erwägen sein; wenn ja, tut man gut, der Zerlegung rational-gebrochener Funktionen in Partialbrüche schon zu geeigneter Zeit vorzuarbeiten. Auf die sogenannte partielle Integration und die Integration durch Substitution einzugehen, erscheint mir nur angängig, wenn wirklich genügend Zeit zur Verfügung steht.

Was nun die Anwendungen anlangt, so mag zuerst die Frage beantwortet werden, wie man sich zu den „elementaren" Integrationen zu stellen hat, insbesondere zu der Ableitung der Formeln für die Flächen und einfachen Körper. Daran, daß man etwa die Kreisberechnung aufspart, bis die Integralrechnung zur Stelle ist, wird wohl niemand denken. Anders mit den stereometrischen Berechnungen. Soll man nicht vielleicht das Cavalierische Prinzip ganz streichen und die Stereometrie erst in Angriff nehmen, wenn die Hilfsmittel der Integralrechnung zu Gebote stehen? Ich glaube, das scheitert daran, daß doch die mit der Obersekundareife von unseren höheren Schulen abgehenden Schüler, und sie bilden an Realanstalten ein großes Kontingent, wenigstens einen Einblick in die praktisch wichtigen Körperberechnungen gewinnen müssen. Nach allem glaube ich, daß sich an der bisherigen Behandlungsweise der Stereometrie wenig ändern wird. Aber das freilich ist zu verlangen, daß beim Cavalierischen Satz schon auf den später wiederholten Grenzprozeß hingearbeitet wird, wie man denn überhaupt schon in den Mittelklassen Rücksicht darauf nehmen sollte, daß später einmal — anders als früher, wo die Infinitesimalrechnung fehlte — der Grenzbegriff eine entscheidende Rolle spielen wird. Umgekehrt wird später im Anschluß an die Integralrechnung eine Revision der elementaren Integrationsmethoden einzusetzen haben, wie sie bei der Kreisrechnung, bei dem Cavalierischen Prinzip usf. angewandt worden sind. Man wird auch von den mechanischen Quadraturen zu sprechen haben. Ob man dabei auch den Planimter[1] erwähnt, mag dahingestellt bleiben.

Nun zu den eigentlichen Anwendungen der Integralrechnung, denjenigen, die nicht bloß neues Licht auf schon Bekanntes werfen, sondern bisher unzugängliches Gebiet erschließen. Da ist natürlich in erster Linie die Quadratur der Kurven zu nennen. Daß man bei der Quadratur der Parabeln $y = x^n$ auf rationale Werte kommt, — im Gegensatz zum Kreise — daß ein Gleiches sogar bei der Sinuskurve der Fall ist, wird nie verfehlen, das besondere Interesse der Schüler zu erregen. — Man wird mit Hilfe der Sinuskurve jetzt auch den Mantel eines schräg abgeschnittenen Kreiszylinders auswerten.

An die Quadratur der Kegelschnitte knüpft ein bereits früher (S. 240) erwähnter Vorschlag Kleins zur Definition des Logarithmus an. F. Klein hat zur Diskussion gestellt, ob man nicht auf den höheren Schulen den Logarithmus durch den Flächeninhalt der Hyperbel definieren sollte. Ich habe schon oben, als ich diese Anregung berührte, auseinandergesetzt, welche Schwierigkeiten ihrer Durchführung rein lehrplanmäßig entgegenstehen. Ich habe aber an der gleichen Stelle auch schon

[1] Eine elementare Darstellung des Apparates findet sich z. B. bei Neuendorff, Praktische Mathematik I (Aus Natur und Geisteswelt), Leipzig (Teubner) 1911. Ausführlich behandelt die Planimeter A. Galle, Mathematische Instrumente, Leipzig (Teubner) 1912. Die Herstellung eines Planimeters durch Schüler beschreibt K. Giebel, Das Stangenplanimeter, ZmnU 48 (1917) S. 177ff.

auf einige neuere Arbeiten hingewiesen, die den Kleinschen Vorschlag aufgenommen haben. Man kann an ihrer Hand sehr zweckmäßig in eine erneute Diskussion des Logarithmus in Prima eintreten.

Auf die Rektifikation ebener Kurven kann man nur in geringem Maße eingehen. Man stößt ja schon in so einfachen Fällen wie bei der Ellipse auf Schwierigkeiten, denen die Schule nicht gewachsen ist.

Um so mehr wird man die Kubatur von Rotationskörpern behandeln. Dieses Kapitel ist in der Tat außerordentlich reizvoll, und man wird es sich nicht entgehen lassen, hier, z. B. bei der Kugel, die elegante moderne Integrationsmethode dem umständlichen archimedischen Verfahren gegenüberzustellen. Die Schwierigkeiten, die durch die imaginären Teile der Kurve hineinkommen, werden berührt werden müssen, da die Schüler leicht von selbst darauf verfallen; man betrachte z. B. beim Kreis das Integral $\pi \int_1^2 (1 - x^2) dx$. Auf mehrfache Integrale einzugehen, verbietet sich von selbst.

Schließlich muß noch der zahlreichen Anwendungen aus der Physik gedacht werden. Wir sagten ja schon oben, daß Begriffe wie Arbeit, Schwerpunkt, Trägheitsmoment überhaupt erst verständlich werden, wenn man den Integralbegriff zur Verfügung hat.[1] Anwendungen lassen sich zahlreich in der Mechanik, aber auch in der Optik und der Elektrizitätslehre finden. Es ist das eine der vielen Stellen, wo Mathematiker und Physiker in einer Richtung arbeiten können (vgl. den 3. Teilband).

Noch ein Wort dazu, ob man nun auch Differentialgleichungen in den Bereich der Schulmathematik ziehen soll.[2] Man muß sich darüber klar sein, daß gewisse Eigenschaften der Funktionen, die sich am besten in Form einer Differentialgleichung ausdrücken lassen, also etwa durch

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ky,$$

ganz offenbar zur Sprache kommen werden. In der Physik werden auch nicht selten, so z. B. bei der Pendelbewegung, die Differentialgleichungen das Primäre, die ihnen genügenden Funktionen das Sekundäre sein. Darüber aber irgendwie hinauszugehen, halte ich nicht für Sache der Schule.

[1] Vgl. E. Rehfeld, Ein Beitrag zur schulgemäßen Behandlung der Trägheitsmomente ZmnU 50 (1919) S. 294ff.

[2] Als eine leichtverständliche, aber weit über den Rahmen der Schule hinausgehende Einführung nenne ich M. Lindow, Differentialgleichungen (Aus Natur und Geisteswelt 589) Leipzig (Teubner) 1921.

Autorenverzeichnis.

Adam, W. 1.
Adler, A. 133, 164.
Andrade 160.
Apian 42.
Apollonius 186, 187, 188, 189, 192, 193, 202.
Apt 134.
Archimedes 12, 114, 144, 145, 146, 152, 224, 241, 274.
Aristoteles 84.
Atmanspacher, C. 5.
Auerbach, F. 242, 279.

Baltzer, R. 31, 177.
Bardey, E. 140, 212, 217, 241, 242, 246, 253, 262, 269, 279, 284.
Baruch, A. 168.
Bassani, A. 116.
Beck, H. 308, 311, 316.
Beetz 11.
Behrendsen, O. 301, 320, 323
Beinhorn, H. 262.
Beke, E. 322.
Bensemann, H. 114.
Berkhan, G. 190.
Bernoulli 303, 341.
Bernstein, F. 67.
Bernstein, S. 67.
Bertrand 120.
Bessel 182.
Beutel, E. 145.
Beutel, T. 132.
Beyel, Chr. 168.
Bieberbach, L. 324.
Bitzius 2.
Blaschke, E. 254.
Blaschke, O. 146.
Blümel 159.
Bochow, K. 43, 249.
Bodenstedt 134, 186, 187.
Bögel, K. 331.
Böger, R., 177, 195, 196, 198. 201, 202, 203.
Bojko, J. 24.
Bolyai, W. 140.
Born 6.
Börner, H. 68.
Böttcher, J. E. 72, 162.
Bourlet, C. 87.
Brandes 142.
Brandenberger, C. 233.
Branford, B. 117.
Brenken, E. 16.
Bretschneider, C. A. 115.
Breuer 134.
Brianchon 188, 199, 200, 202, 203.
Brocard 189.
Brückner, M. 162.
Brües, M. 188, 196, 269.
Bruns, H. 254.
Bryk, O. J. 162.
Burali-Forti 207.
Burkhardt, H. 323.
de Burgo, Lucas 26.
Busch 130.
Busch, Wilhelm 94.
Busse 6, 7.
Büttner, A. 5.
Byrne, O. 128.

Cayley 200, 318.
Cajori, F. 120.
Cantor, G. 217, 233.
Cantor, M. 57.
Capelle, H. 182.
Carl, A. 250.
Cartesius 274, 277.
Castillon 189.
Cauchy 160, 329, 330, 332.
Cavalieri 154, 155, 162, 351.
Ceva 186, 187, 188, 189.
Czuber, E. 254, 324.

Dalwigk, F. v. 169.
Dandelin 192, 193, 194, 203.
Dankworth 348.
Dannemann, F. 12.
Dedekind 97, 233.
Dehn, M. 155, 317.
Dekker, P. 228.
Desargues 186, 187, 189, 200.
Descartes 314.
Detlefs 127.
Deutsch, H. 145.
Dieck, W. 25, 100, 102, 120, 182, 196.
Diehl, E. 200.
Diekmann, J. 68, 189, 262, 315.
Diesing, M. 345.
Diesterweg, A. 2.
Dietmann, W. 168, 312.
Dintzl, E. 233, 246.
Diophant 270.
Dölp 323.
Döring, M. 23.
Dörrie, H. 326.
Draeger, M. 189.
Dronke, J. 315.
Druxes, J. 306.
du Bois-Reymond 279, 308.
Dürer 137.
Düsing, K. 323.

Ebner, M. 128.
Eckhardt, E. 170.
Edler, 131.
Eggers, W. 168.

Eißner, K. 75.
Emmerich, A. 274.
Emsmann 277.
Engel, E. 67, 125.
Engel-Hardt, R. 148.
Enriques, F. 96, 133.
Epstein, P. 199.
Eratosthenes 30, 228.
Erler, W. 109.
Eudoxos 148.
Euklid 52, 71, 84, 85, 87, 88, 95, 96, 97, 101, 111, 114, 115, 118, 121, 122, 128, 133, 141, 147, 148, 160, 186, 187, 190, 192, 195, 197, 212, 224.
Euler 160, 161, 163, 171, 179, 181, 186, 207, 208, 228, 271, 274, 303, 317, 318.

Faifofer, A. 95, 96, 101.
Fano 316.
Färber, C. 208, 288.
Farey 229.
Fechner 257.
Fenkner, H. 111.
Fermat 270, 271, 302.
Fettweis, E. 228.
Ferrari 274.
Feuerbach 122, 186, 188.
Finke, W. 39, 147 227.
Fischer, E. 329.
Fischer, P. B. 56, 309.
Fischer-Benzon, R. von 138.
Flechsenhaar, A. 145, 230, 250, 295, 335.
Fleischer, H. 96, 133.
Förster, W. 13.
Fourier 286.
Fraenkel, A. 207.
Freise, W. 248, 345, 349.
Frege 86.
Frenzel, C. 135, 240.
Fresenius 123.
Freud, Ph. 172.
Frey, O. 128, 153.
Fricke, K. 307, 324.
— R. 339.
Fries 329.
Frischauf, J. 115.
Fuchs, L. 114.
Funck, C. F. B. 240.
Fürle, H. 305.

Galle, A. 227, 245, 351.
Gallenkamp, W. 199, 262, 321, 323, 342, 346.
Ganter, H. 307.
Gauß 103, 115, 119, 140, 179, 180, 182, 183, 235, 255, 271, 275.
Gazzaniga, P. 96.
Gennimatas, N. 174, 230.
Gergonne 189.
Gerlach, A. 5, 11, 16.
— Alfred 140, 203.
Geuther, N. 320.
Giebel, K. 128, 351.
Glauer, R. 174.
Godfrey 287.
Goldenring, R. 137.
Goldziher, K. 220, 249.
Goltsch 3.
Gotthelf, J. 2.
Götting, E. 301, 319, 320, 323, 339.
Gottschalk 122.
Graßmann, H. 84, 171, 207.
— R. 331.
Grebe 189.
Greenhill, George 164, 348.
Grelling 207.
Greve 245.
Grimsehl, E. 246.
Große, H. 1, 3.
— W. 305.
Groos, K. 6.
Großmann, M. 169.
Grothmann, H. 169.
Grube, A. W. 3.
Grunert 177.
Grünholz E. 269
Grüttner, A. 134.
Guldin 163.
Günther, S. 104.
— E. 194.
Güntsche, R. 174.
Gutzmer, A. 19.
Haag, F. 292.
Haase, H. 8, 9, 12.
Häbler, Th. 174.
Hack 304.
Haentzschel, E. 188.
Hagge, K. 134, 186.
Halsted, G. B. 94.
Handel, O. 323.
Hamilton 318.
Hammer, E. 143.
Hanck, P. 307.
Hankel, H. 196, 207.
Hansen 185.
Harnisch 2.
Harrison, J. 95.
Härtel, G. 194.
Hartmann, B. 5.
Hasenklever 156.
Haß, P. 144.
Hauck, A. 169.
— G. 168, 264.
Heath, Th. 12.
Heffter, L. 316.
Heegaard, P. 317.
Heiberg, J. L. 12, 192.
Heiden, von der 244.
Heilermann, H. 326.
Heine, H. 247.
Heinrich, M. 123, 187.
Heinze, K. 163.
Heis, E. 262.
Helmert, F. R. 254.
Helmes, J. 278, 279.
Helmholtz, H. von 87, 252.
Henrici, J. 148, 199, 200.
Hentschel, E. 2, 5.
Herbart 2, 63.
Hering 133.
Hermann 39.
Heron 143, 163, 266.
Hertz, H. 48.
Hesse 262, 310, 311.
Hessenberg, G. 177, 179, 207, 329.
Hilbert, D. 86, 96, 97, 101, 102, 153, 206, 255.
Hindenburg 251.
Hippokrates 146.
Hjelmslev, J. 80, 135, 147.
Hobbs 286.

Hoffmann, C. 14.
Hoffmann, J. C. V. 78, 114. 279.
Höfler, A. 32, 170, 246, 280, 309, 332.
Hölder, O. 106.
Holzmüller, G. 45, 68, 115, 271, 336.
Horaz 40.
Hovestadt, H. 118, 119, 135, 143, 155.
Hoyer, H. 113.
Humboldt, A. v. 143.
Hunger, R. 155.
Huygens 144.

Ingrami, G. 96.
Jacobsthal, W. 179.
Jänicke, E. 1.
Janisch, W. 174.
Jarosch, J. 164.
Jeurich, P. 262.
Junker, F. 323.

Kagan 155.
Kaiser 262.
Kambly, L. 98, 183.
Kasack 228.
Katz, D. 6, 116.
Keferstein, H. 196, 274.
Kehr, C. 1, 66.
Kempinsky, H. 5.
Kepler, J. 162.
Kerschensteiner, G. 110.
Kerst, B. 73, 138, 142.
Kiefer 253.
Killing, W. 118, 119, 135, 143, 155.
Klaeß, P. 240.
Klang 156.
Klein, F. 87, 102, 179, 200, 208, 240, 271, 303, 316, 317, 318, 319, 320, 322, 324, 330, 345, 346, 351, 352.
Kliem, F. 12.
Knilling, R. 7.
Knoblauch, J. 129.
Knoche, H. 3.
Knopf, O. 256.
Knopp, K. 340.
Knops, K. 315.
Knotta, A. 3, 67.
Kober, J. 84.
Koehler, C. 316.
Köhler, A. 118, 330.
Koepp 160.
Kokott, P. 288.
Költzsch, A. 2, 5.
Kommerell, K. 144.
König 114.
Koppe 189, 315.
Kowalewski, G. 324.
Krahl 228.
Kretschmer, E. 75.
Kreuschmer, R. 314.
Kroh, O. 77, 112.
Krumme, W. 111.
Kruse, K. 314.
Kühnel, J. 5.
Kullrich, E. 14, 49, 238.
Kummer, E. 39.

Lackemann, K. 124, 314, 315.
Lagrange 274.
Lambert 179.
Lampe, E. 274.
Lange, J. 188, 202.
Lanner, A. 188.
Laßwitz, K. 11, 252.
Lay, W. A. 6, 7.
Lazzeri, G. 116.
Leibniz 84, 321, 329, 331, 341.
Leimanis, A. 69.
Leman, A. 162, 229.
Lenhardt, Ch. 299.
Lenz, K. 227.
Leonardo da Vinci 146.
Lesser, O. 68, 180, 200, 202, 203, 262, 270, 323.
Lessing 114.
Lichtblau, W. 3, 67.
Lie, S. 87.
Lietzmann, W. 5, 12, 19, 23, 66, 68, 85, 87, 94, 95, 97, 108, 171, 207, 212, 228, 258, 270, 284, 299, 308, 318, 322, 323, 325.
Lill 300.
Lindow, B. 336, 352.
Lobatschefsky 102.
Löffler, E. 12.
Lohnstein, R. 137.
Long 241.
Lony, G. 349.
Lorey, W. 146, 252, 345, 346.
Loria, G. 12.
Löwe, E. 262.
Loewy, A. 206, 233, 339.
Lucke, F. 156, 163.
Lübsen, H. B. 120.
Luckey, P. 242, 306, 307.
Lühmann, F. v. 183.
Ludolph 145.
Lüroth, J. 26, 348.

Mac Laurin 345.
Maennchen, Ph. 136, 271.
Maertens, H. 5.
Mahler, G. 125.
Malfatti 188.
Mangold, H. v. 324.
Mansion 262.
Martin, P. 66.
Matthießen, L. 260, 274.
Mehler, F. G. 123.
Mehmke, R. 26.
Meißner, O. 254, 255.
Menelaus 186, 187, 188, 189.
Méray, E. 87, 115.
Meth, P. 313.
Meyer, E. 267, 270.
— Friedrich 206.
— Th. 229.
— W. Fr. 190.
Milankovitch, M. 249.
Milinowski, H. 195.
Minkowski, H. 292, 318.
Möbius, A. F. 142, 161, 179.
Mohrmann, G. 197, 217, 241.
— H. 302.
Moivre 177, 271, 346.
Molk, J. 246.
Mollweide 178.
Monge 186.
Müller, C. H. 154, 242, 244, 320, 321.

Müller, E. 164, 169.
— F. 243, 321.
— Heinr. 323.
— Hubert 199, 201, 323, 334.
— J. H. T. 115, 242, 320, 321.
— W. 125.
Musmacher, C. 68.
Müth, G. 68.

Nagel 189.
Nelson, L. 207.
Neper 179, 180.
Nernst, W. 323.
Netto, E. 259, 230, 275, 323.
Neuendorff, R. 351.
Newton 274, 328.
Niemöller, F. 228.
Nimführ, R. 284.
Nooelt, G. 73, 128.

d'Ocagne, M. 26, 307.
Ohmann 132.
Oughtred 21.
Overberg 11.
d'Ovidio, E. 95, 116.

Paolis, R. de 116.
Pahl, F. 1.
Papperitz, E. 169.
Pascal 186, 187, 188, 189, 199, 200, 202, 203.
Pasch, M. 98.
Paulsen, F. 2.
Paulus, Ch. 136.
Peano 206.
Perron, O. 232.
Peltzer, A. 137.
Perry 48, 95, 339.
Pestalozzi 2.
Petersen, J. 138.
Petronievics, B. 337.
Petzval 309.
Pfaff, H. 225, 315.
Pfau, J. 172.
Pickel, A. 67.
Pietzker, F. 100, 262, 269, 320.
Piltz, E. 78.
Pirano, v. 279.
Planudes, Maximus 263.
Poincaré, H. 85, 94.
Polya, G. 156.
Polygon 229.
Poncelet 200.
Porstmann, W. 11.
Pothenot 185.
Prandtl 60.
Presler, O. 154.
Prölls, O. 300.
Pugehl, F. 122.
Ptolemäus 177.

Quensen, K. 271, 272, 299.
Quetelet 203.

Räther, H. 5, 67.
Rehfeld, E. 352.
Reiff, R. 340.
Reichel, W. 141.
Reidt, F. 262.
Rein, R. 287.
Remag 317.
Reusch, J. 134.
Reuter, Fritz 28.
Richter, A. 329.
— M. 169.
Riecke, E. 319.
Rieder, K. 240.
Riemann 102.
Riese, Adam 28, 55, 56.
Ritthaler, A. 5.
Rogel, F. 24.
Rohn, K. 169.
Rohrbach, C. 242.
Rohrberg, A. 135, 245.
Römert, J. 142.
Rothe, R. 163.
Rotkähl 5.
Rottsieper, W. 249.
Rudio, F. 307.
Rudolphi, W. 168, 311, 312.
Runge, C. 300, 307, 348.
Ruska, J. 4, 11, 286.
Russel 207.

Salkowski, E. 188.
Sanden, H. von 227, 245.
Santer 188
Sannia, O. 95.
Saro 66.
Schacht, J. 117.
Schaffeitlin, P. 201, 202.
Schäffer, 132.
Scheffers, G. 169, 323, 324.
Schellbach, K. H. 243, 244, 321, 326, 346.
Schilling, F. 79, 179.
Schimmack, R. 115, 117, 230, 246, 249, 288, 333, 345.
Schips, M. 158.
Schlömilch, O. 122, 271, 342.
Schlotke, J. 169.
Schmehl, Ch. 167.
Schmidt, A. 241.
— O. 66.
Schmiedeberg 78.
Schmitz, B. 27.
Schnell, H. 394.
Schoenflies, A. 179, 323.
Schoenichen 249.
Schopenhauer 106, 109.
Schorer 317.
Schotten, H. 86, 93, 100.
Schoy, C. 140.
Schrader 315.
Schreber, K. 14.
Schreiber, E. 5.
— P. 305.
Schröder, R. 123, 323.
Schroeder, E. 207.
— J. 315.
Schröter, K. 326.
Schrutka, L. 245.
Schubert, H. 12, 205, 241, 246, 268.
Schülke, A. 10, 13, 14, 117, 174, 216, 238, 242, 243, 329.
Schulte-Tigges, A. 123, 193.
Schumacher 119.
Schuster, M. 124, 170, 174.
Schwab, K. 180, 262.
Schwarz 323.
— Ph. 304.
Schwenter 132, 212.
Schwering, K. 30, 100, 138, 210,
Seeger, H. 199, 320, 321, 323.

Serret, I. A. 324.
Sersawy 262.
Silcher, G. 316.
Simon, H. 136.
— Max 195, 208, 233, 246, 265, 274, 277.
Simpson 163, 274.
Smith, D. E. 4.
Spieker 189.
Staiger, E. 142.
Staudt, v. 91, 200.
Steckelberg, H. 188, 323.
Steiner, J. 133, 136, 200, 326.
Sterner, M. 1.
Steuer, W. 5, 10.
Stiehler, G. 169.
Stillcke 146.
Storm 37.
Stoy 170.
Studnicka 262.
Study, E. 112, 125, 179, 197.
Sturm, Ch. 277.
— R. 195, 326.
Süchting, F. 339.
Suppantschitsch, R. 100.
Swift 252.

Tanck, W. 7.
Tannery, J. 240, 246.
Taylor 345.
Tesar, L. 323.
Thaer, A. 98, 100, 102.
— C. 166, 318.
Theel 3.
Thibaut 99, 104, 105, 108, 118.
Thieme, H. 96, 97, 100, 160, 162, 189, 190.
Thijn, A. van 147.
Tillich 7, 8.
Timerding, H. E. 57, 67, 148, 193, 227, 272.
Toepler 284.
Treutlein, P. 1, 11, 39, 66, 76, 116, 143, 148, 199, 200.
Trier, V. 108, 258.
Tropfke, J. 1.

Unger, F. 1, 57.
Utescher, O. 16.

Vahlen, Th. 133.
Vaselli 233, 246.
Veldhuis, W. H. 182.
Veronese, G. 96, 116, 119.
Versluys, J. 179.
Vieta 26, 276.
Volk, K. G. 201.

Waring 341.
Weber, H. 179, 207, 208, 259, 271, 275.
Weber, W. 122, 148, 178.
Weierstraß, K. 106, 233.
Weinmeister, Ph. 145, 150, 195.
Weinreich, H. 117, 329, 348.
Weishaupt, H. 169.
Wellstein, J. 179, 208, 259, 271.
Wenck, J. 321.
Werkmeister, P. 26.
Wernicke, A. 233.
Wieleitner, H. 21, 181, 207, 219, 308, 314.
Wildbrett, A. 203.
Willers, H. 88, 123.
Wilk, E. 8, 67.
Wimmenauer, Th. 68.
Witting, A. 28, 49, 123, 136, 174, 273.
Wittstein, Th. 162, 228.
Wolff, Chr. v. 65, 83.
— 255.
— H. 137.

Young, G. C. 67, 73, 153.
— W. H. 67, 73, 153.

Zacharias, M. 148, 179, 196, 200.
Zander, O. 148.
Zeissig, E. 67.
Zeno 249.
Ziegler 269.
Ziller 3.
Zöllner 133.
Zühlke, P. 136, 164, 167, 196, 202, 246, 314, 322, 323.

Sachverzeichnis.

Abbildung 316 ff.
Abwickelbarkeit 163.
Abzählverse 5.
Abzählbarkeit 207.
Addition 13 ff., 40, 44, 209 ff., 219 ff.
Additionsmethode zur Lösung von Gleichungen 261.
Additionstheoreme der Trigonometrie 177, 178, 198.
Affinität 316, 317.
Ähnlichkeitslehre 80, 81, 147 ff., 170, 188, 189, 197, 198, 199.
Ähnlichkeitspunkte 186, 189.
Aktual-Unendlich 224, 329.
Algebra 205, 257 ff.
— Fundamentalsatz der — 275.
Algebraische Zahl 223, 276, 277.
Algorithmus, euklidischer 31, 229.
Analysis 137, 205, 278 ff.
— situs 161, 317.
Analytische Geometrie 307 ff.
— der Geraden und des Kreises 307 ff.
— der Kegelschnitte 300, 312 ff., 332.
— des Raumes 311.
Anamorphose 305.
Ankreis des Dreiecks 122.
Anschauer 6 ff.
Apollonische Kegelschnittlehre 192.
Appollonischer Kreis 188.
Apollonisches Berührungsproblem 186, 187, 188, 189.
Arbelos 139.
Archimedische Methode der Kreisberechnung 144.
Architektur 140, 193.
Arithmetik 204 ff.
Arithmetische Reihen erster Ordnung 247.
— höherer Ordnung 247, 248.
Assoziatives Gesetz 210.
Astroide 337.
Astronomie 185 ff., 313.
Asymptote 312, 332.
Aufgaben, algebraische — 20.
— angewandte — 56, 327.
— zur Anwendung der Begriffe 130 ff.
— Form der — 19.
— geometrische — 129 ff.
— stereometrische — 159, 160.
— trigonometrische — 182 ff.
Aufnahmeprüfung nach Sexta 9.
Ausdruck, arithmetischer 213, 214.
Ausdrucksweise, mathematische 71.
Axiome der Geometrie 93 ff., 159.
— der Arithmetik 206, 256.
Axonometrie 166.

Bamberger Rechenbuch 1.
Bedingungssatz 50.
Begriff, geometrischer 83 ff.
— abgeleiteter — 83 ff.
— Aufsuchen von geometrischen — 130 ff.
Benennungen 14, 32 ff.
Berechnungsaufgaben in der Geometrie 138, 160.
Beschäftigungsspiel 5 ff.
Beschreibung geometrischer Gebilde 84, 89.
Bestimmungsgleichungen 16, 214, 257 ff. 289 ff., 295 ff., 297 ff., 314.
Bewegungsaufgaben 266, 291.
Bewegungsbegriff 86, 89, 187, 197.
Beweis 99, 103 ff., 252.
Beweismittel 111.
Bezeichnungen in der Mathematik 14, 75.
Bilineal 136.
Binomialkoeffizient 253.
Binomischer Lehrsatz 251, 253, 342.
Biogenetisches Grundgesetz 117.
Biologie 158, 249, 256, 287.
Bleistift 74.
Blitzmethode 26.

Bogenmaß des Winkels 172, 175, 336.
Böschungswinkel 185.
Brinchon, Satz von — 188, 200 ff.
Bruch, gemeiner 38 ff., 222, 229.
— dezimaler — 45, 229.
Bruchansatz 50, 51.
Bruchgleichungen 259, 260, 266, 268.
Bruchrechenmaschine 39.
Bruchrechnung 29, 38 ff.
Brückenproblem 318.
Brunnenaufgaben 266.
Buchstabenbezeichnung 75, 217.

Cardanische Formel 272, 273, 274, 327.
Carnegie-Stiftung 4.
Cartesische Methode 274.
— Zeichenregel 277.
Castillonsche Aufgabe 189.
casus irreducibilis 272, 274, 327.
Cavalierischer Grundsatz 154, 155, 157, 351.
Ceva, Satz von 186, 187, 188, 189.
Chorda-Funktion 171.
Chordale 186, 189.

Dandelinsche Kugeln 192.
Dedekindscher Schnitt 233.
Definitionen 71, 76, 83 ff., 119, 191, 220, 252.
Desargues'scher Satz 187, 188, 189.
Determinanten 261 ff.
Determination 137.
Deutscher Ausschuß 19, 28, 35, 43, 171, 311.
Dezimalbruch 26, 34, 45 ff., 229, 250.
Dezimalzeichen 13.
Differential 335, 350.
Differentialgleichungen 352.
Differentialquotient 325 ff.
Differentialrechnung 175, 315, 319 ff.
Differenzenquotient 290, 325 ff.
Dimension 20, 85, 158.
Diophantische Gleichungen 262, 270, 292.
Diskontrechnung 62 ff.
Diskriminante 272.
Division 20 ff., 27 ff., 49, 211, 220.
Dodekaeder 68, 318.
Doppelverhältnis 200, 317.
Drehung 125.
Dreieck, ebenes 69, 75, 121 ff., 178 ff., 311 ff.
— sphärisches 179 ff.
Dreiecksberechnung 183 ff.
Dreiecksgeometrie, neuere 189, 190.
Dreieckskonstruktionen 80, 82, 183.
Duale Verwandtschaft 198.
Durchdringungen 166.
Durchschnittsrechnung 57, 59.

Ebene im Raum 158, 159, 160.
Ecke 160, 180.
Eichmaße 77.
Eingekleidete Aufgaben 19, 54, 56, 212, 263 ff.
Einmaleins 23 ff.
— umgekehrtes 30.
Ellipse 69, 154, 190 ff., 309, 312 ff.
Ellipsenzirkel 191.
Endlichgleichheit 155.
Entfernungsmessung 185.
Enthaltensein 21.
Erdkunde 149, 185.
Ergänzungsgleichheit 142.
Eulersche Gerade 186.
Eulerscher Satz 160 ff., 318.
Existenzbeweis 90.
Experimentiermappe, mathematische 73, 128.
Exponent 225 ff.
Exponentialfunktion 302 ff., 338, 342, 347.
Exponentialgleichungen 259.
Exponentialkurve 226, 248, 275, 296, 302 ff.
Extrapolation 328.

Faktorenzerlegung 31.
Fakultätszeichen 253.
Faltaufgaben 136.
Farey-Reihen 229.
Faß 68, 156.
Faustwinkel 79.
Fechnersches Gesetz 257.
Fehlerkurve, Gaußsche 255.
Feldmessung 149, 185.
Fermatscher Satz 270 ff., 229, 302.
Ferrari-Simpsonsche Methode 274.
Feuerbachscher Kreis 186, 188, 189.
Figur, Begriff 88.
— Buchstabenbezeichnung der — 128.
— Änderung der Elemente einer — 126.
Fingerrechnen 25.
Fläche mit Vorzeichen 221.
— allgemeiner Begriff 140 ff.
— Ausmessen 143.

Fläche, Berechnungen 81, 140 ff., 315, 350.
Flächengrößen 79.
Flächenlehre 23, 36, 140 ff., 221, 349 ff.
Flächenmaße 33, 35, 79.
Flächenmodelle von Körpern 73, 153.
Flächennetz 153.
Fluchtentafel 305.
Formel 23.
Fouriersche Reihen 341.
Fragesatz 50.
Fragezeichenrechnung 16.
Fundamentalkonstruktionen 82, 123, 310 ff.
Funktion 225, 278 ff.
— algebraische — 300 ff., 331 ff.
— dritten Grades 300, 326.
— empirische — 281 ff., 332.
— graphische Darstellung der — 281 ff.
— hyperbolische — 346.
— lineare — 221, 260, 261, 288 ff.
— logarithmische — 241, 302 ff., 337 ff., 341.
— rationale ganze — 324 ff.
— rational gebrochene — 299, 331 ff.
— transzendente — 175, 304, 336 ff., 417.
— trigonometrische — 170 ff., 258, 281, 336 ff., 341.
— vierten Grades 327.
— zahlentheoretische 229.
— zweiten Grades 298, 325.
— zyklometrische 337.
— $y = x^n$ 225, 294.
Funktionalgleichung 258.
Funktionsanzeiger 176.
Funktionsbegriff 260, 278 ff.
Funktionskurve 176.
Fusion von darstellender und analytischer Geometrie 168, 311.
— von räumlicher und ebener Geometrie 66, 115 ff., 146.
— von synthetischer und analytischer Geometrie 202, 315.

Galgenmethode 32.
Gaußsche Ebene 235.
— Fehlerkurve 255.
— Formeln 180.
Gedankengeometrie 160.
Geländedarstellung 163.
Geldverkehr 61 ff.
Gelenkmechanismen 302.
Genetische Methode 111.
Geodäsie, niedere 185.
Geographie 185.
Geometrie 36, 65 ff., 221, 265.
— affine 316, 317.
— algebraische — 149, 150, 301.
— analytische — 168, 182, 183, 189, 262, 288, 307 ff.
— darstellende — 163 ff., 202, 203, 311.
— der Lage 195, 199 ff.
— metrische 316.
— neuere — 186 ff.
— nichteuklidische — 102, 318.
— projektive — 195, 199 ff., 317.
— Propädeutik der — 65 ff.
— rationale — 85.
— Riemannsche — 102.
— synthetische — 190 ff., 197, 315.
— vierdimensionale 318.
Geometrische Gebilde, Betrachtung der — 68.
— — Beschreibung der — 68 ff.
— — Darstellung der — 72 ff.
— — Messen der — 77 ff.
— — Schätzen — 77 ff.
— — zeichnerische und rechnerische Bestimmung der — 81 ff.
Geometrischer Ort 289.
Geometrographie 134, 184.
Gerade 71, 118.
— Gleichung der — 289.
— im Raum 158 ff.
— unendlich ferne — 198.
Geschlecht von Körpern 163.
Gesellschaftsrechnung 57, 59, 60.
Gewichte 33, 36.
Gewinnrechnung 58.
Gleichheitszeichen 14 ff., 49, 213, 257, 258.
Gleichsetzungsmethode 261.
Gleichungen 16, 257 ff.
— allgemeine Theorie der — 275 ff.
— arithmetische Lösung linearer — 261, 292.
— arithmetische Lösung der quadratischen — 269.
— Benennungen in den — 267, 268.
— diophantische — 262, 270, 292, 301.
— eingekleidete — 263 ff.
— ersten Grades 260 ff.
— goniometrische — 182 ff.

Gleichungen, goniometrische Lösung der quadratischen — 269.
— graphische Lösung einer — 290.
— graphische Lösung biquadratischer — 313, 327.
— graphische Lösung kubischer — 300, 327.
— graphische Lösung linearer — 291.
— graphische Lösung der quadratischen — 269, 295, 298 ff.
— höheren Grades 271 ff.
— identische — 214, 257.
— komplexe Wurzeln einer — 299.
— konstruktive Lösung der quadratischen — 269.
— kubische 271 ff., 314.
— numerische Lösung der — 274, 328.
— quadratische — 235, 268 ff., 295, 298 ff.
— quadratische — mit zwei Unbekannten 269, 300 ff., 313, 325.
— Rechenoperationen mit — 258, 259.
— reziproke — 269.
— schwierige quadratische — 268.
— Unbekannte einer — 289, 314.
— vierten Grades 274, 313.
Gleichungslehre 60, 257 ff.
Goldener Schnitt 148, 161, 172.
Goniometrie 176 ff.
Gradmaß 175, 336.
Graphische Darstellungen 150, 173, 221, 225, 232, 241, 242, 248, 249, 250, 261, 269, 271, 275, 278 ff.
Grenzbegriff 85, 224, 249, 325, 350.
Grenzgleichheit 155.
Größe 15.
Grundbegriffe in der Geometrie 71, 83 ff.
Grundkonstruktionen 82, 160.
Grundrechenarten mit gebrochenen Zahlen 215 ff.
— mit natürlichen Zahlen 208 ff.
— mit relativen Zahlen 215 ff.
Grundriß-Aufrißverfahren 166 ff.
Grundsätze 83, 93 ff.
Grundschule: Richtlinien 10.
Gruppenbegriff 87, 207.
Gruppentheorie 207.
Guldinsche Regel 163.

Halbwinkelsätze 178.
Hansensches Problem 185.
Harmonisches Ebenenbüschel 186.
Harmonische Gebilde 186 ff.
Harmonische Punktreihe 186, 188.
Harmonisches Strahlenbüschel 186.
Herbart-Zillersche Schule 3.
Heronische Dreiecksformel 122, 138.
Hessesche Normalform 310, 311.
Himmelskunde 185.
Höhenmessung 140, 149.
Hyperbel 150, 190 ff., 296, 299, 300, 301, 305, 312 ff.

Ikosaeder 68, 162.
Imaginäre Größen 318, 343, 346.
— Einheit 235.
Indirekte Beweise 113 ff.
Induktion, vollständige 252.
Infinitesimalrechnung 193, 246, 248, 312, 319 ff.
Inhaltsberechnungen 81.
Inkommensurabel 148.
Inkreis des Dreiecks 122.
Inrechnung 21.
Integral, bestimmtes — 248, 349.
— unbestimmtes — 349.
Integralrechnung 154, 155, 163, 248, 315, 347 ff.
Integration 347 ff.
— partielle — 351.
— durch Substitution 351.
Integrationskonstante 349.
Interpolation 244, 291, 297, 304.
Invarianten 207, 316 ff.
Irrationalitäten, algebraische 233, 277.
— transzendente — 234, 277, 341.
Irrationalzahl 231 ff., 277.
Isoperimetrisches Problem 146.

Kalenderwesen 37.
Kantenmodelle von Körpern 73, 153.
Kegel 68, 153, 154, 157.
Kegelschnittbüschel 316.
Kegelschnitte 150, 162, 190 ff., 312 ff., 334, 351.
— Brennpunktseigenschaften der — 191.
— Definition der — 191, 312.
— entartete 313.
— konjugierte Durchmesser der — 192, 200.
— Konstruktion der — 193.

Kegelschnitte, Leitkreis der — 192.
— Leitlinie der — 192.
— Näherungsmethoden zur Konstruktion — von — 193.
— projektive Erzeugung der — 201.
— Scheitelkreis der — 192.
— Tangente der — 192.
— zentralperspektivische Auffassung der — 200.
Kegelschnittlehre 190 ff., 199 ff., 312 ff.
Kegelschnittzeichner 192, 194.
Kegelstumpf 153, 156.
Kettenbruch 223, 262.
Kettendivision 31.
Kettenlinie 338, 339.
Kettensatz 53.
Kinematograph 126 ff.
Kinoheft 127.
Kipregel 58.
Klammerrechnung 16 ff., 24 ff., 209.
Klappkubus 36.
Klapptafel 167.
Kleeblattschlinge 318.
Klexographie 123.
Koeffizientenvergleichung 342.
Kollineationen 200 ff., 317.
Kombinationen 11, 252.
Kombinatorik 247, 251 ff.
Kommafehler 46.
Kommutatives Gesetz 15, 23, 209, 210.
Kongruenz 121.
Konjugierte Durchmesser 192.
Konstruktionen 82, 129, 133 ff., 311.
— in begrenzter Ebene 136.
— mit dem Lineal allein 186.
— stereometrische — 160.
— mit algebraischer Analysis 149, 150.
Kontinuum 207.
Kontokorrentrechnung 62.
Konvergenz 339 ff.
— Kriterium 340.
Koordinaten 309 ff.
Koordinatensystem 193, 288, 309 ff.
Kopfgeometrie 76.
Kopfrechnen 17, 24 ff., 30, 44, 55.
Kopfzerbrecher 142.
Körper, Berechnung von — 154 ff.
— Darstellung der — durch ebene Zeichnungen 75, 154, 166.
— Darstellung der — im Raum 72, 153.
Körper, ebene Schnitte durch — 166.
— einfachste geometrische — 65 ff., 153.
— Erzeugung von — durch Rotation ebener Flächen 153.
— konvexer — 163.
— praktische Ausmessung des Volumens eines — 163.
— regelmäßige — 68, 161, 162.
— Simpsonsche — 163.
Körperberechnung 154 ff., 351.
Körpermaße 33.
Körpernetz 153, 160.
Kosinus 171.
Kosinussatz 173, 174, 178.
Kotangens 171.
Kreis 69, 74, 122, 144 ff., 150, 176, 195, 301, 351.
— Feuerbachscher — 186.
— Gleichung des — 308, 309.
Kreisberechnung 144.
Kreisquadratur 184.
Kreisteilung 148, 184.
Krümmungskreis 193.
Kubatur von Rotationskörpern 352.
Kubikdezimeter 36.
Kubikwurzelausziehung 237.
Kugel 68, 153, 157, 179, 273.
Kugeldreieck 179 ff.
Kugelzweieck 181.
Kursbuch 37.
Kurve, algebraische 300 ff.
— empirische — 281 ff.
— Flächeninhalt von — 286.
— Krümmung der — 335.
— logarithmische — 241, 303, 337.
— Parameterdarstellung von — 335.
— Quadratur der — 351.
— Rektifikation ebener — 352.
— Steigung der — 285, 325.
— Superposition von — 286.
— Vergleichung zweier — 286.

Lageverhältnisse 109.
Lagrangesche Methode 274.
Längenmaße 33, 77.
Lehrsatz 83.
— Beweis geometrischer — 103 ff.
— Umkehrung von — 112 ff.
Lehrsatzsystem 106, 139.
Lillsches Verfahren 300.

Lineal 74.
Linearzeichnen 135, 154, 163 ff.
Logarithmen 49, 184, 237, 238 ff., 303.
Logarithmentafeln 184, 242, 243.
Logarithmische Skala 242, 245, 306.
Logik 246.
Lohntafeln 24, 290.
Ludolfsche Zahl 145.
Lunulae Hippocratis 139, 146.

Mächtigkeit 207.
Malfattische Aufgabe 188, 189.
Maße 33 ff., 77.
— dezimale — 33, 34.
— nichtdezimale — 33, 34.
— Schreibweise der — 33, 34, 35.
— veraltete — 34.
Maßstabänderungen 285, 291.
Maßsysteme anderer Länder 34.
Mausefallenbeweis 109.
Maxima und Minima 283, 326 ff.
Mechanik 321.
Menelaus, Satz von 186, 187, 188, 189.
Mengenbegriff 13, 14.
Mengenlehre 206, 210.
Meraner Vorschläge 10, 278 ff.
Merkwürdige Punkte im Dreieck 122 ff.
Messen 21, 77 ff.
Meßband 77.
Meßblatt 131.
Meßlatte 77, 131.
Meßstab 131.
Meßtischblatt 163.
Meßtischverfahren 149.
Millimeterpapier 288.
Minuszeichen 217.
Möbius'sches Blatt 161.
Modelle 69, 73 ff., 153, 155, 159.
Moivresches Theorem 177, 271, 274, 346.
Mollweidesche Formeln 178.
Monge, Satz von 186.
Monom 208.
Multiplikation 20 ff., 37, 40 ff., 49, 210, 220.
— Rechenschema bei der — 25.
— relativer Zahlen 221, 293 ff.
multiplicatio per crocetta 26 ff.
Multiplikationsrechenmaschine 227.
Münzsystem 34.
Mutoskop 126.

Näherungsformeln 156.
Näherungskonstruktionen 137, 184.
Näherungsmethoden 232, 274.
Näherungswerte 49, 232, 273, 328, 341.
Nebenwinkel 118.
Nenner 40.
Nepersche Analogien 180.
— Regel 179.
Netto 60.
Netztafeln 305.
Neunerprobe 30.
Neunpunkte-Kreis 186.
Newtonsche Näherungsmethode 274, 328.
Nomographie 304 ff.
Nonius 79.
Norddeutsche Methode der Subtraktion 18.
Numeratio 13.

Obelisk 68, 163.
Oberbegriff 89.
Österreichische Division 28.
— Subtraktion 18 ff.
Ökonomieprinzip 91, 276.
Operationszeichen 14, 21 ff.
Optische Täuschungen 79.
Ornamentmuster 75.
Orthogonalprojektion 166 ff.
Oval 69.

Pantograph 149.
Papiermaße 34.
Parabel 144, 190 ff., 294 ff., 298, 301, 345.
Paradoxien 207.
Parallelenaxiom 97, 118 ff.
Parallelenlehre 86, 118 ff.
Parallelogramm 89, 124.
Parallelperspektive, schräge 154, 156, 166 ff. 181.
Pascal, Satz von 186, 187, 188, 189.
Pendelquadrant 130.
Pentagramma mirificum 179.
Periodizität 286.
Permanenzprinzip 41, 91, 174, 220 ff., 346.
Permutation 252.
Perspektivität 148.
Phantasieaufgaben 266.
Physik 36, 158, 224, 242, 245, 249, 255, 266, 287, 306, 336, 352.
Planetenbewegung 313.
Planimeter 351.

Planimetrie 83 ff., 197.
Pol und Polare 186, 188, 200, 202, 315.
Polarecke 160.
Polarkoordinatensystem 288, 309.
Polhöhe 243.
Polyeder 160 ff.
Polygonalzahlen 248.
Polynom 208, 223.
Polynomischer Satz 253.
Ponderieren 9.
Postbetrieb 56.
Potenz und Potenzlinie 186, 189, 199.
Potenz mit irrationalem Exponenten 239.
— mit komplexem Exponenten 346.
Potenzgesetze 295, 296.
Potenzieren 34, 35, 211, 225 ff., 294 ff., 346.
Potenzreihe 341 ff.
Pothenotsches Problem 185.
Preisverzeichnis 56.
Primfaktoren 30, 228.
Primzahl 29 ff., 228 ff.
Prisma 68, 153.
Prismatoid 162, 163.
Probe 18, 30.
Produkt, unendliches 338, 342.
Produktengleichung 223.
Projektive Geometrie 195 ff., 199 ff., 315, 317 ff.
Promille 61.
Propädeutischer Geometrieunterricht 65 ff.
Propädeutik, stereometrische 152 ff.
— trigonometrische 170.
Proportion 52, 223, 267.
Proportionalität, direkte 33, 52.
— indirekte 52.
Proportionalitätsfaktor 173, 223, 224.
Proportionalzirkel 147.
Proportionslehre 147, 223, 224.
Proportionsschluß 63.
Prozent 58, 60 ff.
Prozentrechnung 58, 60 ff.
Psychologie 6.
Punkt, unendlich ferner 198, 317.
Punktbestimmung durch zwei Koordinaten 80.
Pyramide 68, 153, 155, 156.
Pyramidenstumpf 68, 153, 156.
Pythagoreischer Lehrsatz 141, 142, 143.
— verallgemeinerter — — 173.

Quader 68.
Quadrat 75.
Quadratwurzel 231 ff.
Quadratwurzelkurve 296, 297.

Rabatt 58, 60.
Rabattrechnung 58.
Radizieren 230 ff.
Rätsel 266.
Raum 71.
Raumkurve 163.
Raumlehre 66, 67.
Raummaße 79.
Rechenkasten, Tillichscher 7, 8.
Rechenmaschine, russische 7, 8.
— Additions- und Multiplikations- 227.
Rechenoperationen 208 ff.
— mit Gleichungen 258, 259.
— vierter Stufe 246.
Rechenstab 15, 184, 242 ff.
Rechenunterricht 1 ff., 280.
— formalistisches Prinzip im — 2.
— materiales Prinzip im — 1, 2.
— sittliche Ziele des — 3.
— als Vorbereitung für den mathematischen Unterricht 4.
— Zahlentheoretisches im — 29.
Rechenvorteile 18, 24, 25, 212, 213.
Rechnen, abgekürztes — 48, 49, 59.
— angenähertes — 48, 49.
— mit benannten Zahlen 32.
— bürgerliches — 56 ff.
— kaufmännisches — 61 ff.
— mit mehrfach benannten Zahlen 37.
— mit Zeitmaßen 37.
Rechnung, Überschlag über die 46.
Rechnungsarten, bürgerliche 56 ff. 265.
— kaufmännische — 61 ff.
Rechteck 75.
Reduktion 37.
Regeldetri 49 ff., 41, 267.
— direkte — 55.
— einfache — 49 ff.
— indirekte — 55.
— zusammengesetzte — 53 ff.
Regelflächen 163.
Regenschirmsatz 160.
regula falsi 274, 328.
Reihen 247 ff., 339 ff.
— arithmetische — 205, 247 ff., 349.

Reihen, geometrische — 205, 247 ff.
— Konvergenz von — 249, 340 ff.
— Mac Laurinsche — 344.
— oszillierende — 249.
— Praxis der — 341.
— Restglied einer — 345.
— Taylorsche — 344.
— unendliche — 249, 339 ff.
Reißfeder 74.
Reißschiene 135.
Rentenrechnung 250, 251.
Resolution 37.
Reziproker Bruch 51, 306.
Rhombus 75.
Richtungsbegriff 197, 218.
Röhrenaufgaben 266.
Rollbandmaß 77.
Rotationskörper 153, 163, 352.

Sachbelehrung 64.
Sandrechnung von Archimedes 12.
Schachtelklammern 17, 209.
Schattenmessung 170.
Schätzen 132.
Scheerung 326.
Scheitelwinkel 118.
Schere 74.
Scherz 108, 266.
Schiebzettelmethode 27.
Schlußrechnung 50.
Schmiegungsparabel 345.
Schnabelellipse 154, 181.
Schulmeterstab 35.
Schwerpunkt 352.
Seitenkosinussatz 180, 185.
Sieb des Eratosthenes 30.
Simpsonsche Körper 163.
— Regel 163.
Sinus 170, 172.
Sinussatz 173, 174, 180.
Skalare Felder 287.
Skonto 62.
Sortenrechnen 33 ff., 37.
Speer 197.
Sphärisches Dreieck 108, 178 ff.
— Trigonometrie 108, 178 ff.
Sphenisk 163.
Sprungständer 149, 150.
Statistik 256.
Stechzirkel 74, 80, 135.
Stereometrie 151, 152 ff., 180, 274, 351.
— Propädeutik der — 152 ff.
— systematische — 158 ff.
Stereoskop 182.
Stetigkeit 284, 330.
Steuern 64.
Stoffe, sachliche 64.
Storchschnabel 148, 149.
Strahl 71, 75, 93, 197.
Strahlenbüschel 186 ff.
Strahlensatz 147.
Strecke 71 ff., 93.
— Addition von — 79.
— gerichtete — 197.
— Messen von — 77.
— Schätzung von — 78.
— Subtraktion von — 79.
— Teilung von — 79.
— Vervielfältigung von — 79.
Streckendarstellung 282.
Streckenrechnung 31.
Strenge 94, 99, 120, 344.
Sturmscher Satz 277.
Substitutionen 215.
Substitutionsmethode 261.
Subtraktion 13 ff., 219 ff.
— Definition der — 14.
— von Brüchen 40.
— norddeutsche Methode der — 18.
— österreichische oder süddeutsche Methode der — 18, 19.
Symmetrie 71, 197.
— axiale 123, 197.
— zentrale — 124, 197.
Systematiker 8.
Systemzahlen 24.

Tabelle 278, 283, 301.
Tafeln, trigonometrische 173.
Tangens 170, 171, 175, 289.
Tangente, Begriff der 325.
Tangenssatz 178.
Tararechnung 58, 60.
Täuschung 78, 79.
— geometrische 132, 133.
Tautologien 114.
Technik 306, 339.
Teilbarkeit 29 ff., 227 ff.
Teilen 21, 228.

Teiler, größter gemeinschaftlicher 30 ff., 227 ff.
Teilung, harmonische 186 ff.
Temperaturkurven 283.
Terminrechnung 62, 63.
Tetraeder 162.
Thibautscher Beweis 99, 104, 108, 118.
Trägheitsmoment 352.
Transformationen 305, 310, 312, 316 ff.
Transzendenz von e und π 234.
Trapezregel 143.
Treppenkurve 285.
Trigonometrie 151, 170 ff., 197, 198.
Trigonometrographie 184.
Trisektion des Winkels 274.
Trochoide 337.
Trugschluß 108, 109, 258.

Überschlagene Vielecke 142, 143.
Übungssätze 139.
Umkehrungen 113.
Umkreis des Dreiecks 122.
Unendlich 207, 224.
— ferne Elemente 119, 198.
Ungeschlossene Gebilde 152 ff.
Ungleichungen 263, 299.

Variable 289.
Variation 252.
Vektoranalysis 287.
Vektorbegriff 287.
Vektorielle Felder 287.
Verlustrechnung 58.
Vieleck 69, 122.
Vielfaches, kleinstes gemeinsames 30 ff.
Viereck 69, 121 ff.
— vollständiges — 186.
Vierseit, vollständiges 186.
Vietas Wurzelsatz 268, 276.
Visierkunst 156.
Volumenbegriff 351.
Volumengrößen 79.

Wägen, Bestimmung des Flächeninhaltes durch — 143.
Wahrscheinlichkeitsrechnung 253 ff.
Wechselwinkel 119.
Wegaufnahmen 149.
Wellpappe 153.
Welsche Praktik 53.
Wendepunkt 327.
Wendetangente 294, 327.
Wetterkarten 287.
Winkel 75, 79, 80, 118 ff., 135, 138.
Winkeldreiteilung 184, 274.
Winkelkosinussatz 180.
Winkelmaß 33, 79.
Winkelmesser 80, 131, 132, 173.
Wortgleichungen 264, 265.
Würfel 68.
Würfelverdoppelung 274.
Würfelversuche 255.
Wurzel 230 ff.
Wurzelalgorithmus 227, 294.
Wurzelgesetze 236.
Wurzelgleichungen 259, 260, 268, 297.
Wurzelkurven 297.
Wurzelrechnung 236, 294.
Wurzelzeichen, Entstehung des 230.

Zahl 4 ff.
— absolute — 215.
— Addition und Subtraktion mehrfach benannter — 37.
— algebraische — 223, 233, 276, 277.
— benannte — 32 ff.
— Buchstaben an Stelle der — 23.
— einfach benannte — 33.
— Gesetz der großen — 255.
— Größenordnung einer — 46.
— imaginäre — 235.
— komplexe — 235 ff., 246.
— mehrfach benannte — 37.
— Multiplikation und Division mehrfach benannter — 37.
— natürliche — 208.
— negative — 216 ff.
— Potenzen von — 34, 35.
— rationale — 216.
— reelle — 246.
— relative — 216 ff., 223.
— simultane Auffassung der — 6.
— sukzessive Auffassung der — 7.
— transzendente — 234.
— Veranschaulichung der — 11.
— Zerlegung der — in Primfaktoren 30, 228.
Zahlbegriff 4 ff.
Zahlbild 6, 7.
Zählen 4 ff.

Zahlengefühl 184.
Zahlengerade 219, 283.
Zahlenkongruenzen 230.
Zahlenriese 10 ff.
Zahlentheorie 29, 277 ff.
Zähler 7.
Zahlkörper 216, 292.
Zahlkreis 10.
Zählmaße 34.
Zahlstrahl 12, 17, 22, 39, 212, 219.
Zahlsystem 8 ff., 229.
Zahlvorstellung 11.
Zahlwörter 13.
Zahlzeichen 12, 13.
Zauberformel 346.
Zehnersystem 8.
Zeichendreieck 135.
Zeitrechnung 37.
Zeitmaße 33.
Zentralkörper 163.
Zerlegungsgleichheit 142, 155.
Ziffern 12 ff.
Ziffernrechnen 227.
Ziffernsystem, dekadisches 227.
Zinseszinsrechnung 11, 250, 251, 307, 339.
Zinsfaktor 250.
Zinsrechnung 58, 61.
Zirkel 74.
Zweikreis 123.
Zyklische Vertauschung 180.
Zykloide 337.
Zylinder 68, 153, 162, 273.
Zylinderstumpf 68.

Handbuch des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts

Herausgegeben von

Geheimem Oberregierungsrat Dr. J. NORRENBERG

Dieses monumentale Werk zählt unsere hervorragendsten Fachleute zu seinen Mitarbeitern. Es bietet einen Überblick über die in jahrzehntelangem Ringen auf diesem Gebiete geleistete Arbeit und eine großzügige Zusammenfassung des heutigen Standes der Wissenschaft und der Unterrichtspraxis. Es begleitet den Lehrer bei seiner Berufstätigkeit und wird ihm jederzeit ein zuverlässiger und unentbehrlicher Helfer sein. Denn jeder Band des Handbuches enthält alles, was der Lehrer des betreffenden Faches zur Vorbereitung und zur Erteilung seines Unterrichtes braucht, es entwickelt die Aufgaben und Ziele der einzelnen naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächer und ihr Verhältnis zu den benachbarten Lehrgebieten, es behandelt die wissenschaftliche und didaktische Vorbildung und Fortbildung des Lehrers, das allgemeine und besondere Unterrichtsverfahren, sowie dessen Technik.

Bisher erschienen:

Methodik u. Technik des naturgeschichtlichen Unterrichts Von Prof. Dr. W. SCHOENICHEN. 625 S. mit 2 farb. und 30 schwarzen Tafeln, sowie 115 Abb. u. 4 Tabellen

Methodik des chemischen Unterrichts Von Prof. Dr. K. SCHEID. 463 Seiten

Methodik des erdkundlichen Unterrichts Von Konrektor Dr. P. WAGNER. I. Allgem. Teil. 302 S. II. Bes. Teil. 405 S. Mit zahlr. Abb.

Methodik des mathematischen Unterrichts Von Direktor Dr. W. LIETZMANN. I. Band: Allgemeine Methodik, Organisation und Technik des mathematischen Unterrichts. 343 Seiten

II. Band: Didaktik der einzelnen Unterrichtsgebiete. 452 Seiten. 2. Aufl.

Geschichte des naturwissenschaftlichen u. mathematischen Unterrichts Von Prof. F. PAHL. 377 Seiten

VERLAG VON QUELLE & MEYER IN LEIPZIG

Handbuch für höhere Schulen

Zur Einführung in ihr Wesen und ihre Aufgaben

Im Verein mit Fachgelehrten und
Schulmännern herausgegeben von
Ministerialdirektor Dr. RICHARD JAHNKE

*

Wenn unser höheres Schulwesen wieder auf die alte Höhe gehoben, ja noch vervollkommnet werden soll — eine Aufgabe, an deren Lösung mittelbar die Zukunft unseres Volkes hängt, — so muß planmäßig, mit Geschick und Gewissenhaftigkeit daran gearbeitet werden. In den Dienst dieser Idee stellt sich vorliegendes Handbuch. Entsprechend der neuen Ordnung der praktischen Ausbildung für das Lehramt an höheren Schulen in Preußen gibt es eine planmäßige Einführung der künftigen Oberlehrer in das Wesen und die Aufgaben ihres Berufes. Zugleich will es auch den mit der Ausbildung der Anwärter beauftragten Schulmännern bei ihrer schweren und verantwortungsvollen Aufgabe ein Hilfsmittel sein, die angehenden Oberlehrer in die einschlägigen Probleme einzuführen.

*

Bisher erschienen:

Ziele und Wege des Unterrichts Von Ministerialdirektor Dr. R. JAHNKE. 282 Seiten

Ethik Eine philosophische Erörterung der sittlichen Grundfragen. Von Oberschulrat Professor Dr. A. MESSER. 156 Seiten

Die Schulzucht und die Beziehungen zwischen Schule und Haus. Von Realgymnasialdirektor Professor Dr. H. WEIMER. 175 Seiten

In Vorbereitung befinden sich:

Die geschichtliche Entwicklung des Erziehungs- und Unterrichtswesens und die darin hervortretenden Bildungsideale. Von Prof. Dr. ED. SPRANGER

Psychologie und Schule Von Professor W. STERN

Die Verfassung des deutschen und preuß. Unterrichtswesens Von Geh. Prof. Dr. J. NELSON

Die Entwicklungsjahre und ihre Bedeutung für das Schulleben. Von Ministerialdirektor Geheimrat Dr. M. KIRCHNER und Geh. Medizinalrat Dr. TH. ZIEHEN

MINISTERIALDIREKTOR DR. R. JAHNKE

Werden und Wirken

Gedanken über Geist und Aufgabe des Lehramtes

197 Seiten

„Ein reifes, abgeklärtes Buch! Fast ein Lied auf das Glück eines Lehrerlebens, das sich bewußt in den Dienst der Jugend stellt. „Ein Beruf, zu dessen Ausübung so vielerlei gehört, muß notwendig ein vornehmer Beruf sein, ganz gleichgültig, wie er von den vielen eingeschätzt wird." Ein stolzes Wort! „Die Jugend hat mich immer wieder mit der Menschheit ausgesöhnt." Ein edles Wort! „Ob wir beliebt sind? Ich glaube kaum." Ein tapferes Wort! Tapfer legt er auch die Sonde an Allzumenschliches, Allzuhäusliches, ohne zu verletzen. Überall spürt man die Liebe zu den Berufsgenossen, die er aufklären, trösten, vor Abwegen warnen, methodisch schulen, mit dem Geist echter Wissenschaftlichkeit erfüllen will. Das Buch prunkt nicht mit Gedankenreichtum. Aber man fühlt sich innerlich bereichert. Es steckt eine Persönlichkeit dahinter." Pharus

STUDIENRAT DR. F. BEHREND

Bildung und Kulturgemeinschaft

Gesammelte Aufsätze und Vorträge

372 Seiten

Der Verfasser, der an der schulpolitischen Entwicklung der letzten Jahre an führender Stelle beteiligt gewesen ist, gibt hier eine Zusammenfassung seiner pädagogischen Erfahrungen und Ansichten. Er behandelt die Bedeutung der Reichsschulkonferenz, die auf ihr vorhandenen geistigen Strömungen und gibt damit gleichzeitig eine Übersicht über die ganzen modernen Schulströmungen und Programme. Er schildert ferner die Bildungs- und Erziehungsfragen der Studenten sowie der Hochschulreform. Die knappe, begrifflich scharfe Darstellung gibt die Möglichkeit, in kurzem Umfang ein lebensvolles, gedankenreiches Bild der pädagogischen Zeit- und Streitfragen zu geben.

Über die Reformbestrebungen auf dem Gebiete des naturgeschichtlichen Unterrichts. Von Professor Dr. O. SCHMEIL. 11. unveränderte Auflage. 96 Seiten

„Die Fülle der neuen Reformvorschläge zu sichten ist das Ziel, das sich der Verfasser steckt; er behandelt dabei nicht nur Fremdes, sondern gibt auch eigne Versuche. Und in der Tat ist gerade Schmeil hierzu der rechte Mann, da er nicht nur über eine langjährige Lehrerfahrung verfügt, sondern auch mit den neueren Errungenschaften der Wissenschaft durchaus vertraut ist. Der Kritik, die der Verfasser an den bisherigen Versuchen übt, kann man nur beistimmen: sie ist überall gerecht." Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht.

Methodik der Naturgeschichte Ein Hilfsbuch für Lehrer und für den Unterricht an Lehrerbildungsanstalten. Von Prorektor Dr. P. BROHMER. 77 Seiten

Von dem Wesen und den Aufgaben der Naturwissenschaft und besonders der Biologie einerseits nnd dem Charakter der niederen Schulen andererseits ausgehend, entwickelt der Verfasser aus beiden Faktoren mit Hilfe der Gesetze der Psychologie und Logik einheitliche Anweisungen für das Lehrverfahren im Naturgeschichtsunterricht. Anschauungen, Begriffe und Urteile bilden die wesentlichen Teilziele für die einzelnen Lehrgegenstände. Auf die praktische Seite des Unterrichts wird gebührender Wert gelegt.

Methodik des naturgeschichtlichen Unterrichts und Kritik der Reformbestrebungen. Von Professor Dr. W. A. LAY. 3. vermehrte Auflage. 147 Seiten

„Lays Buch ist von der ersten bis zur letzten Seite der Ausdruck einer Persönlichkeit, die genau weiß, worauf es beim Unterricht in Zoologie und Botanik ankommt... Wie nun dieses erreicht werden kann, dazu gibt das Laysche Werk eine ausgezeichnete Anleitung, von der man wünschen möchte, daß sie jedem angehenden Lehrer, gleichviel welches Fach er vertritt, beizeiten zu Händen käme."
Archiv für Hydrobiologie und Planktonkunde.

Naturgeschichte auf arbeitsunterrichtlicher Grundlage Von CHR. CHRISTIANSEN. 145 Seiten mit 14 Abbildungen

Die vorliegende Naturgeschichtsmethodik auf arbeitsunterrichtlicher Grundlage macht den Unterricht zum Erlebnis. Er füllt die Seele mit Eindrücken, er schafft Vorstellungen und Vorstellungsreihen, verbunden mit kräftigen Gefühls- und Willensregungen, die für das Verständnis wörtlicher, zeichnerischer malerischer, und musikalischer Darstellungen auf allen Gebieten des Unterrichts unbedingt erforderlich sind.

Methodisches Handbuch der Mineralogie und Geologie Von Rektor N. ROESTEL 259 Seiten mit 170 Textbildern.

„Aus dem Buche spricht der erfahrene Schulmann. Er beginnt mit der Heimat, die ein Ausgangs- und Mittelpunkt für den angehenden Geologen ist. Ihr ist deshalb auch das 1. Kapitel gewidmet. In den 9 folgenden werden sodann die Mineralien und Gesteine der Sedimente behandelt, ferner die Feuergewalten der Erde, die Tiefen- und Ergußsteine, sowie die Erze. Den Schluß bildet die Geschichte der Erdkruste. Von besonderem Wert ist, daß überall Anleitungen zu Beobachtungen, Versuchen und Anwendungen neben den wissenschaftlichen Tatsachen geboten werden, so daß ein voller methodischer Lehrgang entsteht." Kosmos.

VERLAG VON QUELLE & MEYER IN LEIPZIG

Lehrbuch der Zoologie Für höhere Lehranstalten und die Hand des Lehrers, sowie für alle Freunde der Natur, unter besonderer Berücksichtigung biologischer Verhältnisse. Von Prof. Dr. O. SCHMEIL. 45. Auflage. 546 Seiten mit 49 farbigen und 21 schwarzen Tafeln, sowie ca. 700 Textbildern nach Originalzeichnungen

„Was die naturwissenschaftlichen Lehrbücher Schmeils so überaus anziehend macht, ist die lebensvolle Darlegung der fortwährenden Beziehungen der Naturkörper zu ihrer Umgebung, der Organe zu ihren Zwecken; diesem biologischen Einschlag, der der ganzen Betrachtungsweise den Charakter gibt, verdanken sie jene starke Anziehungkraft, die den, der sich in sie versenkt, ganz in ihren Bann zieht." Allgem. Literaturblatt.

Lehrbuch der Botanik Für höhere Lehranstalten und die Hand des Lehrers, sowie für alle Freunde der Natur, unter besonderer Berücksichtigung biologischer Verhältnisse. Von Prof. Dr. O. SCHMEIL. 44. Auflage. 506 Seiten mit 34 farbigen und 34 schwarzen Tafeln, sowie 586 Textbildern

„Es wächst gegenwärtig ein Geschlecht heran, das die Segnungen eines modernen naturkundlichen Unterrichts, vorab Botanik, am eigenen Leibe verspürt hat; der Mann, dem sie das verdankt, ist Otto Schmeil, dessen Leitfaden der Botanik, um mit Francé zu reden, zum Bahnbrecher der modernen Naturauffassung und Elitebuch geworden ist."
Hans Scherzer in „Erd- und Pflanzenkundliche Wanderungen".

Allgemeine Zoologie Eine Einführung mit praktischen Übungen. Von Seminarlehrer G. R. PIEPER. 162 Seiten mit 174 Textabbildungen

Intensive Sinnesarbeit und reiche Selbstbetätigung sind die Grundpfeiler, auf denen der moderne Unterricht das Gebäude der erkenntnismäßigen und voluntaristischen Geistesbildung aufbaut. Um dem Biologieunterricht eine Gestalt zu geben, die diesen Prinzipien gerecht wird, ist in dem genannten Buche der Versuch gemacht worden, die allgemeine und die anatomische Biologie ganz auf praktische Übungen zu gründen. Nach einem einleitenden Abschnitt über Anweisung für mikroskopische Übungen werden Aufgaben mit kurzen Hinweisen zu ihrer Ausführung gestellt, so daß als Anreiz und Spielraum zu vielseitiger Selbstbetätigung die mannigfachste Gelegenheit geboten wird.

Lehrbuch der allgemeinen Botanik Von G. ANDERS. 471 Seiten mit 204 Abbildungen

„Das Buch zeichnet sich besonders durch seinen klaren, knappen Stil aus. Besonders zu erwähnen sind aber noch die Anmerkungen, die jedem Abschnitt angefügt sind. Sie enthalten übersichtlich geordnet eine Fülle von Material zur eigenen Untersuchung, so daß in Anbetracht der kurzen und die Hauptsachen bringenden Darstellung das Buch auch dem Fortgeschritteneren empfohlen werden kann." Botanische Zeitung.

Lehrbuch der allgemeinen Botanik für Lehrerseminare. Von Seminarlehrer R. HEUER und G. ZIEGENSPECK. 213 Seiten mit 2 Tafeln und 302 Textbildern

Jedem Abschnitte sind in Kleindruck Aufgaben zur Beobachtung, zu Versuchen und mikroskopischen Untersuchungen vorangestellt. Wo es nötig erschien, lenken kurze Hinweise den Schüler auf das Wesentliche des zu Erkennenden. Die Anordnung der Aufgaben ist derart, daß der jeder Aufgabengruppe angegliederte Text im wesentlichen als eine Zusammenfassung der selbsterarbeiteten Erkenntnisse angesehen werden kann. Wo die notwendigen physikalischen und chemischen Kenntnisse nicht ausreichen, sind kurze entsprechende Erläuterungen gegeben. Bau und Leben der Pflanze sind auf das engste verschmolzen, und es wird ohne Betonung des Zweckbegriffs fortgesetzt gezeigt, wie Bau und Lebenstätigkeit der Organe einander entsprechen und wie sich die Pflanze als Lebewesen betätigt.

VERLAG VON QUELLE & MEYER IN LEIPZIG

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 112474181